

*Е.Н. Барышева, В.Н. Никишов\**

## МОДЕЛИ ОЦЕНКИ ФИНАНСОВЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ С УЧЕТОМ ИХ СТОХАСТИЧНОСТИ И ХАОТИЧНОСТИ

В работе приведена методика оценки наличия хаотической составляющей и нелинейной зависимости для временной последовательности значений финансовых показателей. Методика основана на применении алгоритма Грассбергера-Прокаччия в целях оценки размерности динамической составляющей и BDS-статистики, для тестирования наличия нелинейной зависимости между составляющими временного ряда. На примере индекса РТС за последние 11 лет отмечено наличие хаотической составляющей порядка не менее 11 %, отсутствие низкоразмерного хаоса и наличие нелинейной связи между значениями индекса.

**Ключевые слова и фразы:** аппроксимация, перестрахование, убыток, убыточность, алгоритм Грассбергера-Прокаччия, теорема Такенса, доходность.

### **Введение**

В современном подходе к изучению нелинейной динамики можно выделить два аспекта ее развития. Первым из этих аспектов является этап диссипативных структур (1950–1980-е гг.). Термин «диссипативные структуры» был введен основателем современной теории сложности, нобелевским лауреатом И. Пригожиным и относится, прежде всего, к диссипативным процессам (вязкости, диффузии, теплопроводности). Такие процессы позволяли исследуемым системам «забыть» начальные данные и сформулировать с течением времени похожие стационарные структуры. Задача анализа сводилась к определению изменения и конфигурации структур при вариации внешних параметров и начальных данных, т. е. к построению бифуркационной диаграммы.

Математический аппарат нелинейной динамики на этом этапе определялся качественной теорией дифференциальных уравнений и теорией бифуркации на плоскости. Эти разделы математики интенсивно разрабатывались со времен А. Пуанкаре (конец XX века), успешно применялись в теории колебаний, что не в последнюю очередь обеспечило первые успехи синергетики.

Математическими образами эпохи стали притягивающие множества (аттракторы) в фазовом пространстве, при этом простейшим аттракторам – неподвижным точкам – соответствовали стационарные, не меняющиеся со временем структуры, более сложным – предельным циклам – различные периодические волновые процессы.

Вторым направлением развития нелинейной динамики является этап динамического хаоса (с начала 1980-х гг. и по настоящее время). Термин «хаос», под

---

\* © Барышева Е.Н., Никишов В.Н., 2012

*Барышева Евгения Николаевна* (barisheva\_zh@hotmail.com), *Никишов Виктор Николаевич* (TSh-sea05@yandex.ru), кафедра математики и бизнес-информатики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

которым понимается непредсказуемое поведение детерминированных систем, был введен в научный обиход в 1975 г. Т.-У. Ли и Дж. Йорком. Термин «динамический» означает, что отсутствуют источники флуктуаций. Ключевым понятием данного этапа стала чувствительность к начальным условиям: экспоненциальное разбегание двух близких траекторий для класса хаотических аттракторов. Скорость разбегания определяется величиной наибольшего показателя Ляпунова. Из-за указанной чувствительности нельзя сравнивать траекторию объекта и модели в одни и те же моменты времени: малая ошибка в начальных данных будет экспоненциально нарастать, что приведет через некоторое время к совершенно разным траекториям. Вследствие этого приходится или ограничиваться кратковременными прогнозами, или изыскивать адекватные способы сравнения поведения модели и объекта. Одним из последних может быть использование некоторых функционалов от траектории, определяющих количественные характеристики хаоса.

Задачи, которые решались на этом этапе, относятся к анализу временных рядов (в частности, нахождение горизонта прогноза), построению прогнозирующих систем, определению законов движения объекта по ограниченному ряду наблюдений.

### 1. Нелинейные хаотические модели

Обычно при описании эволюции  $h_n = \ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)$  принимается гипотеза о **стохастичности** этих величин, то есть  $S_n$  являются случайными величинами.

С другой стороны, хорошо известно, что даже совсем простые нелинейные детерминистские системы типа  $x_{n+1} = f(x_n; \lambda)$  могут порождать последовательности, поведение которых при соответствующих начальных условиях сходно с поведением стохастических последовательностей.

В связи с этим возникает вопрос о том, не являются ли многие экономические, в том числе финансовые, ВР в действительности не стохастическими, а хаотическими, то есть детерминированными нелинейными системами, которые могут приводить к эффектам кластерности, длинной памяти и прочее, что так характерно для финансовых временных рядов.

С точки зрения прогноза будущих цен ситуация все равно не оптимистична, так как, несмотря на детерминизм, траектории могут сильно изменяться в зависимости от точности определения начальных условий или параметров системы.

Например, логистическое отображение  $x_n = \lambda x_{n-1}(1 - x_{n-1})$  полностью детерминировано, пока  $\lambda \neq 4$ , но при  $\lambda \rightarrow 4$  система переходит в состояние хаоса: система начинает совершать блуждание по бесконечному числу состояний, «прыгая» из одного в другое. Важно то, что, хотя система является детерминистской, практически невозможно предсказать, где окажется система через некоторое время, поскольку ограниченная точность в определении значений  $x_n$  и  $\lambda$  может сильно повлиять на значения прогнозируемых величин.

Можно отметить, что для системы (1)

$$x_n = 4x_{n-1}(1 - x_{n-1}) \quad (1)$$

удается подобрать вероятностное распределение начального состояния  $x_0$ , считая начальное состояние случайной величиной с распределением  $p(x)$  (2):

$$p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}; x \in (0;1). \quad (2)$$

При этом случайные величины  $x_n$  будут иметь это же распределение у получаемой таким способом стохастической динамической системы  $x_n$ . Вся случайность полностью определяется начальным значением  $x_0$ , а динамика переходов  $x_n \rightarrow x_{n+1}$  задается детерминированным соотношением  $x_n = 4x_{n-1}(1 - x_{n-1})$ .

Параметр  $\lambda = 4$  играет для этой последовательности особую роль, именно при этом значении хаотическая последовательность наблюдений напоминает реализацию стохастической последовательности типа белого шума. Положим  $x_0 = 0,1$  и вычислим рекуррентным способом  $N = 1000$  значений. Подсчитанные по этим 1000 значениям среднее значение равно 0,48887 и стандартное отклонение равно 0,35742, с точностью до 5 знаков.

В таблице 1 приведены выборочные корреляционные функции, подсчитанные по этим значениям.

Таблица 1

Выборочные корреляционные функции

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r(k)	-0,033	-0,058	-0,025	-0,035	-0,012	-0,032	-0,048	0,027	-0,020	-0,013
k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
r(k)	-0,046	0,002	-0,011	0,040	0,014	-0,023	-0,030	0,037	0,078	0,017

Из таблицы 1 видно, что величины  $x_n$ , порождаемые логистическим отображением при  $\lambda = 4$ , можно считать некоррелированными, и в этом смысле последовательность  $x_n$  может быть названа **хаотическим белым шумом**.

## 2. Проблематика различимости хаотических и стохастических последовательностей для индекса РТС

В связи с тем что чисто детерминистские динамические нелинейные системы могут проявлять свойства типа стохастического белого шума, возникает проблема различения стохастических и хаотических последовательностей.

Центральная роль в таком различении принадлежит функции (3):

$$C(d) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\psi(N, d)}{N^2}, \quad (3)$$

где  $\psi(N, d)$  – число пар  $(i, j) \leq N$ , для которых в рассматриваемой последовательности  $x_n$ ,  $|x_i - x_j| < d$ .

Также можно ввести функцию (4):

$$C_m(d) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\psi_m(N, d)}{N^2}, \quad (4)$$

где  $\psi_m(N, d)$  – число тех пар  $(i, j) \leq N$ , для которых все компоненты векторов  $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1})$  и  $(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+m-1})$  отличаются не более чем на  $d$ .

В случае  $m = 1$  имеем  $\psi_1(N, d) = \psi(N, d)$ .

Для стохастических последовательностей  $x_n$  типа белого шума при малых  $d$  имеем:  $\ln C_m(d) \sim v_m = m$ , где  $v_m$  – фрактальный показатель.

Таким же свойством обладают многие детерминистские системы, например та же самая логистическая последовательность. Показатель  $v_m$  также называется корреляционной размерностью.

Идея различения хаотических и стохастических последовательностей основана на наблюдении, что корреляционная размерность у хаотических и динамических последовательностей будет различна. У стохастических последовательностей корреляционная размерность будет больше, чем у хаотических последовательностей, что достаточно очевидно. Действительно, на содержательном уровне корреляционная размерность характеризует, как заполняется пространство точками, построенными на основе последовательности (например временного ряда).

В случае стохастической последовательности идет равномерное заполнение пространства, в то время как в случае хаотической последовательности точки группируются вдоль так называемых предельных траекторий и заполнение намного хуже.

В качестве оценок корреляционной размерности естественно взять величины (5) или (6):

$$v_{m,j} = \frac{\ln C_m(d_j) - \ln C_m(d_{j+1})}{\ln d_j - \ln d_{j+1}}, d_j = \varphi^j, \varphi \in (0;1), \quad (5)$$

$$v_m(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k v_{m,j}. \quad (6)$$

В качестве примера рассмотрим опять логистическую последовательность (1). Положим  $x_0 = 0,1$ , последовательно вычисляя, получим  $N = 5900$  значений и вычислим корреляционную размерность при разных  $m, j$ .

В таблице 2 приведены данные для  $v_{m,j}$  при  $\varphi = 0,9$ .

Таблица 2

#### Значения $v_{m,j}$ для логистической последовательности

j\m	1	2	3	4	5	10
20	0,78	0,90	0,96	0,98	1,02	1,19
30	0,81	0,89	0,95	0,98	0,98	1,11
35	0,83	0,90	0,94	0,97	0,95	1,01
40	0,83	0,91	0,97	0,99	1,05	1,20

Сравним эти значения с теми оценками для  $v_{m,j}$ , которые получаются при моделировании гауссовского белого шума с теми же параметрами, что и для логистического отображения (среднее значение равно 0,48887, и стандартное отклонение равно 0,35742).

Таблица 3

#### Значения $v_{m,j}$ для гауссовского белого шума

j\m	1	2	3	4	5	10
20	0,84	1,68	2,52	3,35	4,20	8,43
30	0,98	1,97	2,95	3,98	4,98	-
35	0,99	1,97	2,93	4,00	5,53	-
40	1,00	2,02	3,03	4,15	5,38	-

Из сопоставления этих таблиц видно, что в случае  $m=1$  весьма трудно по значениям корреляционной размерности  $v_{1,j}$  отличить хаотичность и стохастичность.

Привлечение же больших значений  $m$  показывает существенное различие в величинах  $v_{m,j}$  для хаотического и стохастического случаев, что может служить весомым основанием для утверждения о разной природе образования соответствующих последовательностей  $\{x_n\}$ , при этом с точки зрения средних значений дисперсии и обычных корреляций разницы практически нет.

Данные таблицы подтверждают замечание, сделанное ранее: для стохастических последовательностей увеличение  $m$  на единицу ведет практически к увеличению на единицу и  $v_{m,j}$ , в то время как для хаотических последовательностей изменение  $v_{m,j}$  незначительно.

Рассчитаем значения  $v_{m,j}$  для доходности индекса РТС по данным рабочих дней с 1 января 2000 года по 31 мая 2011 года ( $h_n = \ln(\frac{S_n}{S_{n-1}}), n=1,2,\dots,N; N=2833$ ) при  $\varphi = 0,9$ , что соответствует значениям  $d_j = \varphi^j = 0,025, 0,015, 0,00872, 0,00515$ .

Данные значения выбраны с учетом стандартного отклонения для  $h_n : \sqrt{D(h_n)} = 0,024$ .

Таблица 4

Значения  $v_{m,j}$  для индекса РТС

$j \setminus m$	1	2	3	4	5
35	0,684	1,307	1,872	2,395	2,886
40	0,862	1,700	2,493	3,254	4,010
45	0,947	1,901	2,810	3,719	4,528
50	0,975	1,924	2,862	3,848	4,655

Как можно видеть из таблицы 4, значения, точнее динамика значений,  $v_{m,j}$  с изменением  $m$  близка к динамике белого шума, с увеличением  $m$  на 1 значения  $v_{m,j}$  также увеличиваются значительно. Другими словами, последовательность значений доходности индекса РТС близка к стохастической и вряд ли является следствием нелинейного динамического хаоса.

### 3. Теорема Такенса и размерность вложения (динамической системы)

В последнее время все большее внимание уделяется исследованию финансовых рынков с использованием методов нелинейной динамики.

Известно, что для однозначного описания сложного процесса всегда используется система уравнений для  $m$  переменных,  $m \geq 1$ . Число  $m$  называют размерностью системы. Допустим, что  $m > 1$ , но мы имеем результаты измерений только одной переменной. Вопрос: содержит ли ряд наблюдений этой переменной информацию о поведении всей системы в целом, т. е. является ли этот ряд достаточным для однозначного описания траектории состояния системы? Если ответ положительный, то это может служить основанием считать, что прогноз каждой переменной можно осуществлять независимо. Если ответ отрицательный, то необходимо искать полный набор переменных.

Положительный ответ основывается на теореме Такенса. Ее смысл заключается в следующем. Пусть состояние системы полностью описывается  $m$  переменными:  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$ . С интервалом  $T$  производятся измерения какой-либо одной из них, например  $x_1(t)$ . Тогда, согласно теореме, вместо последовательности, состоящей из  $m$  переменных  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$ , можно рассматривать последовательность

$x_1(t+T), x_1(t+2T), \dots, x_1[t+(m-1)T]$ , т. е. в каждый момент времени состояние системы может быть описано  $m$  значениями одной переменной, взятыми со сдвигом  $T$ .

При анализе динамических систем основной вопрос – это определение размерности системы, то есть количества переменных, необходимых для описания. В соответствии с теоремой Такенса возможно описание системы на основе  $m$ -мерных векторов задержек, составленных из последовательных отрезков временного ряда.

Они заменяют реальные переменные системы, которые вообще могут быть неизвестны.

#### 4. Алгоритм Грассбергера-Прокачиа

Для оценки размерности динамической системы используется алгоритм Грассбергера-Прокачиа, следует отметить длительность расчетов метода.

Для ряда  $x_t$  формируется последовательность последовательных векторов размерности  $m$   $\vec{a}_i, i=1, 2, \dots, N-m$ . Компоненты вектора  $a_{i,j} = x_{(i-1)m+j}, j=1, 2, \dots, m$ .

Корреляционный интеграл дается выражением (7):

$$C((m, N; r) = \frac{2}{(N-m)(N-m+1)} \sum_{i=1}^{N-m} \sum_{j=i+1}^{N-m+1} \theta \left( r - \sqrt{\sum_{k=0}^{m-1} (1/m)(x_{(i-1)+k} - x_{(j-1)+k})^2} \right). \quad (7)$$

Здесь  $\theta(x)$  – функция Хевисайда,  $\theta(x) = 0$ , если  $x < 0$ , и  $\theta(x) = 1$ , если  $x \geq 0$ .

Сравнивается расстояние между всеми парами векторов, если это расстояние меньше заданного  $r$ , то значение  $\theta = 1$ . Отметим, что кроме евклидова расстояния можно применять и другие, в частности, можно производить покомпонентное сравнение, то есть считать, что расстояние между векторами меньше, чем  $r$ , если по каждой компоненте меньше, иначе, если хотя бы одной компоненты выше, то считается, что расстояние превышено, в этом случае имеем выражение (8):

$$C((m, N; r) = \frac{2}{(N-m)(N-m+1)} \sum_{i=1}^{N-m} \sum_{j=i+1}^{N-m+1} \prod_{k=0}^{m-1} \theta(r - |x_{(i-1)+k} - x_{(j-1)+k}|). \quad (8)$$

Пожалуй, это наиболее точный способ расчета.

На рис. 1 приведены графики зависимостей корреляционного интеграла от расстояния  $d$  при различных параметрах размерности вложения –  $m$ .

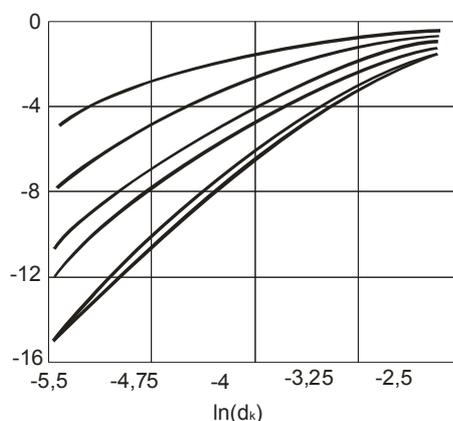


Рис. 1. График зависимости корреляционного интеграла  $C(m; d)$  при различных значениях размерности вложений  $m$  в двойных логарифмических координатах

Тангенсы угла наклона прямой части графика корреляционного интеграла в логарифмическом масштабе есть корреляционная размерность  $D_C$ :  $\ln C(m, d) = a + D_C \cdot \ln d$ .

Значения корреляционной размерности  $D_C$  в зависимости от размерности вложения  $m$  приведены в таблице 5.

Таблица 5

Значения корреляционной размерности  $D_C$  в зависимости от размерности вложения  $m$

$m$	2	4	6	8	10	12
$D_C(m)$	1,689	3,239	4,699	6,087	-	7,343

Если начиная с некоторого размера  $m^*$  наклон кривых стабилизируется, то это значение и является размерностью динамической системы.

Как можно видеть из рисунка 1, с увеличением размерности  $m$  стабилизация происходит начиная с  $m = 10$ . Таким образом, если система и является нелинейной хаотической системой, то ее размерность  $m$  равна 10, следовательно, **низкоразмерный хаос не обнаруживается**.

В ряде работ различных авторов производятся оценки по определению доли стохастичности и хаотичности, но однозначно это вопрос пока еще не решен. Можно провести приближенные оценки, исходя из следующих предположений:

1) с увеличением  $m$  на 1 корреляционная размерность для абсолютно стохастической системы должна увеличиваться также на 1, так что среднее значение  $\gamma_S$  будет равно 1;

2) для фактических данных доходности индекса РТС получим:

$$\gamma_\sigma = \frac{(7,343) - 1,689}{2 \cdot 4} = 0,70675.$$

Можно считать, что разница между  $\gamma_S$  и  $\gamma_\sigma$  и есть доля хаоса, в данном случае доля хаотичности (доля детерминированного хаоса) составляет 0,29325, или около 30 %.

Отметим, что полученное значение для детерминированного хаоса является максимальным значением, так как корреляционная размерность  $D_C$  вычисляется по всем данным, то есть на основе всех значений  $d$ . В то же время представляет интерес оценка  $D_C$  для самых минимальных значений  $d$ , что соответствует более точным оценкам  $D_C$ . Для этого определение  $D_C$  следует осуществлять только по самой первой части графиков, приведенных на рис. 1.

В таблице 6 приведены значения корреляционной размерности  $D_C$  для минимальных значений  $d$ .

Таблица 6

Значения корреляционной размерности  $D_C$  для минимальных значений  $d$

$m$	2	4	6	8	10
$D_C(m)$	1,91342	3,741703	5,506494	7,313131	9,036075

Данным значениям соответствует значение (9):

$$\gamma_\sigma = \frac{(9,036075) - 1,91242}{2 \cdot 4} = 0,890332. \quad (9)$$

Таким образом, минимальное значение детерминированного хаоса составляет 11 %.

Таблица 7

	Детерминированный хаос			Стохастичность		
	Максимум	Минимум	Среднее	Максимум	Минимум	Среднее
Уд. вес	30 %	11 %	15 %	70 %	89 %	80 %

Таким образом, можно считать, что динамика индекса доходности в среднем на 20 % определяется нелинейной хаотической системой, а доля стохастичности составляет 80 %, при этом размерность детерминированного хаоса порядка 10.

Содержательно наличие детерминированной нелинейной хаотичной системы может быть объяснено, например, наличием каких-то групп инвесторов с различными инвестиционными горизонтами, в то же время количество этих групп порядка 10.

### 5. Применение BDS-статистики для тестирования доходности индекса РТС на I.I.D.

BDS-статистика была предложена в результате анализа финансовых рынков экономистами Броком, Дечертом и Шейнкманом в 1987 году и представляет собой в настоящее время один из наиболее сильных методов выявления зависимостей во временных рядах.

Цель теста состоит в том, чтобы различать данные I.I.D. (независимые, одинаково распределенные случайные величины) и любой вид зависимости, то есть проверить нулевую гипотезу о независимости и тождественном распределении значений временного ряда, используя критерий значимости.

BDS-тест основан на статистической величине (BDS-статистике) (10):

$$w_{m,N}(r) = \sqrt{N-m+1} \frac{C_{m,N}(r) - [C_{1,N-m}(r)]^m}{\sigma_{m,N}(r)}. \quad (10)$$

Здесь в числителе приведены корреляционные интегралы  $C_{m,N}(r)$ ,  $C_{1,N-m}(r)$ , а знаменатель  $\sigma_{m,N}(r)$  среднеквадратическое отклонение числителя.

Зависимость корреляционного интеграла  $C_{m,N}(r)$  от  $r$  имеет степенной вид:  $C_{m,N}(r) \sim r^{D_C}$ , где  $D_C$  – корреляционная размерность временного ряда.

Брок и др. показали, что  $C_{m,N}(r) \Rightarrow [C_{1,N-m}(r)]^m$  с единичной вероятностью при  $N \rightarrow \infty$ , а  $[C_{m,N}(r) - (C_{1,N-m}(r))^m] \cdot \sqrt{N-m+1}$  является случайной асимптотически нормально распределенной величиной с нулевым средним и среднеквадратическим отклонением  $\sigma_{m,N}(r)$ , которое определяется выражением (11):

$$\sigma_{m,N}^2 = 4 \cdot \left( k^m + 2 \sum_{j=1}^{m-1} k^{m-j} \cdot (C_{1,N-m}(r))^{2j} + (m-1)^2 \cdot (C_{1,N-m}(r))^{2m} - m^2 k \cdot (C_{1,N-m}(r))^{2m-2} \right). \quad (11)$$

Здесь

$$k = \frac{1}{(N-1)(N-2)N} \left\{ \sum_{t=1}^N \left[ \sum_{s=1}^N \theta(r - |x_t - x_s|) \right]^2 - 3 \sum_{s=1}^N \sum_{t=s+1}^N \theta(r - |x_t - x_s| + 2N) \right\}. \quad (12)$$

BDS-статистика  $w_{m,N}(r)$  является нормально распределенной случайной величиной при условии, что оценка  $\sigma_{m,N}(r)$  достаточно близка к ее теоретическому значению  $\sigma_{m,N}(r)$ .

В качестве теста на достоверность гипотезы  $H_0$  об отсутствии в наблюдении хаотического процесса принимается выполнение неравенства  $|w_{m,N}(r)| \leq 1,96$  для значения статистики  $w_{m,N}(r)$ , что соответствует уровню значимости  $\alpha = 0,05$  (вероятности ошибки первого рода), тогда с 95 % уверенностью можно принять гипотезу  $H_0$  (I.I.D.).

Критическая область состоит из двух бесконечных полуинтервалов  $(-\infty; 1,96); (1,96; +\infty)$ .

BDS-тест имеет два параметра: размерность вложения  $m$  и параметр масштаба  $d$ , который обычно изменяется от  $0,5\sigma$  до  $2\sigma$ , где  $\sigma$  – среднеквадратичное отклонение исходных данных.

В таблице 8 приведены значения BDS-теста для  $m = 2, 4, 6, 8, 10$  и для  $d$  на уровне стандартного отклонения для доходности индекса РТС.

Таблица 8

Значения BDS-теста

m	2	4	6	8	10
BDS	8,036364	14,59264	15,41818	16,08889	18,52395

Все значения лежат вне интервала  $(-1,96; 1,96)$ , то есть гипотеза случайного блуждания должна быть отвергнута на 5 % уровне значимости.

### 6. Применение BDS-статистики для тестирования доходности индекса РТС на нелинейность

С помощью BDS-теста можно проверить гипотезу о линейности или нелинейности финансового временного ряда, например, доходности индекса РТС.

С этой целью к ряду доходностей применяется линейный фильтр, на выходе которого используются оцененные остатки в модели авторегрессии AR(p), где количество лагов можно оценить или на основе выборочных частных автокорреляционных функций, или по информационному критерию AIC (Akaike).

Рассмотрим последовательность авторегрессионных моделей возрастающего порядка (13):

$$\begin{aligned}
 h_t &= \varphi_{01} + \varphi_{11}h_{t-1} + v_t; \\
 h_t &= \varphi_{20} + \varphi_{21}h_{t-1} + \varphi_{22}h_{t-2} + v_t \\
 h_t &= \varphi_{30} + \varphi_{31}h_{t-1} + \varphi_{32}h_{t-2} + \varphi_{33}h_{t-3} + v_t, \\
 h_t &= \varphi_{40} + \varphi_{41}h_{t-1} + \varphi_{42}h_{t-2} + \varphi_{43}h_{t-3} + \varphi_{44}h_{t-4} + v_t \text{ и т. д.}
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Коэффициенты  $\varphi_{kk}$  называются частными автокорреляционными функциями порядка  $k$ . Частная автокорреляционная функция 1-го порядка  $\varphi_{11}$  показывает, какую часть вносит  $x_{t-1}$  в величину  $x_t$ , соответственно, частная автокорреляционная функция 2-го порядка  $\varphi_{22}$  показывает какую часть вносит  $x_{t-2}$  в величину  $x_t$ , и так далее.

Следовательно, для модели AR(p) частная автокорреляционная функция  $\varphi_{pp}$  должна быть отлична от нуля, иначе порядок модели можно понизить, в то же время частная автокорреляционная функция порядка  $(p + 1)$  должна быть равна нулю, иначе порядок модели можно увеличить. На практике величины частной автокорреляционной функции  $\varphi_{kk}$  неизвестны и определяются, как правило, методом МНК.

В таблице 9 для доходности индекса РТС приведены значения частной автокорреляционной функции в зависимости от величины лага.

Значения частной АКФ в зависимости от номера лага

Номер лага k	1	2	3	4	5
Значение частной АКФ	0,087338	0,003372	-0,04635	0,046631	-0,0074

Как можно видеть, только для лага, равного 1, значение АКФ отлично от нуля, остальные намного меньше.

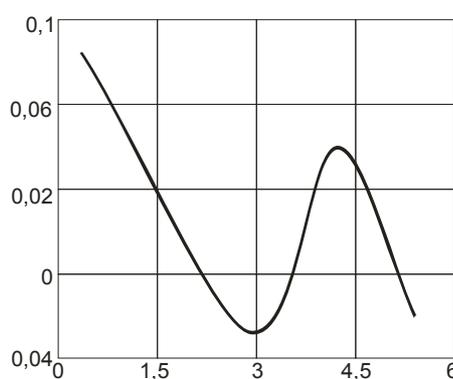


Рис. 2. График зависимости частной автокорреляционной функции для доходности индекса РТС от номера лага

Следовательно, значение параметра  $p$  в модели  $AR(p)$  можно принять равным 1. Оцениваем параметры авторегрессии доходности индекса РТС в среде Excel:

$$h_t = c_0 + c_1 h_{t-1} + v_t$$

Применяя функцию ЛИНЕЙН, получим следующие оценки параметров авторегрессии (14):

$$c_0 = 0,000748 ; c_1 = 0,08733798 ,$$

$$h_t = \underset{(0,000442)}{0,000748} + \underset{(0,01872807)}{0,08733798} \cdot h_{t-1} \quad (14)$$

На рис. 3 приведены остаточные значения доходности индекса РТС после вычитания  $AR(1)$ .

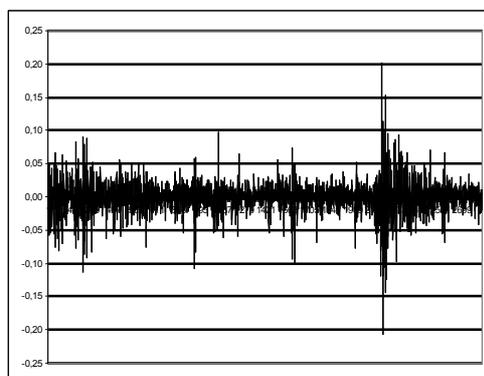


Рис. 3. График  $AR(1)$  остатков доходности индекса РТС –  $v_t$  после применения линейного фильтра

В таблице 10 приведены значения BDS-теста для  $m = 2, 4, 6, 8, 10$  и для  $d$  на уровне стандартного отклонения для AR(1) остатков доходности индекса РТС.

Таблица 10

Значения BDS-теста

m	2	4	6	8	10
BDS	7,846364	14,22264	15,01818	15,73889	18,02395

Как можно видеть, для AR(1) остатков индекса доходности РТС все значения лежат вне интервала  $(-1,96; 1,96)$ , то есть гипотеза линейности должна быть отвергнута на 5 % уровне значимости.

Библиографический список

1. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики: в 2 т. Т. 1. Факты. Модели. М.: ФАЗИС, 1998. 512 с.
2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики: в 2 т. Т. 2. Теория. М.: ФАЗИС, 1998. 544 с.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2 т. Т. 1. М.: Мир, 1984. 528 с.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2 т. Т. 2. М.: Мир, 1984. 738 с.
5. Барышева Е.Н., Никишов В.Н., Сараев А.Л. Методы финансового анализа для исследования одной модели страхования // Вестник Самарского государственного университета. 2011. №9 (90). С. 113–125.
6. Мельников А.В., Попова Н.В., Скорнякова В.С. Математические методы финансового анализа. М.: Анкил, 2006. 400 с.
7. Петерс Э. Хаос и порядок на рынке капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. М.: Мир, 2000. 333 с.
8. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков. Применение теории хаоса в инвестициях и экономике. М.: Интернет-трейдинг, 2004. 304 с.
9. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 336 с.
10. Чураков Е.П. Прогнозирование эконометрических временных рядов. М.: Финансы и статистика. 2008. 206 с.
11. Прохоров А. Нелинейная динамика и теория хаоса в экономической науке // Квантиль. 2008. № 4. С. 79–92.
12. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов // Эк. журнал ВШЭ. 2002. №№ 1, 2, 3, 4. 2003. № 1.
13. Росси Эдуардо. Одномерные GARCH-модели: обзор // Квантиль. 2010. № 8. С. 1–67.
14. Андерсен Т. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976. 757 с.

*E.N. Barysheva, V.N. Nikishov\**

**MODELS OF AN ESTIMATION OF FINANCIAL PARAMETERS IN VIEW OF THEIR STOCHASTICITY AND CHAOTIC CONDITION**

The method of an estimation of presence of chaotic component and nonlinear dependence for the temporal sequence of values of financial indicators are described in this article. The technique is based on the application of the algorithm of Grassberger-Prokachchia, in order to evaluate the dynamic component of BDS – statistics for testing the presence of nonlinear dependence between the components of time series. On the example of the RTS index over the past 11 years, the presence of chaotic component of order at least 11%, the lack of low-dimensional chaos, and the presence of nonlinear communication between the values of the index is defined.

**Key words:** approximation, reinsurance, loss, unprofitability, algorithm of Grassberger-Prokachchia, Takens theorem, profitability.

---

\* *Barysheva Evgeniya Nikolaevna* (barisheva\_zh@hotmail.com), *Nikishov Viktor Nikolaevich* (TSh-sea05@yandex.ru), the Dept. of Mathematics and Business-Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.