

НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕЗОНАНС В КОНТУРЕ С ФРАКТАЛЬНОЙ ЕМКОСТЬЮ

© 2012 В.В. Зайцев, Ар.В. Карлов¹

Предложена модель колебательного контура, содержащего нелинейную фрактальную компоненту емкости. Для вынужденных колебаний под действием внешнего сигнала получено дифференциальное уравнение движения дробного порядка. Приближенное аналитическое решение уравнения движения проведено методами эквивалентной линеаризации и медленно меняющихся амплитуд. Проанализированы амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики дробного осциллятора с кубической нелинейностью.

Ключевые слова: дробная динамика, колебательные системы, медленно меняющиеся амплитуды, нелинейный резонанс.

Введение

В настоящее время формируется новый раздел теории динамических систем — дробная динамика [1] (в англоязычной литературе — фрактальная динамика [2]). Он охватывает исследования систем с интегро-дифференциальными уравнениями движения дробного порядка.

Учитывая роль осцилляторов в классической динамике, есть все основания рассматривать фрактальный осциллятор как базовую модель дробной динамики. В научной периодике можно найти ряд публикаций, посвященных различным вопросам динамики фрактальных осцилляторов. В частности, в монографии [3] приведены аналитические решения задачи Коши для линейных консервативных осцилляторов. Импульсная характеристика осциллятора с дробным затуханием получена в статье [4]. В работе [5] описан алгоритм численного анализа механического осциллятора с демпфирующей силой, пропорциональной дробной производной от смещения. Ряд ссылок на оригинальные работы по динамике линейных фрактальных осцилляторов содержится также в библиографическом списке монографии [1]. Вместе с тем нелинейные колебательные системы с дифференциальными уравнениями дробного порядка пока исследованы в значительно меньшей степени.

В статье [6] предложена модель активного осциллятора (автогенератора) с дробной цепью обратной связи и проанализированы его колебания в автономном

¹Зайцев Валерий Васильевич (zaitsev@ssu.samara.ru), Карлов Артем Владимирович (Ar.Karlov@gmail.com), кафедра радиофизики и компьютерного моделирования радиосистем Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

режиме. Режим синхронизации дробного осциллятора Ван-дер-Поля на основном тоне внешнего гармонического сигнала рассмотрен в работе [7].

Настоящая статья посвящена исследованию резонансных явлений при гармоническом воздействии на дробный пассивный осциллятор с кубической нелинейностью. В динамике систем с нормальными (недробными) связями аналогичный объект представлен осциллятором Дюффинга [8].

1. Модель колебательного контура с фрактальной емкостью

В качестве физической предпосылки для построения математической модели дробного осциллятора используем описанный в [9] "эффект памяти" электрического конденсатора, который проявляется в том, что переменный ток в цепи конденсатора содержит фрактальную составляющую, пропорциональную дробной производной от приложенного к конденсатору напряжения $u(t)$. Возможность появления фрактальной составляющей тока перезарядки электрической емкости подтверждается, например, и результатами работы [10]. Будем считать также, что фрактальная составляющая нелинейно зависит от $u(t)$. В таком случае переменный ток конденсатора можно описать следующим выражением:

$$i_c(t) = C_0 \hat{D}u(t) + C_f \tau_*^{\alpha-1} (1 + \gamma u^2(t)) \hat{D}^\alpha u(t). \quad (1.1)$$

Здесь C_0 и C_f — это линейная и фрактальная компоненты емкости (их отношение в дальнейшем обозначим как $\kappa = C_f/C_0$), $\gamma > 0$ — параметр нелинейности.

Операция дифференцирования по времени в (1.1) представлена оператором \hat{D} . Целая степень оператора соответствует обыкновенной производной целого порядка. Дробную производную \hat{D}^α при $0 < \alpha < 1$ определим как

$$\hat{D}^\alpha u(t) = \frac{d}{dt} I^{1-\alpha} [u(t)], \quad (1.2)$$

где левосторонний интеграл Лиувилля порядка $1 - \alpha$ равен

$$I^{1-\alpha} [u(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau;$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция аргумента x . Выбор производной Лиувилля (1.2) для дробного дифференцирования обусловлен тем, что, предполагая исследование установившихся колебаний и квазигармонических переходных процессов, момент "включения" системы t_0 мы поместили в бесконечность: $t_0 = -\infty$. При необходимости конечность t_0 можно учесть введением в (1.2) функции Хевисайда $\theta(t)$: $u(t) \rightarrow u(t)\theta(t-t_0)$. Отметим также, что временной параметр τ_* введен в правую часть выражения (1.1) для выравнивания размерностей слагаемых.

С учетом выражения (1.1) нетрудно записать полное уравнение движения осциллятора при последовательном включении внешнего воздействия $E_s(t)$ в колебательный контур. Относительно переменного напряжения $u(t)$ оно примет вид

$$\hat{D}^2 u(t) + \frac{\omega_0}{Q} \hat{D}u(t) + \omega_0^2 u(t) = -\frac{\kappa}{\tau_*^{1-\alpha}} \hat{D} (1 + \gamma u^2(t)) \hat{D}^\alpha u(t) + \omega_0^2 E_s(t), \quad (1.3)$$

где ω_0 и Q — собственная частота и добротность колебательного контура без фрактальной компоненты емкости, т. е. при $\kappa = 0$.

Уравнение (1.3) в пределе $\alpha \rightarrow 1$ и квазигармоническом приближении (т. е. при $\hat{D}^2 u(t) \approx -\omega_0^2 u(t)$) эквивалентно известному уравнению Дюффинга [8].

2. Эквивалентная линейаризация дробного осциллятора

Анализ колебаний в осцилляторе (1.3) проведем в приближении метода эквивалентной (гармонической) линейаризации. Метод широко используется при решении прикладных задач теории нелинейных колебаний [11]. Условия его применимости — слабая нелинейность и высокая добротность резонансной системы. Предполагаем, что эти условия для исследуемого осциллятора выполнены.

В рамках процедуры эквивалентной линейаризации уравнения (1.3) в нелинейном слагаемом

$$\hat{F}u(t) = -\frac{\kappa}{\tau_*^{1-\alpha}} \hat{D} (1 + \gamma u^2(t)) \hat{D}^\alpha u(t)$$

при гармоническом сигнале $u(t) = A \cos(\omega_0 t)$ выделим первую гармонику колебаний $(\hat{F}u(t))_1$. При этом учтем, что

$$\hat{D}^\alpha \cos(\omega_0 t) = \omega_0^\alpha \cos\left(\omega_0 t + \alpha \frac{\pi}{2}\right)$$

(см. таблицы интегралов Лиувилля в [12]). Получим выражение

$$\left(\hat{F}A \cos(\omega_0 t)\right)_1 = -2\omega_0^2 \delta\omega(A)u - \frac{\omega_0}{Q_{ex}(A)} \frac{du}{dt}$$

с зависящими от амплитуды колебаний эквивалентными параметрами

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q_{ex}(A)} &= \kappa (\omega_0 \tau_*)^{\alpha-1} \left(1 + \frac{3}{4} \gamma A^2\right) \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right), \\ \delta\omega(A) &= -\frac{1}{2} \kappa (\omega_0 \tau_*)^{\alpha-1} \left(1 + \frac{1}{4} \gamma A^2\right) \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Параметры имеют простую физическую интерпретацию: $Q_{ex}(A)$ и $\delta\omega(A)$ — внешняя добротность и относительная расстройка нормального (недробного) контура из-за фрактальной оставляющей емкости. В дальнейшем параметр $\mu = \kappa (\omega_0 \tau_*)^{\alpha-1}$ считается малым.

Таким образом, в приближении эквивалентной линейаризации уравнение (1.3) заменяется уравнением

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0 \left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_{ex}(A)} \right) \frac{du}{dt} + \omega_0^2 (1 + 2\delta\omega(A)) u = \omega_0^2 E_s(t). \quad (2.2)$$

При внешнем гармоническом воздействии с амплитудой E и частотой ω :

$$E_s(t) = E \cos(\omega t)$$

решение уравнения (2.2) представим в виде

$$u(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi(t)).$$

Амплитуда A и фаза φ принимают постоянные значения в режиме установившихся колебаний и являются медленными функциями времени в переходном режиме.

3. Частотные характеристики осциллятора

В режиме установившихся колебаний дифференциальное уравнение движения (2.2) сводится к системе двух алгебраических уравнений для амплитуды и фазы колебаний:

$$\left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_{ex}(A)} \right) A = -E \sin \varphi, \quad 2(\delta\omega(A) - \xi) A = E \cos \varphi, \quad (3.1)$$

в записи которых использована относительная отстройка частоты внешнего сигнала от относительно собственной частоты нормального контура: $\xi = (\omega - \omega_0)/\omega_0$.

После исключения фазы φ система уравнений (3.1) дает амплитудное уравнение вида

$$\left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_{ex}(A)}\right)^2 A^2 + 4(\delta\omega(A) - \xi)^2 A^2 = E^2$$

или с учетом (2.1) вида

$$\left(\frac{1}{Q} + \mu\left(1 + \frac{3}{4}\gamma A^2\right)\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 A^2 + \left(\mu\left(1 + \frac{1}{4}\gamma A^2\right)\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) + 2\xi\right)^2 A^2 = E^2. \quad (3.2)$$

Это уравнение является кубическим относительно квадрата амплитуды, поэтому в зависимости от отстройки ξ оно имеет либо один, либо три вещественных корня.

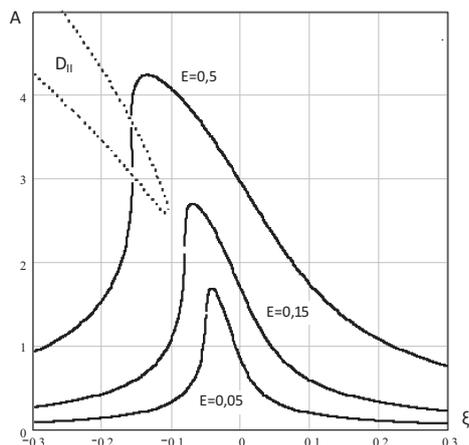


Рис. 1. Нелинейные АЧХ контура

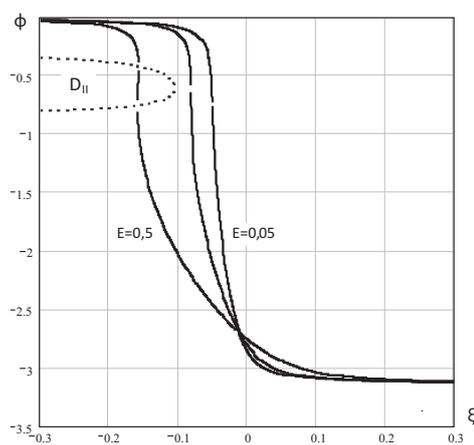


Рис. 2. Нелинейные ФЧХ контура

На рис. 1 приведены графики амплитудно-частотных характеристик синхронизированных колебаний, построенные по результатам решения уравнения (3.2) для системы с параметрами $\alpha = 0,9$, $Q = 30$ и $\mu = 0,05$. Амплитуды сигналов нормированы на величину $A_* = 1/\sqrt{\gamma}$. При амплитуде внешнего сигнала $E = 0,5$ график АЧХ асимметричен и имеет неустойчивую ветвь, расположенную в области D_{II} , граница которой показана пунктирной линией. Форма границы определяется из решения задачи об устойчивости колебаний (см. ниже). Наличие неустойчивой ветви приводит к появлению скачков амплитуды, сопровождающихся плавным повышением и понижением частоты внешнего сигнала. Наблюдается гистерезис значений амплитуды вынужденных колебаний. При амплитудах внешнего сигнала $E = 0,15$ и $E = 0,05$ скачки амплитуды колебаний и гистерезис отсутствуют, сохраняется лишь асимметрия АЧХ. Фазочастотные характеристики, соответствующие АЧХ рис. 1, приведены на рис. 2. График ФЧХ при $E = 0,5$ имеет неустойчивую ветвь, попадающую в область D_{II} .

При уменьшении величины дробного показателя α гистерезис АЧХ и ФЧХ исчезает при любых амплитудах внешнего воздействия. Сохраняется лишь асимметрия характеристик.

Общий вывод о форме нелинейных частотных характеристик колебательного контура с фрактальной емкостью состоит в том, что они сочетают в себе признаки

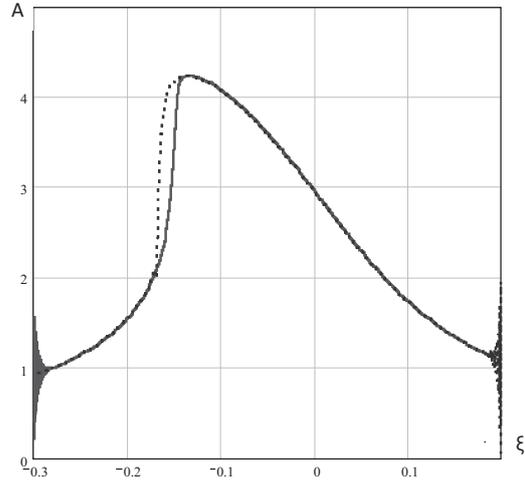


Рис. 3. Динамическая АЧХ контура

нелинейного резонанса реактивного и диссипативного типов. Преобладание того или иного типа резонанса определяется величиной дробного показателя α .

4. Укороченные уравнения дробного осциллятора

В процессе установления колебаний амплитуда A и фаза φ считаются медленными функциями времени, и для них с помощью метода медленно меняющихся амплитуд записывается система укороченных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_0} \frac{dA}{dt} &= -\frac{A}{2} \left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_{ex}(A)} \right) - \frac{E}{2} \sin \varphi, \\ \frac{1}{\omega_0} \frac{d\varphi}{dt} &= -\xi + \delta(A) - \frac{E}{2A} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (4.1)$$

С учетом явного вида (2.1) эквивалентных параметров дробного осциллятора система (4.1) преобразуется к форме

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_0} \frac{dA}{dt} &= -\frac{A}{2} \left(\frac{1}{Q} + \mu \left(1 + \frac{3}{4} \gamma A^2 \right) \cos \left(\alpha \frac{\pi}{2} \right) \right) - \frac{E}{2} \sin \varphi, \\ \frac{1}{\omega_0} \frac{d\varphi}{dt} &= -\xi - \frac{\mu}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \gamma A^2 \right) \sin \left(\alpha \frac{\pi}{2} \right) - \frac{E}{2A} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Укороченные уравнения интегрируются численно. Как пример численных результатов на рис. 3 приведен график динамической АЧХ, полученной при квазистатическом повышении (сплошная линия) и понижении (пунктирная линия) частоты $\xi(t)$ внешнего сигнала с амплитудой $E = 0,5$. Этот график полностью согласуется с соответствующим графиком на рис. 1. Осцилляции на начальных участках прямой и обратной ветвей АЧХ обусловлены процессами установления колебаний.

Уравнения (4.2) позволяют также исследовать устойчивость вынужденных колебаний с амплитудами и фазами, определяемыми решениями уравнений (3.1). Для этого следует положить

$$A(t) = A_0 + a(t), \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \phi(t),$$

где нулевыми индексами обозначены стационарные величины, и линеаризовать уравнения (4.2) относительно малых вариаций $a(t)$ и $\phi(t)$. Результатом линеаризации является система

$$\frac{1}{\omega_0} \frac{da}{dt} = p_{11}a + p_{12}\phi, \quad \frac{1}{\omega_0} \frac{d\phi}{dt} = p_{21}a + p_{22}\phi \quad (4.3)$$

с зависящими от амплитуды A_0 коэффициентами

$$\begin{aligned} p_{11}(A_0) &= -\frac{1}{2Q} + \frac{\mu}{2} \left(1 + \frac{9}{4}\gamma A_0^2\right) \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right), \\ p_{12}(\xi, A_0) &= \xi A_0 + \frac{\mu}{2} \left(1 + \frac{1}{4}\gamma A_0^2\right) A_0 \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right), \\ p_{21}(\xi, A_0) &= -\frac{\xi}{A_0} - \frac{\mu}{2A_0} \left(1 + \frac{3}{4}\gamma A_0^2\right) \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right), \\ p_{22}(A_0) &= -\frac{1}{2Q} - \frac{\mu}{2} \left(1 + \frac{3}{4}\gamma A_0^2\right) \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Необходимым и достаточным условием релаксации вариаций $a(t)$ и $\phi(t)$ к нулевым значениям (условием устойчивости A_0 и φ_0) является выполнение неравенств

$$D_I(A_0) = p_{11}(A_0) + p_{22}(A_0) < 0,$$

$$D_{II}(\xi, A_0) = p_{12}(\xi, A_0)p_{21}(\xi, A_0) - p_{11}(A_0)p_{22}(A_0) \leq 0. \quad (4.5)$$

Первое из них выполняется при любой амплитуде A_0 . Равенство в (4.5) соответствует границе области устойчивости. На рис. 1 и рис. 2 она показана пунктирной линией.

Заключение

Результаты проведенного анализа позволяют сделать вывод о том, что резонансные явления в колебательном контуре с нелинейной фрактальной емкостью имеют признаки нелинейных резонансов как реактивного, так и диссипативного типов. Первый из них проявляется в асимметрии и гистерезисе амплитудно-частотных характеристик, второй – в уширении резонансных линий. Преобладание того или иного типа резонанса определяется величиной дробного показателя.

Литература

- [1] Тарасов В.Е. Модели теоретической физики с интегродифференцированием дробного порядка. М.; Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. 568 с.
- [2] Zaslavsky G.M. Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics. Oxford: Oxford University Press, 2005.
- [3] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
- [4] Schafer I., Kempfle S. Impulse Responses of Fractional Damped Systems // Nonlinear Dynamics. 2004. V. 38. P. 61–68. URL: <http://www.springerlink.com/content/q180440301740421/fulltext.pdf>.
- [5] Yuan L., Agrawal O.P. A Numerical Scheme for Dynamic Systems Containing Fractional Derivatives // Proc. of ASME Design Engineering Technical Conferences. Atlanta, 1998. URL: http://me.engr.siu.edu/MEEP_old/faculty/agrawal/mech5857.pdf.
- [6] Зайцев В.В., Карлов А.В., Яровой Г.П. Динамика автоколебаний дробного томсоновского осциллятора // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2012. Т. 15. № 1.

- [7] Зайцев В.В., Карлов А.В., Стулов И.В. Синхронизация дробного осциллятора Ван-дер-Поля // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2012. № 3/1(94). С. 116–122.
- [8] Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 432 с.
- [9] Westerlund S. Dead matter has memory // Physica Scripta. 1991. V 43. № 2. P. 174–179.
- [10] Дробно-дифференциальные уравнения для диэлектрической среды с частотным откликом Гавриляка — Негами / Р.Т. Сибатов [и др.] // Нелинейный мир. 2011. Т. 9. № 5. С. 394–400.
- [11] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 4-е изд. М.: Наука, 1974. 504 с.
- [12] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

Поступила в редакцию 4/IV/2012;
в окончательном варианте — 4/IV/2012.

NONLINEAR RESONANCE IN OSCILLATORY CIRCUIT WITH FRACTAL CAPACITY

© 2012 V.V. Zaitsev, Ar.V. Karlov²

A model of oscillation circuit containing a nonlinear fractal component of capacity is proposed. The differential equation of motion of fractional order for forced oscillations under the action of an external signal is obtained. An approximate analytical solution of the equation of motion is conducted by methods of equivalent linearization and slowly varying amplitudes. The amplitude-frequency and phase response of fractional oscillator with cubic nonlinearity are analyzed.

Key words: fractional dynamics, oscillating systems, slowly varying amplitudes, nonlinear resonance.

Paper received 4/IV/2012.
Paper accepted 4/IV/2012.

²Zaitsev Valeriy Vasilievich (zaitsev@ssu.samara.ru), Karlov Artem Vladimirovich (Ar.Karlov@gmail.com), the Dept. of Radiophysics and Computer Modelling of Radiotechnical Systems, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.