

УДК 621.373.12

СИНХРОНИЗАЦИЯ ДРОБНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

© 2012 В.В. Зайцев, А.В. Карлов, И.В. Стулов¹

Предложена модель автоколебательной системы с дифференциальным уравнением движения дробного порядка, находящейся под действием внешнего гармонического сигнала. Решения уравнения движения, соответствующие режиму установившихся синхронизированных колебаний и режиму биений вблизи полосы синхронизации, получены в квазигармоническом приближении. Проанализированы амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики синхронизации дробного осциллятора Ван-дер-Поля. Установлена аналогия между генератором с дробной цепью обратной связи и генератором с запаздывающей обратной связью.

Ключевые слова: дробная динамика, автоколебательные системы, гармоническая линеаризация, фазовая синхронизация.

В настоящее время формируется новый раздел теории динамических систем — дробная динамика [1] (в англоязычной литературе — фрактальная динамика [2]). Он охватывает исследования систем с интегродифференциальными уравнениями движения дробного порядка. Учитывая роль осцилляторов в классической динамике, есть все основания рассматривать фрактальный осциллятор как базовую модель дробной динамики. В научной периодике можно найти ряд публикаций, посвященных различным вопросам динамики фрактальных осцилляторов. В частности, в монографии [3] приведены аналитические решения задачи Коши для линейных консервативных осцилляторов. Импульсная характеристика осциллятора с дробным затуханием получена в статье [4]. В работе [5] описан алгоритм численного анализа механического осциллятора с демпфирующей силой, пропорциональной дробной производной от смещения. Ряд ссылок на оригинальные работы по динамике линейных фрактальных осцилляторов содержится также в библиографическом списке монографии [1]. Вместе с тем нелинейные колебательные системы с дифференциальными уравнениями дробного порядка пока исследованы в значительно меньшей степени. В статье [6] предложена модель автогенератора томсоновского типа с дробной цепью обратной связи (цепью ОС) и проанализированы его колебания в автономном режиме. Данная статья посвящена исследованию режима синхронизации дробного осциллятора Ван-дер-Поля на основном тоне внешнего гармонического сигнала.

¹Зайцев Валерий Васильевич (zaitsev@samsu.ru), Карлов Артем Владимирович (ar.karlov@gmail.com), Стулов Игорь Валерьевич (ig.stulov@yandex.ru), кафедра радиофизики и компьютерного моделирования радиосистем Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

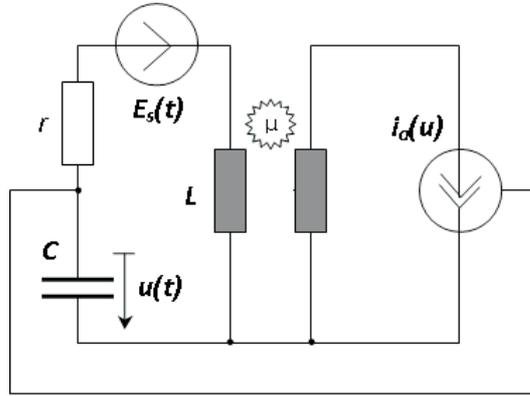


Рис. 1. Эквивалентная схема синхронизированного автогенератора

Модель дробного автогенератора в [6] основана на предположении о том, что ток активного трехполосника $J_a(t)$, протекающий по первичной обмотке трансформатора ОС (см. рис. 1), возбуждает в его контурной обмотке ЭДС

$$E_c(t) = \mu \frac{d}{dt} L I^{1-\alpha} [J_a(t)], \quad (1)$$

где левосторонний интеграл Лиувилля порядка $1 - \alpha$ при $0 < \alpha < 1$ определяется как

$$L I^{1-\alpha} [J_a(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{J_a(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau;$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция аргумента x . Размерный коэффициент μ в дробном дифференциальном преобразовании (1) замещает коэффициент взаимной индукции M в стандартной модели трансформатора.

С учетом уравнения ОС (1) нетрудно записать полное уравнение движения автогенератора при введении синхронизирующего сигнала $E_s(t)$ в колебательный контур так, как показано на рис. 1. Относительно переменного напряжения $u(t)$ на емкости контура оно имеет вид

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^{2-\alpha} g \frac{d}{dt} L I^{1-\alpha} [i_a(u)] + \omega_0^2 E_s(t), \quad (2)$$

где ω_0 и Q — собственная частота и добротность колебательного контура с характеристическим сопротивлением Z_0 . Нелинейная вольт-амперная характеристика (ВАХ) активного элемента в (2) аппроксимируется кубическим полиномом с коэффициентами S_0 (малосигнальная крутизна ВАХ) и β (коэффициент нелинейности):

$$J_a(u) = S_0 i_a(u) = S_0 (1 - \beta u^2) u. \quad (3)$$

Кроме того, при записи уравнения (2) использован безразмерный параметр глубины положительной обратной связи

$$g = \frac{\mu S_0 Z_0}{L \omega_0^{1-\alpha}}.$$

Анализ колебаний в осцилляторе (2) проведем в приближении метода эквивалентной (гармонической) линеаризации. Метод широко используется при решении

прикладных задач теории нелинейных колебаний [7]. Условия его применимости — высокая добротность резонансной системы и слабая нелинейность активного элемента. Будем считать эти условия для исследуемого осциллятора выполненными.

В соответствии со стандартной процедурой эквивалентной линеаризации в токе (3) при гармоническом сигнале $u(t) = A \cos(\omega_0 t)$ учитывается лишь первая гармоника колебаний тока $J_a(u(t))$:

$$J_a(t) \approx S_0 S_1(A) A \cos(\omega_0 t) = S_0 S_1(A) u(t),$$

где средняя крутизна ВАХ по первой гармонике дается выражением

$$S_1(A) = 1 - \frac{3}{4} \beta A^2. \quad (4)$$

Тогда с учетом того, что

$${}_L I^{1-\alpha} [\cos(\omega_0 t)] = \frac{1}{\omega_0^{1-\alpha}} \sin\left(\omega_0 t + \alpha \frac{\pi}{2}\right),$$

(см. таблицы интегралов Лиувилля в [8]), нелинейное слагаемое в правой части (2) принимает форму линейного отклика

$$\omega_0^{2-\alpha} g \frac{d}{dt} {}_L I^{1-\alpha} [i_a(u)] = -2\omega_0 \Delta\omega(A) u + \frac{\omega_0}{Q_{ex}(A)} \frac{du}{dt}$$

с зависящими от амплитуды эквивалентными параметрами

$$\frac{1}{Q_{ex}(A)} = g S_1(A) \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right), \quad \Delta\omega = -\frac{\omega_0}{2} g S_1(A) \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right). \quad (5)$$

Параметры имеют простую физическую интерпретацию: $Q_{ex}(A)$ — модуль внешней добротности контура, $\Delta\omega(A)$ — поправка на частоту свободных автоколебаний.

Таким образом, в приближении эквивалентной линеаризации уравнение (2) заменяется уравнением

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0 \left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_{ex}(A)} \right) \frac{du}{dt} + (\omega_0^2 + 2\omega_0 \Delta\omega(A)) u = \omega_0^2 E_s(t). \quad (6)$$

При внешнем гармоническом воздействии с амплитудой E и частотой ω :

$$E_s(t) = E \cos(\omega t)$$

решение уравнения (6) представим в виде

$$u(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi(t)).$$

Амплитуда A и фаза φ принимают постоянные значения для режима синхронизированных колебаний с частотой внешнего воздействия и являются медленными функциями времени для режима биений вблизи границ области синхронизации. Предполагается, что указанные режимы наблюдаются в осцилляторе с дробной ОС, подобно тому как это имеет место в классическом осцилляторе Ван-дер-Поля.

В режиме синхронизированных колебаний дифференциальное уравнение движения (6) сводится к системе двух алгебраических уравнений для амплитуды и фазы колебаний:

$$\left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_{ex}(A)} \right) A = -E \sin \varphi, \quad 2(\delta\omega(A) - \xi) A = E \cos \varphi, \quad (7)$$

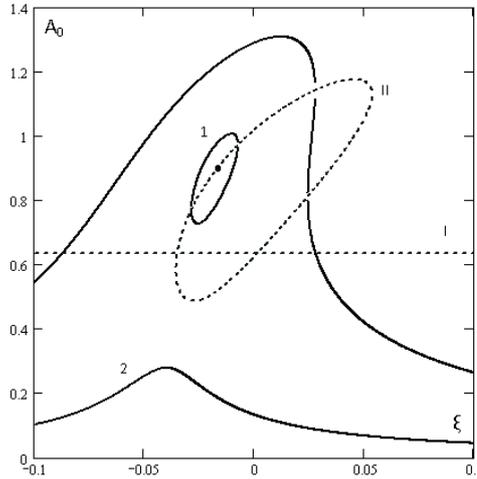


Рис. 2. АЧХ синхронизированного генератора

в записи которых использованы относительные величины $\xi = (\omega - \omega_0)/\omega_0$ и

$$\delta\omega(A) = \frac{\Delta\omega(A)}{\omega_0} = -\frac{1}{2}gS_1(A) \cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right).$$

После исключения фазы φ система уравнений (7) дает амплитудное уравнение вида

$$\left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_{ex}(A)}\right)^2 A^2 + 4(\delta\omega(A) - \xi)^2 A^2 = E^2$$

или с учетом (5) вида

$$\left(\frac{1}{Q} - gS_1(A) \sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 A^2 + \left(gS_1(A) \cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) + 2\xi\right)^2 A^2 = E^2. \quad (8)$$

Для средней крутизны (4) это уравнение является кубическим относительно квадрата амплитуды, поэтому в зависимости от расстройки ξ оно имеет либо один, либо три вещественных корня.

На рис. 2 приведены графики амплитудно-частотных характеристик синхронизированных колебаний, построенные по результатам решения уравнения (8) для системы с параметрами $\alpha = 0,5$, $Q = 30$ и $g = 0,12$. Амплитуды сигналов нормированы на величину $A_* = 1/\sqrt{\beta}$. При амплитуде внешнего сигнала $E = 0,013$ график АЧХ распадается на две ветви: ветвь 1 в форме замкнутой кривой и ветвь 2 резонансной формы. При увеличении амплитуды синхронизации две ветви сливаются в одну — резонансную. На рис. 2 характеристика такого вида построена для $E = 0,075$. Результаты исследований (см. ниже) показывают, что устойчивыми являются части АЧХ, расположенные вне области, ограниченной замкнутой кривой II, и выше прямой линии I. Фазочастотные характеристики, соответствующие АЧХ рис. 2, приведены на рис. 3. Неустойчивые части ФЧХ показаны пунктирными линиями.

Общий вывод о форме частотных характеристик синхронизированного осциллятора Ван-дер-Поля с дробной ОС — наличие асимметрии относительно частоты свободных автоколебаний. Степень асимметрии увеличивается с уменьшением

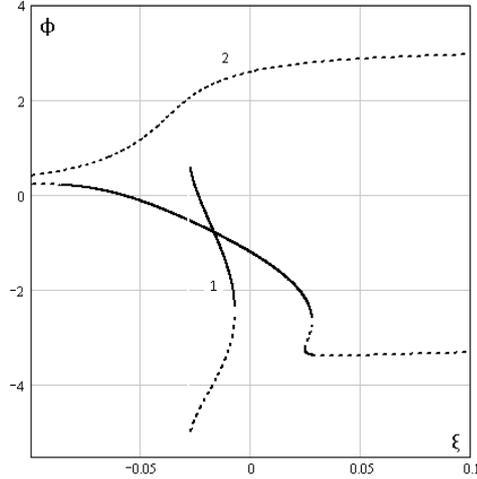


Рис. 3. ФЧХ синхронизированного генератора

дробного показателя α . В этом осциллятор с дробной ОС аналогичен генератору с запаздыванием τ в цепи обратной связи [9], удовлетворяющему соотношению $(1 - \alpha)\pi/2 = \omega_0\tau$.

В процессе установления синхронных колебаний и режиме биений амплитуда A и фаза φ полагаются медленными функциями времени, и для них записывается система укороченных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_0} \frac{dA}{dt} &= -\frac{A}{2} \left(\frac{1}{Q} - gS_1(A) \sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) \right) - \frac{E}{2} \sin\varphi, \\ \frac{1}{\omega_0} \frac{d\varphi}{dt} &= -\xi - \frac{1}{2}gS_1(A) \cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) - \frac{E}{2A} \cos\varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения (9) позволяют также исследовать устойчивость стационарных режимов синхронизированных колебаний с амплитудами и фазами, определяемыми решениями уравнений (7). Для этого следует положить

$$A(t) = A_0 + a(t), \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \phi(t),$$

где нулевыми индексами обозначены стационарные величины, и линеаризовать уравнения (9) относительно малых вариаций $a(t)$ и $\phi(t)$. Результатом линеаризации является система

$$\frac{1}{\omega_0} \frac{da}{dt} = p_{11}a + p_{12}\phi, \quad \frac{1}{\omega_0} \frac{d\phi}{dt} = p_{21}a + p_{22}\phi \quad (10)$$

с зависящими от амплитуды A_0 коэффициентами

$$\begin{aligned} p_{11}(A_0) &= -\frac{1}{2Q} + \frac{g}{2} \frac{d}{dA_0} (S_1(A_0)A_0) \sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right), \\ p_{12}(\xi, A_0) &= \xi A_0 + \frac{g}{2} S_1(A_0)A_0 \cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right), \\ p_{21}(\xi, A_0) &= -\frac{\xi}{A_0} + \frac{g}{2} \frac{d}{dA_0} (S_1(A_0)) - \frac{g}{2A_0} S_1(A_0) \cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right), \\ p_{22}(A_0) &= -\frac{1}{2Q} + \frac{g}{2} S_1(A_0) \sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Необходимым и достаточным условием релаксации вариаций $a(t)$ и $\phi(t)$ к нулевым значениям (условием устойчивости A_0 и φ_0) является выполнение неравенств

$$\begin{aligned} D_I(A_0) &= p_{11}(A_0) + p_{22}(A_0) \leq 0, \\ D_{II}(\xi, A_0) &= p_{12}(\xi, A_0)p_{21}(\xi, A_0) - p_{11}(A_0)p_{22}(A_0) \leq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Равенства в (12) соответствуют границам области устойчивости. Они показаны на рис. 2 пунктирными линиями *I* и *II*. Граница $D_I(A_0) = 0$ представляет собой прямую линию, параллельную оси частот, а граница $D_{II}(\xi, A_0) = 0$ — замкнутую кривую второго порядка. При уменьшении дробного показателя α кривая замыкается, и граница принимает вид наклоненной вправо линии параболического типа.

Литература

- [1] Тарасов В.Е. Модели теоретической физики с интегродифференцированием дробного порядка. М.; Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. 568 с.
- [2] Zaslavsky G.M. Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics. Oxford: Oxford University Press, 2005.
- [3] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
- [4] Schafer I., Kempfle S. Impulse Responses of Fractional Damped Systems // Nonlinear Dynamics. 2004. V. 38. P. 61–68. URL: <http://www.springerlink.com/content/q180440301740421/fulltext.pdf>.
- [5] Yuan L., Agrawal O.P. A Numerical Scheme for Dynamic Systems Containing Fractional Derivatives // Proc. of ASME Design Engineering Technical Conferences. Atlanta, 1998. URL: http://me.engr.siu.edu/MEEP_old/faculty/agrawal/mech5857.pdf.
- [6] Зайцев В.В., Карлов А.В., Яровой Г.П. Динамика автоколебаний дробного томсоновского осциллятора // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2012. Т. 15. № 1.
- [7] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 4-е изд. М.: Наука, 1974. 504 с.
- [8] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
- [9] Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.

Поступила в редакцию 14/II/2012;
в окончательном варианте — 14/II/2012.

SYNCHRONIZATION OF FRACTIONAL VAN-DER-POL OSCILLATOR

© 2012 V.V. Zaitsev, A.V. Karlov, I.V. Stulov²

A model of self-oscillating system with a differential equation of motion of fractional order under the action of external harmonic signal is proposed. Solutions of equation of motion which correspond to the regime of steady-state synchronized oscillations and the regime of beats near the synchronization band are obtained in the quasiharmonic approximation. The amplitude frequency and phase-frequency characteristics of synchronization of fractional Van-der-Pol oscillator are analyzed. An analogy between the generator with a fractional feedback circuit and the generator with delayed feedback is established.

Key words: fractional dynamics, self-oscillations systems, harmonic linearization, phase synchronization.

Paper received 14/II/2012.

Paper accepted 14/II/2012.

²Zaitsev Valeriy Vasilievich (zaitsev@samsu.ru), Karlov Artem Vladimirovich (ar.karlov@gmail.com), Stulov Igor Valerievich (ig.stulov@yandex.ru), the Dept. of Radiophysics and Computer Modelling of Radiotechnical Systems, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.