

УДК 621.396.6.536.248.2.001

*Н.И. Ключев, Х.И. Мингулов, Н.А. Бурмистров\**

### ДВИЖЕНИЕ КАПЛИ В ГРАДИЕНТНОМ ПОТОКЕ

В работе представлена математическая модель пространственного движения одиночной капли в градиентном потоке.

**Ключевые слова:** капля, градиентный поток, сила, движение.

#### Введение

В технических приложениях достаточно часто встречаются двухфазные системы, состоящие из газа (жидкости) с включением капель или твердых частиц. Так, например, процесс газификации криогенного топлива на борту летательного аппарата сопровождается течением парожидкостной смеси, состоящей из пара и капель жидкости; течения различных суспензий, состоящих из жидкости и взвешенных в них твердых частиц. Движение капель в цилиндрическом канале в потоке пара характерно для испарителя тепловых труб и т. д.

Моделирование таких процессов на микроуровне приводит к задаче о движении отдельной (капли) частицы в градиентном потоке. Будем считать каплю сферой радиуса  $a$ , которая движется в горизонтальном цилиндрическом канале радиуса  $R$  вместе с потоком. Схема течения в цилиндрических координатах показана на (рис.1).

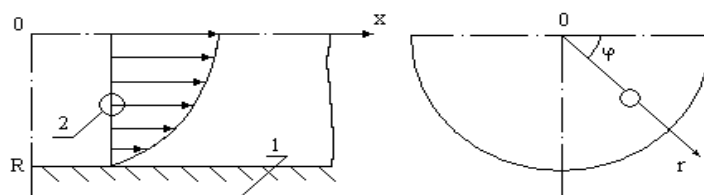


Рис. 1. Капля в потоке Пуазейля: 1 – канал; 2 – капля

#### Уравнение продольного движения

Пусть движение капли начинается с нулевой скоростью, тогда процесс движения будет нестационарным. В продольном направлении на каплю действуют сила лобового давления со стороны потока, которая определяется форму-

---

\* © Ключев Н.И., Мингулов Х.И., Бурмистров Н.А., 2012

*Ключев Николай Ильич* (nikolay\_klyuev@mail.ru), *Мингулов Хамзя Илясович* (sn@sseu.ru), *Бурмистров Николай Александрович* (burnil@yandex.ru), кафедра математического моделирования в механике Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

лой Буссинеска и для однородного потока имеет вид ( $0,2 < Re < 10$ )

$$F_x = 6\pi \mu_1 a \left( V_1 - \frac{dx}{dt} \right) \left( 1 - \frac{3}{16} Re \right) - \frac{2}{3} \pi \rho_1 a^3 \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad (1)$$

где индексом «1» обозначены параметры легкой фазы,  $V_1$  – скорость потока,

$Re = \frac{(V_1 - dx/dt)2a}{\nu_1}$  – число Рейнольдса,  $\rho$  – плотность,  $\mu, \nu$  – динамическая и кинематическая вязкость.

Первое слагаемое в правой части формулы (1) представляет силу Стокса с поправкой Озеена. Второе слагаемое является инерционной составляющей и определяет присоединенную массу. Эта величина характеризует потери энергии потока, связанные с вязкостными силами, поэтому слагаемое взято со знаком «минус».

В градиентном потоке сила лобового давления будет величиной переменной, зависящей от поперечного положения капли [1]

$$F_x = 6\pi \mu_1 a \left[ 2\bar{V}_1 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) - \frac{dx}{dt} \right] \left[ 1 + f\left(\frac{r}{R}\right) \frac{a}{R} \right] - \frac{2}{3} \pi \rho_1 a^3 \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad (2)$$

где  $\bar{V}_1$  – средняя скорость потока,  $f(r/R)$  – известная функция эксцентриситета.

Кроме указанных сил, в продольном направлении на каплю действуют сила сопротивления, которая определяется загромождением проходного сечения канала

$$F_{\Delta p} = \Delta p_x \pi a^2 = \frac{12\pi \mu_1 a^3}{R^2} \left[ 2\bar{V}_1 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) - \frac{dx}{dt} \right] \left[ 1 + f\left(\frac{r}{R}\right) \left( \frac{a}{R} \right) \right]. \quad (3)$$

С учетом сил (2)–(3) уравнение движения в проекции на ось x примет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x - F_{\Delta p} + F_{ax}, \quad (4)$$

где масса капли  $m = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_2$ .

## 2. Уравнение радиального движения

Рассмотрим движение капли в радиальном направлении. На нее действует сила лобового сопротивления

$$F_r = -6\pi \mu_1 a \frac{dr}{dt} - \frac{2}{3} \pi \rho_1 a^3 \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right], \quad (5)$$

сила тяжести и сила Архимеда

$$F_{gr} = \frac{4}{3} \pi a^3 (\rho_2 - \rho_1) g \sin \varphi. \quad (6)$$

Неоднородность поля скоростей приводит к возникновению силы Бернулли

$$F_b = \frac{\pi \rho_1 a^2}{2} \left\{ \left[ 2\bar{V}_1 \left[ 1 - \frac{(r-a)^2}{R^2} \right] \right]^2 - \left[ 2\bar{V}_1 \left[ 1 - \frac{(r+a)^2}{R^2} \right] \right]^2 \right\}, \quad (7)$$

которая отталкивает каплю от стенки канала и направлена к оси симметрии канала. Запишем уравнение движения капли в проекции на ось  $r$

$$m \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] = F_r + F_{ar} + F_{gr} - F_b. \quad (8)$$

### 3. Уравнение поперечного движения

В поперечном движении на каплю действуют: сила лобового сопротивления

$$F_\varphi = -6\pi \mu_1 a r \frac{d\varphi}{dt} - \frac{2}{3} \pi \rho_1 a^3 \left[ r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right], \quad (9)$$

сила тяжести и сила Архимеда

$$F_{g\varphi} = \frac{4}{3} \pi a^3 (\rho_2 - \rho_1) g \cos \varphi. \quad (10)$$

Тогда уравнение движения для поперечного направления запишется в виде

$$m \left[ r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right] = F_\varphi + F_{a\varphi} + F_{g\varphi}. \quad (11)$$

### 4. Уравнение вращательного движения

Движение капли в градиентном потоке приводит к ее вращению, которое описывается уравнением

$$\frac{2}{5} m a^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 8\pi \mu_1 a^2 \left[ 2\bar{V}_1 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) - \frac{dx}{dt} \right] f_1 \left( \frac{r}{R} \right) \left( \frac{a}{R} \right)^2. \quad (12)$$

Зададим начальные условия:

$$t = 0, x = 0, r = b, \varphi = d, \frac{dx}{dt} = 0, \frac{dr}{dt} = 0, \frac{d\varphi}{dt} = 0, \omega = 0, \quad (13)$$

тогда математическая формулировка задачи по определению характеристик движения одиночной капли в потоке Пуазейля будет описываться системой уравнений (4),(8),(11) и (12) с начальными условиями (13).

### 5. Численное решение задачи

В качестве примера рассмотрим движение водяной капли радиуса  $a = 1,5 \cdot 10^{-4}$  м ( $\rho_2 = 998,2$  кг/м<sup>3</sup>) в горизонтальном воздушном потоке цилиндрического канала (температура  $T = 20^\circ\text{C}$ , плотность воздуха  $\rho_1 = 1,205$  кг/м<sup>3</sup>, средняя скорость воздушного потока  $\bar{V} = 16$  м/с), радиус канала  $R = 0,03$  м, начальное смещение капли

$b = 0,005$  м;  $\varphi = -\pi / 6$ . Система уравнений решалась численно в пакете прикладных программ Mathcad, результаты решения представлены на графиках.

На рис. 2–7 показаны характеристики пространственного движения капли с течением времени.

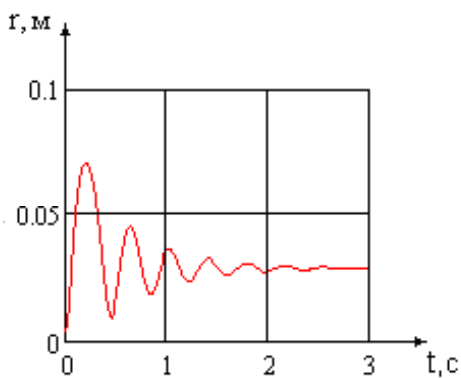


Рис. 2. Изменение радиального положения капли

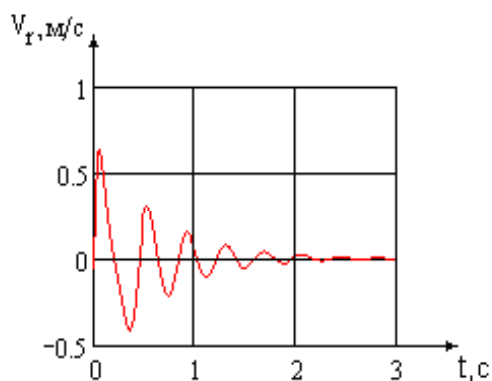


Рис. 3. Изменение радиальной скорости

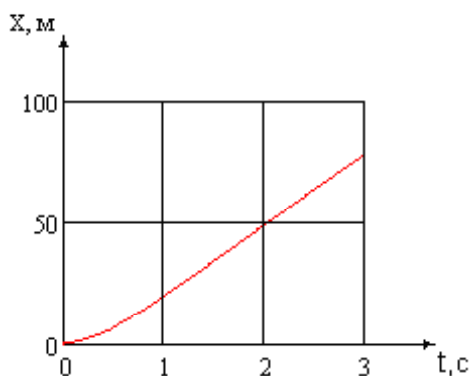


Рис. 4. Изменение продольной координаты

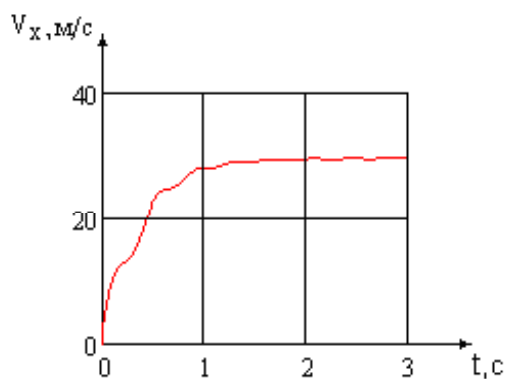


Рис. 5. Изменение продольной скорости

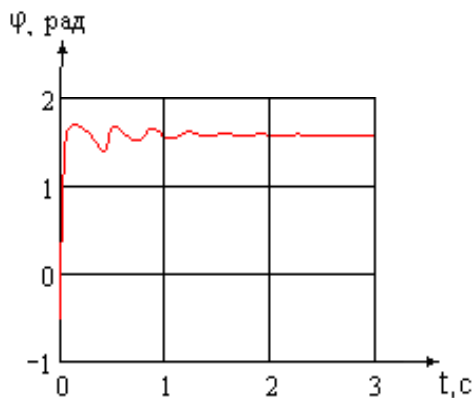


Рис. 6. Изменение полярного угла

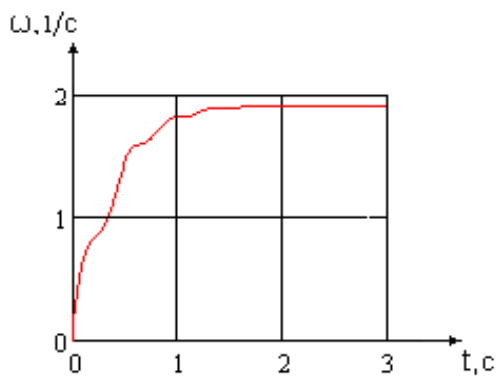


Рис. 7. Изменение угловой скорости вращения капли

**Заключение**

Из графиков видно, что капля задерживается в нижней части канала при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (рис. 6) на радиусе  $r \cong 0,029$  м (рис. 2). Изменение продольной координаты (рис. 4) практически линейно зависит от времени, а продольная скорость капли (рис. 5) асимптотически стремится к скорости соответствующей струйки тока. В начале движения радиальная скорость капли (рис. 3) имеет колебательный характер, при этом, колебания затухают в течение  $t \cong 2$  с и радиальная скорость обращается в ноль. В градиентном потоке капля получает вращение (рис. 7) до угловой скорости  $\omega \cong 1,898$  рад/с. Начиная с  $t = 3$  с общий характер движения практически становится установившимся.

Таким образом, представленная математическая модель позволяет определять характеристики пространственного движения капли (четыре степени свободы) и может быть использована (в том числе) для определения условий осаждения капли на нижней стенке канала.

**Библиографический список**

1. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.

*N.I. Klyuev, Kh.I. Mingulov, N.A. Burmistrov\**

**THE MOVEMENT OF DROP IN THE GRADIENT FLOW**

In the work the mathematical model of spatial motion of a single drop in the gradient flow is suggested.

**Key words:** drop, gradient flow, force, movement.

---

\* *Klyuev Nikolay Ilyich* (nikolay\_klyuev@mail.ru), *Mingulov Hamzya Ilyasovich* (sn@sseu.ru), *Burmistrov Nikolay Alexandrovich* (burnil@yandex.ru), the Dept. of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.