

УДК 519.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ВЗРАЩИВАНИЯ БИОЛОГИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ

© 2012 В.Н. Разжевайкин¹ А.Т. Юсуфов²

Изучаются вопросы оптимального управления процессом организации взращивания биологической культуры в условиях двухрежимного культивирования. Указываются способы принятия оптимальных решений в отношении перемещения продукции, производимой в условиях одного из режимов, в условия второго, основанные на оценках наблюдаемых переменных.

Ключевые слова: математическое моделирование, оптимальное управление, биологическая популяция, принцип максимума Понтрягина.

Введение

В работе [1] была исследована задача об оптимальной эксплуатации биологической популяции с учетом возможного отделения ее продукции (ювенильная составляющая) от основной (взрослой) составляющей. Было установлено, в частности, что для оптимизируемого функционала интегрального типа в условиях достаточно большого запаса времени решение задачи нелинейной оптимизации строится на основе комбинации траекторий, проходящих через стационарную точку на расширенной фазовой плоскости "переменная–импульс". При этом избыток времени расходуется на пребывание в этой точке, что достигается выбором подходящего значения параметра управления из интервала допустимых значений.

Наличие решений такого типа является особенностью именно нелинейных задач оптимального управления, что сильно затрудняет их исследование посредством стандартизованных алгоритмов, основанных на применении принципа максимума Понтрягина. Это относится не только к стационарным точкам (для них, как показано в [1], ситуация сравнительно простая — надо лишь исследовать проходящие через них траектории), но и к многообразиям ненулевой размерности в расширенном фазовом пространстве.

Такое многообразие обычно задается условием вырождения функции Понтрягина по какому-либо управлению, что исключает возможность вычисления последнего из условия принципа максимума. Необходимость в подобном вычислении возникает в случае возможной задержки траектории на этом многообразии, так что

¹Разжевайкин Валерий Николаевич (razz@mail.ru), Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Вавилова, 40.

²Юсуфов Али Тураевич (aliysufov@mail.ru), кафедра вычислительной техники Оренбургского государственного университета, 460018, Российская Федерация, г. Оренбург, пр. Победы, 13.

значение управления может быть найдено только из условия локальной инвариантности последнего. При этом динамика траекторий, остающихся на многообразии, принципиально отличается от их динамики вне его, что является существенным с точки зрения алгоритмизации решения задачи оптимального управления.

Таким образом, вопрос о переключениях между двумя видами динамики в окрестности многообразия вырождения: динамикой вне многообразия, где управление, по которому наблюдается вырождение, может принимать только крайние значения из области допустимых значений, и динамикой на многообразии с однозначно определяемым внутренним значением управления, — находится за пределами возможностей локального анализа расширенной динамической системы и требует привлечения глобальной информации, т. е. сведений о структуре этого многообразия совокупно с краевыми условиями.

Возникающая при таком подходе геометрическая картина может оказаться чрезвычайно сложной, что неминуемо приведет к необходимости реального осмысления качественной структуры отыскиваемых оптимальных траекторий уже на предварительном этапе исследования, т. е. до перехода к его алгоритмизации. В настоящей работе на примере модельной задачи о возвращении биологической культуры показывается, где и когда могут встретиться упомянутые трудности, при каких условиях их можно избежать и как при этом можно довести решение задачи до конца с учетом построения возможных численных алгоритмов. Применение последних достаточно подробно иллюстрируется для отдельных конкретных случаев.

1. Постановка задачи

Предположим, что рассматриваемая биологическая популяция в каждый момент времени характеризуется следующим набором параметров, относящимся в зависимости от значения $i = 1, 2$ к начальной (для $i = 1$) и конечной (для $i = 2$) формам культивирования:

K_i — биомасса популяции, содержащаяся в каждой из форм;
 R_i — количество доступного ресурса, играющего
 существенную роль в воспроизводстве популяции,
 задействованного в i -й форме;
 $F_i(K_i, R_i)$ — репродуктивная функция популяции в i -й форме.

Предполагается, что ресурс является полностью подвижным между двумя формами, т. е. $R_i \sim K_i$, так что

$$R_i = \frac{RK_i}{K}, \quad i = 1, 2; \quad R = R_1 + R_2; \quad K = K_1 + K_2. \quad (1.1)$$

Заметим, что соотношения (1.1) предполагают равенство долей биомассы популяции, приходящихся на единицу ресурса $\frac{K_i}{R_i} = \frac{K}{R} = k$ для обеих форм.

Кроме того, будем считать, что общее количество ресурса подвержено экспоненциальной динамике с мальтузианским показателем g :

$$\frac{\partial_t R}{R} = g = \text{const}. \quad (1.2)$$

Коэффициенты смертности для каждой из форм считаются равными m_i , $i = 1, 2$.

Функции воспроизводства для каждой из форм предполагаются достаточно (по крайней мере второго порядка) гладкими, положительными и линейно однородными:

$$F_i(K_i, R_i) > 0; \quad K_i, R_i > 0, \quad (1.3)$$

$$F_i(aK_i, aR_i) = aF_i(K_i, R_i), \quad a > 0, \quad (1.4)$$

причем

$$F_i(0, R_i) \equiv 0 \equiv F_i(K_i, 0), \quad (1.5)$$

и монотонно возрастающими по обоим аргументам:

$$\partial_{K_i} F_i(K_i, R_i) > 0, \quad (1.6)$$

$$\partial_{R_i} F_i(K_i, R_i) > 0. \quad (1.7)$$

В модели также постулируется возможность управления биомассами популяции в обеих формах, заключающейся в переводе части (равной $u(t) \in [0, 1]$) продукции популяции, получаемой в первой форме, в биомассу второй. В терминологии [1] это означает возможность мягкого, т. е. не затрагивающего основной биомассы, перевода продукции. При этом эффективность перевода не обязательно стопроцентна (коэффициент эффективности $\alpha = 1 - \varepsilon \in (0, 1]$).

Динамика биомассы в обеих формах описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \partial_t K_1 = F_1(K_1, R_1)(1 - u(t)) - m_1 K_1, \\ \partial_t K_2 = F_2(K_2, R_2) + \alpha u(t) F_1(K_1, R_1) - m_2 K_2. \end{cases} \quad (1.8)$$

Система (1.8), (1.1), (1.2) дополняется начальными условиями

$$K_1(0) = K_1^0 > 0, \quad K_2(0) = K_2^0 \geq 0, \quad R(0) = R^0 > 0 \quad (1.9)$$

и целевой функцией

$$J = K_2(T) \rightarrow \max, \quad (1.10)$$

где $[0, T]$, $T > 0$ — интервал планирования, отводящийся на решение задачи культивирования.

Заметим, что выбор целевой функции в виде (1.10) является весьма произвольным и может быть оправдан исключительно в условиях жесткого прогнозирования перспектив развития и/или наличия внешних факторов, определяющих целесообразность преимущественного увеличения биомассы во второй форме именно к заданному моменту времени T .

Поставленную задачу удобно изучать относительно переменных $k_i = \frac{K_i}{R} > 0$, так что $k_1 + k_2 = k$. Поскольку k характеризует общую долю биомассы популяции, приходящуюся на единицу ресурса в каждой из форм, то k_i представляет собой долевую биомассу, соответствующую i -й форме, приведенную к общему количеству ресурса.

Обозначим $\tilde{f}_i(k) = F_i(k, 1) = \frac{F_i(K_i, R_i)}{R_i}$, так что $F_i(K_i, R_i) = R k_i f_i(k)$,

где $f_i(k) = \frac{\tilde{f}_i(k)}{k}$, причем гладкость построенных функций в области $k > 0$ совпадает с гладкостью функций F_i .

Условия (1.3) – (1.7) интерпретируются в терминах функций $f_i(k)$ следующим образом:

$$f_i(k) > 0, \quad k > 0$$

(следует из (1.3)),

$$kf_i(k) = \tilde{f}_i(k) \rightarrow +0, \quad k \rightarrow +0 \quad (1.11)$$

(это — первое равенство в (1.5)),

$$f_i(k) \rightarrow +0, \quad k \rightarrow +\infty$$

(второе равенство в (1.5)),

$$\partial_k(kf_i(k)) = \tilde{f}'_i(k) > 0$$

(неравенство (1.6)),

$$f'_i(k) < 0 \quad (1.12)$$

(следует из (1.7) с учетом (1.4), ибо $\partial_{R_i} F_i(K_i, R_i) =$

$$= \tilde{f}_i(k) - k\tilde{f}'_i(k) > 0, \quad (1.13)$$

так что $\partial_k \left(\frac{\tilde{f}_i(k)}{k} \right) = \frac{k\tilde{f}'_i(k) - \tilde{f}_i(k)}{k^2} < 0$).

Заметим, что для получения неравенства (1.13) вместо (1.7) можно было бы использовать неравенство

$$\tilde{f}''_i(k) < 0$$

(интегрирование $k\tilde{f}''_i(k) < 0$ на $[0, k]$ по частям с учетом (1.11)), которое выполняется в предположении выпуклости $F_i(K_i, R_i)$ по первому аргументу.

В терминах k_i поставленная задача имеет следующий вид: найти управляющую функцию $u(t)$ со значениями на отрезке $[0, 1]$, доставляющую оптимум функции

$$J = k_2(T) \rightarrow \max, \quad (1.14)$$

где $k_1 = k_1(t)$ и $k_2 = k_2(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \partial_t k_1 = k_1 f_1(k)(1 - u(t)) - (m_1 + g)k_1, \\ \partial_t k_2 = k_2 f_2(k) + \alpha u(t)k_1 f_1(k) - (m_2 + g)k_2 \end{cases} \quad (1.15)$$

с $k = k_1 + k_2$ и начальными условиями

$$k_i(0) = k_i^0, \quad i = 1, 2, \quad (1.16)$$

где $k_i^0 = \frac{K_i^0}{R^0}$ из (1.9).

2. Применение принципа максимума

Система (1.14)–(1.16) представляет собой задачу оптимального управления со свободным концом [2]. Функция Понтрягина для нее имеет вид

$$H(\mathbf{k}, \psi, u) = k_1 f_1(k)(\alpha \psi_2 - \psi_1)u + \psi_1 k_1 f_1^m(k) + \psi_2 k_2 f_2^m(k), \quad (2.1)$$

где $\mathbf{v} = (v_1, v_2)'$, $f_i^m(k) = f_i(k) - (m_i + g)$, $k = k_1 + k_2$.

Из (2.1) получаем систему уравнений для импульсов $\partial_t \psi = -\nabla_{\mathbf{k}} H$ вида

$$\begin{cases} \partial_t \psi_1 = -\psi_1[(1 - u)\hat{f}_1 - (m_1 + g)] - \psi_2(k_2 f'_2 + \alpha u \hat{f}_1), \\ \partial_t \psi_2 = -\psi_1 k_1(1 - u) f'_1 - \psi_2(\hat{f}_2 - (m_2 + g) + \alpha u k_1 f'_1), \end{cases} \quad (2.2)$$

где $\hat{f}_i = \hat{f}_i(\mathbf{k}) = f_i(k) + k_i f'_i(k)$.

Граничные условия на правом конце, соответствующие критерию оптимальности (1.14), имеют вид

$$\psi_1(T) = 0, \quad \psi_2(T) = \text{const} > 0. \quad (2.3)$$

Из (1.9), (1.15), (1.16) следует, что для любого $t \in [0, T]$ имеет место $k_1(t)f_1(k(t)) > 0$, так что условие переключения оптимального управления, определяющееся из принципа максимума для функции H в (2.1), задается условием изменения знака величины

$$\Delta = \Delta(\psi) = \psi_1 - \alpha\psi_2, \quad (2.4)$$

так что

$$\begin{cases} \Delta > 0 \iff u \equiv 0, \\ \Delta < 0 \iff u \equiv 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Далее будем называть оптимальными решения, соответствующие выбору оптимального управления.

Теорема 1. В условиях (1.12) замкнутый отрицательный квадрант $\Psi_- = \{\psi_1 \leq 0, \psi_2 \leq 0\}$ на плоскости импульсов $\{(\psi_1, \psi_2)\}$ является недостижимым для оптимальных решений системы (2.2).

Доказательство. В силу (2.4), (2.5) $(\psi_1 = 0) \& (\psi_2 < 0) \Rightarrow (u = 0)$, так что в силу (2.2) $\partial_t \psi_1 = -\psi_2 k_2 f_2' \leq 0$. Аналогично $(\psi_1 < 0) \& (\psi_2 = 0) \Rightarrow (u = 1)$, откуда $\partial_t \psi_2 = 0$ и $(\psi_1 = \psi_2 = 0) \Rightarrow (\partial_t \psi_1 = \partial_t \psi_2 = 0)$. Таким образом, на границе $\partial\Psi_-$ области Ψ_- оптимальные траектории системы (2.2) либо остаются (в силу единственности решения) на $\partial\Psi_-$, либо переходят вовнутрь области Ψ_- , т. е. не могут выходить из нее. Это означает, что область Ψ_- является положительно инвариантной относительно оптимальных решений системы (2.2), что исключает возможность достижения из нее с ростом времени точки (2.3).

Следствие 1. Оптимальные траектории системы (2.2), (2.3) могут пересекать прямую переключений $\Delta = 0$ плоскости $\{(\psi_1, \psi_2)\}$ только в точках с $\psi_1 > 0$.

Доказательство. Точки этой прямой с $\psi_1 \leq 0$ лежат в Ψ_- .

Полученный результат означает, что допустимое множество переключений $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^4 = \{(\mathbf{k}, \psi)\}$ является пересечением положительного конуса $\mathbf{R}_+^4 = \{k_1 > 0, k_2 \geq 0, \psi_1 > 0, \psi_2 > 0\}$ с гиперплоскостью $\Delta = 0$. Выделим теперь на этом множестве те участки, на которых оптимальные траектории могут касаться этого множества.

$$\begin{aligned} \text{Обозначим } D(\mathbf{v}) = D(\mathbf{v})(k) &= v_2(k) - v_1(k), \quad \mathbf{v}^1 \cdot \dots \cdot \mathbf{v}^n = \sum_{i=1}^2 v_i^1 \dots v_i^n, \quad \mathbf{1}_\varepsilon = \\ &= (1, \alpha^{-1})', \quad G(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n) = G(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n)(\mathbf{k}) = \mathbf{1}_\varepsilon \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}^1 \cdot \dots \cdot \mathbf{v}^n, \\ S(\mathbf{k}) &= D(\mathbf{f}^m)(k) - \varepsilon G(\mathbf{f}')(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Теорема 2. В области \mathbf{D}

$$\partial_t \Delta = \psi_1 S(\mathbf{k}). \quad (2.7)$$

Доказательство. Функция (2.1) имеет вид

$$H = ua(\mathbf{k})\Delta(\psi) + b(\mathbf{k}, \psi), \quad (2.8)$$

где $a(\mathbf{k}) = -k_1 f_1(k)$, $b(\mathbf{k}, \psi) = \psi \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{f}^m$, так что $\partial_t \Delta = \nabla_\psi \Delta \cdot \partial_t \psi = -\nabla_\psi \Delta \cdot \nabla_{\mathbf{k}} H = -\nabla_\psi \Delta \cdot (u \Delta \nabla_{\mathbf{k}} a + \nabla_{\mathbf{k}} b) \stackrel{\Delta \equiv 0}{=} -\nabla_\psi \Delta \cdot \nabla_{\mathbf{k}} b$, где $\nabla_\psi \Delta = (1, -\alpha)'$, $(\nabla_{\mathbf{k}} b)_i = \psi_i f_i^m + \psi \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{f}'$, откуда с учетом $\psi_2 = \alpha^{-1} \psi_1$ получаем

$$\partial_t \Delta = \psi_1 (f_2^m - f_1^m - (1 - \alpha)(k_1 f_1' + \alpha^{-1} k_2 f_2')).$$

Следствие 2. В области $\{(k_1, k_2) : S(k_1, k_2) > 0 (< 0)\}$ возможны переключения $u(t)$ только вида $1 \rightarrow 0$ (соответственно $0 \rightarrow 1$).

Доказательство. В условиях переключения $\psi_1 > 0$ (следствие теоремы 1), так что в силу (2.7) $\text{sign } S = \text{sign}(\partial_t \Delta)$, а знак $\partial_t \Delta$ определяет направление перехода Δ из области отрицательных значений в область положительных или наоборот, значения оптимальных управлений в которых определяются в соответствии с (2.5).

Полученный результат означает, в частности, что в зоне знакопостоянства функции $S(k_1, k_2)$ оптимальная траектория может иметь не более одного переключения управляющего параметра, способного принимать только два крайних значения 0 и 1.

Альтернативная ситуация, в которой могли бы появляться промежуточные, т. е. из интервала $(0, 1)$, значения оптимального управления, возможна с учетом (2.5) только в случае возникновения скольжения оптимальной траектории системы (1.15), (2.2) вдоль множества $\mathbf{D} \cap (\partial_t \Delta = 0)$. Под этим скольжением мы понимаем существование таких значений t_a и t_b , что $0 \leq t_a < t_b < T$ и для любых $t \in (t_a, t_b)$ на оптимальной траектории одновременно выполнены условия

$$\psi_1(t) = \alpha \psi_2(t), \quad (2.9)$$

$$S(k_1(t), k_2(t)) = 0. \quad (2.10)$$

Независимость условия (2.10) от ψ означает, в частности, его тождественность по $t \in (t_a, t_b)$. Если обозначить $N_S = \{\mathbf{k} \in \mathbf{R}_+^2 : S(\mathbf{k}) = 0\}$, то такая тождественность означает скольжение проекции оптимальной траектории на плоскости $\mathbf{R}^2 = \{\mathbf{k}\} = \{(k_1, k_2)\}$ вдоль кривой N_S . Из (2.10) с необходимостью (его дифференцированием по t с учетом (2.6)) следует равенство нулю выражения:

$$\partial_t S = \partial_t^0 k(D(\mathbf{f}') - \varepsilon G(\mathbf{f}'')) - \varepsilon G(\mathbf{f}^m, \mathbf{f}') - u \varepsilon k_1 f_1 (2D(\mathbf{f}') - \varepsilon G(\mathbf{f}'')), \quad (2.11)$$

где ∂_t^u обозначает производную, взятую в силу системы (1.15) при фиксированном указанном значении параметра $u \in [0, 1]$.

Равенство (2.11) следует из соотношения

$$\partial_t S = \partial_t^u S = \partial_t^u k [D(\mathbf{f}') - \varepsilon G(\mathbf{f}'')] - \varepsilon \mathbf{1}_\varepsilon \cdot \partial_t \mathbf{k} \cdot \mathbf{f}', \quad (2.12)$$

в котором $\partial_t^u k = \partial_t^0 k - \varepsilon u k_1 f_1$, а $\partial_t \mathbf{k}$ определено в силу (1.15), так что $\mathbf{1}_\varepsilon \cdot \partial_t \mathbf{k} \cdot \mathbf{f}' = k_1 f_1^m f_1' + \alpha^{-1} k_2 f_2^m f_2' - u k_1 f_1 f_1' + k_1 f_1 f_2' = G(\mathbf{f}^m, \mathbf{f}') + u k_1 f_1 D(\mathbf{f}')$.

3. Свойства фазовых траекторий

В отсутствие скольжения управляющий параметр u может принимать только два крайних значения 0 и 1, причем области, в которых возможны переключения между ними в одну или в другую сторону, однозначно определяются на плоскости (k_1, k_2) значениями функции (2.6) и разделены компонентами кривой N_S . Все это означает, что фазовая структура системы (1.15) для $u = 0$ и для $u = 1$, соотнесенная с расположением кривой N_S , может дать практически исчерпывающую информацию о характере оптимальных решений исходной задачи. Траектории таких решений в области $\mathbf{R}_+^2 = \{k_1 > 0, k_2 \geq 0\}$ состоят из участков, лежащих на интегральных кривых поля направлений системы (1.15) для $u = 0$ или $u = 1$, причем переключения между участками соответствуют переключениям между значениями управления.

Предположим, что существуют положительные корни $k^{(i)}$ уравнений

$$f_i^m(k^{(i)}) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.1)$$

В силу (1.12) уравнения (3.1) могут иметь не более чем по одному решению. Заметим, что случай отсутствия корней с точки зрения последующих рассмотрений не сложнее, хотя и требует отдельного описания, которое может быть мотивировано наличием соответствующих конкретных постановок.

В случае общего положения (а только такой случай мы здесь и рассматриваем)

$$k^{(1)} \neq k^{(2)}. \quad (3.2)$$

При $u = 0$ фазовые портреты системы (1.15) при

$$k^{(1)} < k^{(2)} \quad (3.3)$$

и при $k^{(1)} > k^{(2)}$ совпадают с точностью до перенумерации переменных.

При $u = 1$ качественная структура траекторий этой системы не зависит от соотношения этих корней. Поэтому мы ограничимся рассмотрением только двух фазовых портретов: для $u = 0$ при условии (3.3) и для $u = 1$.

Обратим внимание на биологическую интерпретацию условия (3.3).

Значения $k^{(i)}$, $i = 1, 2$, равны равновесным значениям приходящейся на единицу ресурса численности биомассы в i -й форме при условии ее изолированного функционирования. Соотношение (3.3) означает ввиду (1.12) бóльшую конкурентную приспособленность популяции во второй форме: при стационарных значениях в первой и малых во второй в последней популяция будет развиваться (ибо ее экспоненциальный показатель роста в окрестности нуля равен $f_2^m(k^{(1)}) > f_2^m(k^{(2)}) = 0$), в то время как при стационарных значениях во второй в первой она закрепиться не может (показатель в этом случае равен $f_1^m(k^{(2)}) < f_1^m(k^{(1)}) = 0$).

Условие (3.3) из трех положений равновесия системы (1.15) при $u = 0$, равных $(0, 0)$, $(k^{(1)}, 0)$, $(0, k^{(2)})$, выделяет как устойчивое только одно последнее. Поэтому переброску биомассы в направлении той формы функционирования, которая с течением времени должна установиться и сама по себе, следует ассоциировать с целенаправленным движением по течению: активные действия лишь ускоряют естественный процесс. В случае выполнения неравенства, противоположного (3.3), такие действия, наоборот, препятствуют механизму естественного отбора, направляющему систему к устойчивому равновесию $(k^{(1)}, 0)$, и могут быть оправданы лишь в случае осознанной ценности именно второй формы функционирования, как, например, в случае ее интерпретации в качестве общественно значимой, хотя и малопродуктивной.

В случае $u = 1$ единственным устойчивым положением равновесия системы (1.15) является $(0, k^{(2)})$.

Фазовый портрет системы (1.15) для обоих случаев приведен на рис. 1. При этом в случае $u = 0$ предполагается выполнение соотношения (3.3). Нуль-изоклины N_i^0 для $\partial_t^0 k_i = 0$, $i = 1, 2$, совпадают с отрезками прямых $N_1^0 : k_1 + k_2 = k^{(1)}$; $N_2^0 : k_1 + k_2 = k^{(2)}$. Нуль-изоклина N_k^0 для $\partial_t^0 k = 0$ соединяет точки $(0, k^{(2)})$ и $(k^{(1)}, 0)$ и проходит внутри полосы $\Pi(k^{(1)}, k^{(2)})$, где $\Pi(a, b) = \{k_1 \geq 0, k_2 \geq 0 : a \leq k_1 + k_2 \leq b\}$.

На границах этой полосы, т. е. при $k = k^{(i)}$, $i = 1, 2$, траектории системы направлены вовнутрь нее (заметим, что здесь условие (3.3) может быть уже ослаблено до условия общего положения (3.2)).

Действительно, знак выражения $\partial_t^0 k = k_1 f_1^m(k) + k_2 f_2^m(k)$ не зависит от конкретных значений $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ при $k = k_1 + k_2 = k^{(i)}$, причем если обозначить

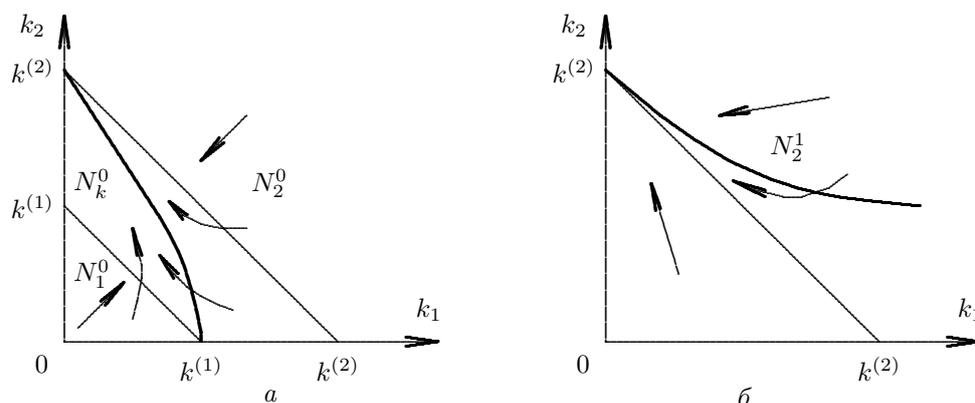


Рис. 1. Фазовый портрет системы (1.15): a — при $u = 0$; b — при $u = 1$

$k_+ = \max\{k^{(1)}, k^{(2)}\}$, $k_- = \min\{k^{(1)}, k^{(2)}\}$, то в силу (1.12) правая часть этого выражения будет отрицательна при $k \geq k_+$ и положительна при $k \leq k_-$.

Итак, доказана

Теорема 3. Полоса $\Pi(k_-, k_+)$ является притягивающим множеством для траекторий системы (1.15) при $u = 0$.

Попадая в эту полосу, траектории системы (1.15) уже внутри нее движутся по направлению к устойчивому положению равновесия: к $(0, k^{(2)})$ при выполнении неравенства (3.3) и к $(k^{(1)}, 0)$ — в случае выполнения противоположного неравенства.

В случае $u = 1$ нуль-изоклина N_2^1 для $\partial_t^1 k_2 = 0$ располагается выше прямой $k_1 + k_2 = k^{(2)}$, совпадая с ней только в точке $(0, k^{(2)})$, и везде имеет горизонтальный наклон, больший -1 . Действительно, полагая $c = k_1/k_2$ и параметризуя N_2^1 как $k(c)$, находим из $0 = \partial_t^1 k_2/k_2 = f_2^m + \alpha c f_1$ дифференцированием по c неравенство $\partial_c k = -\alpha f_1 / (f_2^m + \alpha c f_1) > 0$ в силу (1.12).

Положение равновесия $(0, k^{(2)})$ является глобальным аттрактором системы (1.15) при $u = 1$, ибо k_1 экспоненциально (с показателем $-(m_1 + g) < 0$) убывает, а $\partial_t^1 k_2 \approx \partial_t^0 k$ при малых k_1 .

Что касается положения кривой N_S , то в общем случае ее локализация представляется достаточно затруднительной. Эта задача полностью решается в частном случае $\varepsilon = 0$ (см. следующий параграф) и приближенно для малых $\varepsilon > 0$. Для этих же случаев будут указаны достаточные условия отсутствия на кривой N_S скольжения (см. (2.10) с учетом (2.11)).

4. Случай безубыточного перемещения

В этом параграфе рассмотрен случай $\varepsilon = 1 - \alpha = 0$. С биологической точки зрения это означает, что продукция популяции, изымаемая из первой формы функционирования, дает в дотируемой ею второй форме такой же прирост биомассы, какой давала бы и в первой в случае отсутствия изъятия.

Из (1.15) находим в этом случае при любом $u \in [0, 1]$

$$\partial_t^u k = \partial_t^0 k = k_1 f_1^m(k) + k_2 f_2^m(k), \quad (4.1)$$

откуда, в частности, следует независимость от управляющей стратегии свойства полосы $\Pi(k_-, k_+)$ оставаться притягивающим множеством системы (1.15).

Кривая N_S определяется условием (см. (2.6))

$$0 = S(k) = f_2^m(k) - f_1^m(k), \quad (4.2)$$

а условие скольжения по ней в дополнение к (4.2) требует также выполнения равенства (см. (2.10), (2.11), (4.1))

$$0 \equiv \partial_t S = \partial_t^0 k D(\mathbf{f}'), \quad t \in (t_a, t_b). \quad (4.3)$$

Заметим, что (4.3) получается из (4.2) формальным взятием полной производной по времени (речь идет о правых равенствах в этих формулах). С этой точки зрения учет их левых частей дает $S(t) \equiv 0$ при $t \in (t_a, t_b)$.

Поскольку

$$\Pi(k_-, k_+) \cap N_S = \emptyset \quad (4.4)$$

(ибо внутри $\Pi(k_-, k_+)$ знаки $f_1^m(k)$ и $f_2^m(k)$ противоположны, так что для $k \in [k_-, k_+]$ (4.2) не выполняется), а в силу теоремы 3 за пределами $[k_-, k_+]$ выполнено $\partial_t^0 k \neq 0$, т. е. в силу (1.15) при $\varepsilon = 0$ функция $k(t)$ не остается постоянной, то из условия скольжения следует тождество $S(k) \equiv 0$ на некотором интервале $k \in (k_a, k_b)$, $0 < k_a < k_b$, что представляет собой вырождение бесконечной коразмерности. Итак, доказана

Теорема 4. При $\varepsilon = 0$ оптимальные управления могут иметь только крайние значения, равные 0 или 1 во всех случаях, исключаящих вырождения, при которых (4.2) может выполняться тождественно на некотором непустом интервале значений k .

Все альтернативные случаи, включая наличие у функции $S(k)$ счетного множества корней любого порядка, исключают возможность скольжения.

Не углубляясь в аналитические тонкости, связанные со структурой гипотетически возможного (при условии запрета на указанные в теореме 4 вырождения) множества R тех корней уравнения (4.2), где $S(k)$ меняет знак, будем считать, что R локально конечно. Представляя его в виде $R = R_- \cup R_+$, где $R_- = R \cap \{k \in (0, k_-)\}$, $R_+ = R \cap \{k \in (k_+, +\infty)\}$, считаем каждое из подмножеств R_\pm упорядоченным с обычным отношением порядка, причем R_+ по возрастанию, а R_- — по убыванию. Знак величины $S(k)$ (а он постоянен для всех $k \in [k_-, k_+]$, т. е. $\text{sign } S(k_\pm)$), мы обозначим как s_f .

Пусть в соответствии с установленным порядком $R_\pm = \{r_1^\pm, r_2^\pm, \dots\}$.

Теорема 5. В случае $\varepsilon = 0$ при отсутствии вырождений, указанных в теореме 4, оптимальное управление имеет на интервале времени $(0, T)$ не более l (соответственно $l+1$) переключений при $s_f = 1$ (соответственно при $s_f = -1$), где l определяется из начального условия

$$k^0 = k_1^0 + k_2^0 \in (r_l^\pm, r_{l+1}^\pm] \quad (4.5)$$

при $k^0 \notin [r_1^-, r_1^+]$, и $l = 0$ в противном случае.

При этом на каждом интервале $k \in (r_j^\pm, r_{j+1}^\pm)$ возможно выполнение не более чем одного переключения, имеющего вид $0 \rightarrow 1$ (при $(-1)^j s_f = -1$) или $1 \rightarrow 0$

(при $(-1)^j s_f = 1$). На интервале $k \in (r_1^-, r_1^+)$ возможно одно переключение $0 \rightarrow 1$ (при $s_f = -1$) или переключения отсутствуют вовсе (при $s_f = 1$).

Переключения в точках $k = r_j^\pm$ возможны в любую сторону; при этом из зоны возможных переключений исключается примыкающий к r_j^\pm интервал указанного выше вида, для которого допустимо переключение, выполненное в r_j^\pm .

Доказательство. Поскольку $S(k)$ меняет знак при прохождении каждого из r_j^\pm , то $\text{sign } S(k) = s_f(-1)^j$, что влечет в соответствии со следствием теоремы 2 указанный характер переключений. Более чем единожды на одном интервале знакопостоянства $S(k)$ такое переключение произойти не может. Это верно также и для замыканий этих интервалов, откуда следует утверждение о переключениях на их границах. Непосредственный подсчет максимально возможного количества переключений дает приведенную в формулировке теоремы оценку.

Часто встречающийся в биологическом моделировании случай

$$f_i(k) = a_i k^{\beta_i}, \quad a_i > 0, \quad \beta_i \in (-1, 0), \quad i = 1, 2, \quad (4.6)$$

соответствующий степенным функциям воспроизводства

$$F_i(K_i, R_i) = a_i R_i \left(\frac{K_i}{R_i} \right)^{\alpha_i}, \quad \alpha_i = 1 + \beta_i, \quad i = 1, 2, \quad (4.7)$$

характеризуется рядом дополнительных свойств.

Во-первых, N_S состоит не более чем из двух компонент. Действительно, уравнение (4.2) в этом случае имеет вид

$$y^\rho = ay - b, \quad (4.8)$$

где $y = k^{\beta_1}$, $\rho = \frac{\beta_2}{\beta_1}$, $a = \frac{a_1}{a_2}$, $b = \frac{m_1 - m_2}{a_2}$.

Выпуклость (т. е. знакопостоянство второй производной) левой части (4.8) обеспечивает пересечение соответствующей ей кривой с прямой (правая часть в (4.8)) не более чем в двух точках.

Во-вторых, при $\beta_1 \neq \beta_2$ случай одного положительного решения (4.8) соответствует выбору параметра b противоположного знака с $(\rho - 1)$ либо $b = b^*$, где

$$b^* = \left(\frac{a}{\rho} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} (\rho - 1) \quad (4.9)$$

находится из условия касания $a = \rho y^{\rho-1}$ (получается дифференцированием (4.8) по y) совместно с (4.8). Случай двух положительных решений (4.8) (а именно этот случай соответствует наличию двух компонент у N_S) возникает при $b \in (0, b^*)$ вне зависимости от знака b^* (совпадающего со знаком $\beta_2 - \beta_1$).

В-третьих, для $k^{(i)}$ из (3.1) следующие три условия эквивалентны:

$$a) S(k^{(1)}) = 0, \quad b) S(k^{(2)}) = 0, \quad c) k^{(1)} = k^{(2)}. \quad (4.10)$$

Действительно, обозначим

$$z_i = \frac{(m_i + g)}{a_i}, \quad i = 1, 2. \quad (4.11)$$

Из (3.1) с учетом (4.6) находим

$$z_i = (k^{(i)})^{\beta_i}, \quad i = 1, 2. \quad (4.12)$$

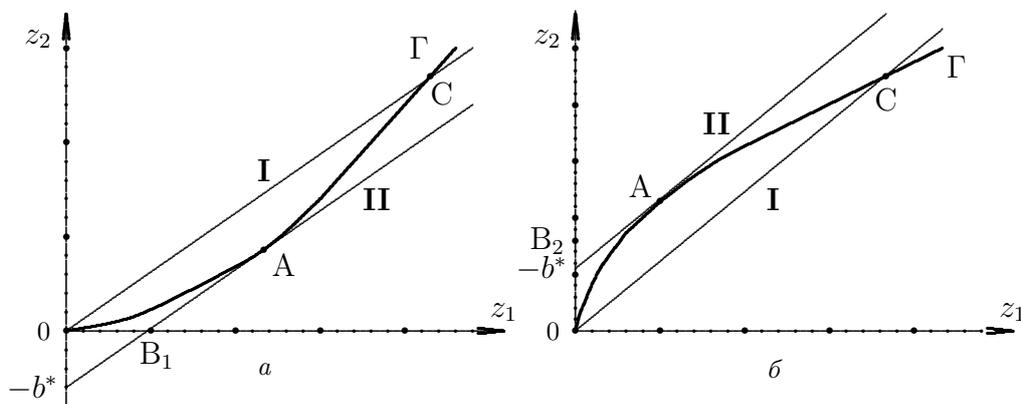


Рис. 2. Параметрические области для степенных функций: $a - \rho > 1$; $b - \rho < 1$

Подставляя $(m_i + g)$ и $k^{(i)}$, выраженные из (4.11) и (4.12) через z_i , в $S(k^{(i)})$, из (4.2) получаем

$$S(k^{(1)}) = a_2(z_1^\rho - z_2), \quad S(k^{(2)}) = a_1(z_1 - z_2^{\frac{1}{\rho}}). \quad (4.13)$$

Из (4.13) следует, что каждое из условий а) и б) в (4.10) эквивалентно равенству $z_2 = z_1^\rho$, т. е. с учетом (4.12) условию с) в (4.10).

На рис. 2 в области параметров $D_z = \{z = (z_1, z_2) : z_{1,2} > 0\}$ выделены под-области, различающиеся качественными характеристиками оптимальных решений для функций вида (4.6).

Случай a соответствует $\rho > 1$, т. е. $\alpha_1 > \alpha_2$, случай $b - \rho < 1$, т. е. $\alpha_1 < \alpha_2$. Кривая Γ задается соотношением $z_2 = z_1^\rho$, прямая I — соотношением $z_2 = az_1$, параллельная ей прямая II, касающаяся точки A с координатами $\left(\left(\frac{a}{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}, \left(\frac{a}{\rho}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)$, соотношением $z_2 = az_1 - b^*$, где b^* — из (4.9). Прямая I пересекается с кривой Γ в точке C с координатами $(a^{\frac{1}{\rho-1}}, a^{\frac{\rho}{\rho-1}})$.

Обозначим области параметров в D_z как $Z_+ = \{z \in D_z : z_2 > \max\{az_1, az_1 - b^*\}\}$, $Z_- = \{z \in D_z : z_2 < \min\{az_1, az_1 - b^*\}\}$, $Z_0 = \{z \in D_z : \min\{az_1, az_1 - b^*\} < z_2 < \max\{az_1, az_1 - b^*\}\}$, $Z^h = \{z \in D_z : z_2 > z_1^\rho\}$, $Z^l = \{z \in D_z : z_2 < z_1^\rho\}$.

В силу (4.11) $b = az_1 - z_2$, так что область Z_- соответствует $b > \max\{0, b^*\}$, $Z_+ - b < \min\{0, b^*\}$, а $Z_0 - b \in (0, b^*)$. В силу (4.13) область Z^h соответствует $S(k^{(i)}) < 0$, а $Z^l - S(k^{(i)}) > 0$, $i = 1, 2$.

В области Z_0 уравнение (4.8) имеет два решения. При движении из этой области пересечение прямой I дает потерю одного из них (оно достигает нуля, что соответствует уходу одной из ветвей N_S в бесконечность), а пересечение прямой II — обоих (они сливаются друг с другом). Изменение параметров в обратном направлении при пересечении прямой I приводит в случае общего положения (т. е. в стороне от точки A) к появлению двух близких решений уравнения (4.8), соответствующих двум близким компонентам N_S . Их близость означает их локализацию по одну сторону от полосы $\Pi(k_-, k_+)$. Это свойство будет сохраняться в силу непрерывности вплоть до пересечения точкой с координатами (z_1, z_2) кривой Γ , после чего полоса $\Pi(k_-, k_+)$ окажется заключенной между двумя компонентами N_S (эта ситуация соответствует сегменту $\Sigma_A = OAC$). В силу (4.12) треуголь-

ник OB_iA соответствует расположению полосы $\Pi(k_-, k_+)$ выше N_S , а оставшаяся часть области Z_0 (выше AC) — расположению $\Pi(k_-, k_+)$ ниже N_S .

Поскольку полоса $\Pi(k_-, k_+)$ является притягивающей для системы (1.15), то только в случае попадания \mathbf{z} в область $Z_0 \setminus \Sigma_A$ возможно двукратное пересечение N_S траекторией этой системы. При этом в силу следствия теоремы 2 переключение на заключительном участке (т. е. после прохождения траекторией последней компоненты N_S) возможно только в случае $S(k^{(i)}) < 0$, что в силу (4.13) соответствует $z_2 > z_1^p$. Одновременное выполнение обоих приведенных условий может иметь место лишь при $\rho < 1$. С учетом того, что на каждом из остальных участков траектории системы, заключенных между различными компонентами N_S , возможно не более одного переключения (теорема 5), а всего таких участков остается не более двух, мы получаем следующий результат.

Теорема 6. *В условиях теоремы 5 для исходных функций вида (4.6), соответствующих (4.7), оптимальное управление может иметь не более трех переключений и даже не более двух во всех случаях, кроме тех, когда выполнены одновременно следующие условия:*

- а) $\alpha_2 > \alpha_1$;
- б) $m_1 < m_2 < m_1 + a_2|b^*|$, где b^* из (4.9);
- в) $\left(\frac{m_1 + g}{a_1}\right)^{\beta_1} > \left(\frac{m_2 + g}{a_2}\right)^{\beta_2}$.

Доказательство. Условие а) соответствует неравенству $\rho < 1$, условие б) — локализации \mathbf{z} в Z_0 , а неравенство в) — неравенству $z_2 > z_1^p$.

5. Случай малоубыточного перемещения

В настоящем параграфе рассмотрен случай общей задачи оптимизации в приближении малого параметра $\varepsilon > 0$, что в биологических терминах означает малость потерь при перемещении. Обсуждаются условия, обеспечивающие приемлемость нулевого (т. е. при $\varepsilon = 0$) приближения в отношении качественной структуры возможных решений, т. е. распространения на этот случай результатов теоремы 5.

Выясним сначала условия, при которых исключена возможность скольжения оптимальных траекторий вдоль множества \mathbf{D} , или, что в силу (2.10) эквивалентно, траекторий системы (1.15) при оптимальном выборе $u(t)$ вдоль кривой N_S . Необходимым для такого скольжения наряду с (2.10) является вытекающее из него условие (2.11), которое на кривой N_S в приближении малого $\varepsilon > 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_t S|_{S=0} &= k f_1^m D(\mathbf{f}') - \varepsilon [k f_1^m G(\mathbf{f}'') - k_2 D(\mathbf{f}') G(\mathbf{f}') + \\ &+ G(\mathbf{f}^m, \mathbf{f}') + 2uk_1 f_1 D(\mathbf{f}')] + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Соотношение (5.1) получено из (2.11) подстановкой в него выражения $f_2^m = f_1^m + \varepsilon G(\mathbf{f}')$, эквивалентного (2.10) с учетом (2.6). При этом остаточный член $O(\varepsilon^2) = \varepsilon^2 Q$, где Q — некоторый полином от переменных $u, k_i, f_i, f_i', f_i'', i = 1, 2$, т. е. выражение, ограниченное при достаточно гладких функциях f_i , если, конечно, кривая N_S (которую в настоящем параграфе мы будем также обозначать посредством N_S^ε с явным указанием на значение малого параметра $\varepsilon > 0$) локализована в некотором компакте плоскости (k_1, k_2) , не содержащем ее нача-

ла координат. Это же условие локализации является, очевидно, достаточным для ограниченности коэффициента при ε в правой части (5.1). При такой ограниченности вопрос об отсутствии скольжения сводится к тому, чтобы главный член в (5.1), т. е. каждый из входящих в него сомножителей, был нулевого порядка по ε . Другими словами, для отсутствия скольжения достаточно одновременного выполнения следующих четырех условий:

$$(0, 0) \notin \text{cl } N_S^\varepsilon \Subset \text{cl } \mathbf{R}_2^+, \quad (5.2)$$

$$k|_{N_S^\varepsilon} > C > 0, \quad (5.3)$$

$$|f_1^m(k)|_{N_S^\varepsilon} > C > 0, \quad (5.4)$$

$$|D(\mathbf{f}'(k))|_{N_S^\varepsilon} > C > 0. \quad (5.5)$$

Здесь cl обозначает операцию замыкания, \Subset — отношение компактного включения, C — некоторую положительную постоянную (возможно, свою в каждом конкретном случае), не зависящую от ε .

Пусть, как и в предыдущем параграфе, $R = \{r_1^\pm, r_2^\pm, \dots\} \subset (0, +\infty)$ — множество корней уравнения (4.2), так что $r_j^\pm \notin [k_-, k_+]$. При $\varepsilon = 0$ N_S^0 распадается на компоненты $N_j^\pm = \{k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, k_1 + k_2 = r_j^\pm\}$. Выделим одну из них, т. е. выберем $r_j^\pm \in R$, обозначая его как $k^* > 0$, а N_j^\pm как N_*^0 . Для этой компоненты условия (5.2) и (5.3) выполнены тривиальным образом, а (5.4) следует из (4.4). Оказывается, что выполнение недостающего условия (5.5) гарантирует выполнение всех условий (5.2)–(5.5) уже и для малых $\varepsilon > 0$ на той компоненте $N_*^\varepsilon \subset N_S^\varepsilon$, которая является ближайшей к N_*^0 . Более точно, имеет место следующая

Теорема 7. *Если для $k^* \in R$*

$$f_1'(k^*) \neq f_2'(k^*), \quad (5.6)$$

то найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любых $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ существует окрестность $O_\varepsilon(N_^0)$, имеющая ширину по k , равную $w_\varepsilon \sim \varepsilon$, такая, что $N_*^0 \subset O_\varepsilon(N_*^0) \subset \text{cl } \mathbf{R}_+^2$, причем*

1) $N_*^\varepsilon = N_S^\varepsilon \cap O_\varepsilon(N_*^0)$ *представляет собой гладкую связную кривую, имеющую непустые пересечения с осями $(k_1, 0)$ и $(0, k_2)$;*

2) *для N_*^ε выполнены условия (5.2)–(5.5);*

3) $\partial_t^u S|_{N_*^\varepsilon} \neq 0, u \in [0, 1]$.

Доказательство.

1) Перепишем (2.6) в виде

$$S = S(k, s, \varepsilon) = f_2^m(k) - f_1^m(k) - k\varepsilon \left(s f_1'(-k) + \frac{1-s}{1-\varepsilon} f_2'(k) \right), \quad (5.7)$$

где $s = k_1/k \in [0, 1]$.

Условие $k^* \in R$ означает, что $S(k^*, s, 0) \equiv 0$, так что в силу (5.6)

$$\partial_k S(k, s, 0)|_{k=k^*} = D(\mathbf{f}')(k^*) \neq 0, \quad (5.8)$$

т. е. неравенство (5.8) выполнено равномерно по s .

По теореме о неявной функции найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ существует $k(s, \varepsilon)$, при котором выполнено $S(k(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \equiv 0$, причем в разложении

$$k(s, \varepsilon) = k^* + \varepsilon k_\varepsilon(s) + o(\varepsilon) \quad (5.9)$$

$$k_\varepsilon(s) = -\frac{\partial_\varepsilon S|_{\varepsilon=0}}{\partial_k S|_{k=k^*}} = \frac{k^*(s f_1'(k^*) + (1-s) f_2'(k^*))}{D(\mathbf{f}')(k^*)} \quad (5.10)$$

является линейной функцией от s , а оценка остаточного члена равномерна по s . Искомая кривая параметризуется через (s, k) согласно (5.9), а ширина w_ε полосы $O_\varepsilon(N_*^0)$ по k согласно (5.9) и (5.10) не зависит от s , пропорциональна ε и обратно пропорциональна выражению в (5.8). Точкам пересечения N_*^0 с осями соответствуют значения $s = 1$ и $s = 0$ соответственно.

2) Выполнение (5.2) и (5.3) обеспечивается выбором достаточно малого значения $\varepsilon_0 > 0$.

Поскольку $k^* \notin [k_-, k_+]$, то, подбирая ε_0 так, чтобы $(k^* - w_{\varepsilon_0}, k^* + w_{\varepsilon_0}) \cap [k_-, k_+] = \emptyset$, можно добиться выполнения (5.4).

Выполнение (5.5) вытекает из (5.8) при достаточно малых ε с учетом непрерывности $D(\mathbf{f}')$.

3) Вытекает из непрерывности правой части (5.1) по ε при $\varepsilon > 0$, (5.5) и неравенства $k^* > 0$.

Следствие 3. В условиях теоремы значение $\varepsilon_0 > 0$ можно выбрать столь малым, чтобы исключить возможность скольжения оптимальных траекторий на N_*^ε .

Доказательство для случая, когда $N_*^\varepsilon = N_\xi^\varepsilon$ составляет содержание теоремы и предшествующих ей рассуждений. В общем случае эти рассуждения можно повторить для одной компоненты N_*^ε .

Полученный результат тривиально обобщается на случай любого числа компонент у кривой N_ξ^ε .

Теорема 8. Если для любого $k^* \in R$ выполнено (5.6), то найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ на N_ξ^ε исключена возможность скольжения оптимальных траекторий.

Доказательство. Конечность множества R позволяет выбрать $\varepsilon_0 > 0$ минимальным из всех, определенных индивидуально для каждого значения $k^* = r_j^\pm$ в силу теоремы 7. Ее следствие дает утверждение теоремы.

Следствие 4. В условиях теоремы 8 можно выбрать $\varepsilon_0 > 0$ таким образом, что N_ξ^ε представляет собой несвязное объединение компонент N_*^ε для k^* , пробегающего R , для каждого из которых выполнены соотношения (5.2)–(5.5).

Доказательство. В применении теоремы 7 к доказательству ее следствия величину $\varepsilon_0 > 0$ следует выбирать таким образом, чтобы индивидуальные $O(N_*^0)$ не пересекались.

Множество $R = \{r_1^\pm, r_2^\pm, \dots\}$ определяет разбиение полуоси $k > 0$ на полуинтервалы R_l , $l \in \mathbf{Z}$ вида $R_{\pm l} = [r_l^\pm, r_{l+1}^\pm]$, $l \geq 1$; $R_0 = (r_1^-, r_1^+)$. Определим целочисленную функцию $\tilde{l}(k)$, $k > 0$ так, чтобы $\tilde{l}(k) = l \Leftrightarrow k \in R_l$. Число $s_f = \pm 1$ определим так же, как и в параграфе 4 (т. е. $s_f = \text{sign } S(k)$ при $\varepsilon = 0$ и $k \in R_0$).

В приведенных терминах теорема 8 имеет

Следствие 5. В условиях теоремы 8 число переключений между 0 и 1 у оптимального управления не превосходит $\tilde{l}(k^0)$ в случае $s_f = 1$ и $\tilde{l}(k^0) + 1$ при $s_f = -1$, где $k^0 = k_1^0 + k_2^0$ — начальные условия.

Доказательство. Для случая $\varepsilon = 0$ выполнено (4.4), которое по непрерывности в силу (5.6) распространяется и на случай малых $\varepsilon > 0$. При этом полосу $\Pi(k_-, k_+)$ можно расширить до $\Pi_\delta = \Pi(k_- - \delta, k_+ + \delta)$ с $\delta = C\varepsilon$ и некоторым $C > 0$ с тем, чтобы за ее пределами не только $\partial_t^0 k$, но и $\partial_t^1 k$ (а значит, в силу линейности по u и $\partial_t^u k$ для любого $u \in [0, 1]$) были знакопостоянны. Это может быть сделано, поскольку $\partial_t^1 k = k(sf_{1\varepsilon}^m + (1-s)f_2^m)$ с $s = k_1/k$ может обращаться в нуль только в пределах полосы $\Pi(k_-^\varepsilon, k_+^\varepsilon)$, где $k_+^\varepsilon = \max\{k_\varepsilon^{(1)}, k^{(2)}\}$, $k_-^\varepsilon = \min\{k_\varepsilon^{(1)}, k^{(2)}\}$,

а $k_\varepsilon^{(1)}$ — корень уравнения $f_{1\varepsilon}^m(k) = (1 - \varepsilon)f_1(k) - (m_1 + g) = 0$, так что в качестве Π_δ можно взять объединение обеих полос. При этом уже предполагается, что ε выбирается настолько малым, что последнее уравнение разрешимо. Такое ограничение обеспечивает монотонное изменение $k(t)$ за пределами Π_δ .

Другое ограничение на ε должно обеспечивать выполнение утверждений теоремы 8 и ее следствия 4 с тем, чтобы на каждой компоненте N_S^ε выражение (5.1) не обращалось в ноль. Выполнение этого ограничения гарантирует пересечение каждой из компонент N_S^ε траекторией системы (1.15) с ненулевой скоростью.

Наконец, третье ограничение на ε , усиливающее второе, должно обеспечивать выполнение утверждений теоремы 7 в части, касающейся ширины полосы $O_\varepsilon(N_*^0)$ для каждой компоненты, с тем чтобы в пределах каждой такой полосы величина S как функция времени изменялась монотонно, т. е. чтобы с ненулевой скоростью преодолевалась уже целая полоса. Поскольку такая полоса заключена между прямыми вида $k_1 + k_2 = \text{const}$, то это ограничение в совокупности с первым обеспечивает последовательное (без возвратов) прохождение траекторией системы (1.15) компонент кривой N_S^ε , причем в том же порядке, что и в случае $\varepsilon = 0$, т. е. в соответствии с утверждениями теоремы 5.

Единственное отличие от результатов теоремы 5 заключается в свойствах решений при начальных условиях, достаточно близких к N_S^0 . В случае, когда $\mathbf{k}^0 \notin N_S^0$, т. е. $k^0 \notin R$, задавшись еще одним дополнительным ограничением на ε , можно добиться того, чтобы начальная точка $\mathbf{k}^0 \notin N_S^\varepsilon$, причем чтобы она располагалась от N_S^ε с той же стороны (в смысле постоянства знака $S \neq 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$), что и от N_S^0 . Случай $\mathbf{k}^0 \in N_S^0$ более непредсказуем: \mathbf{k}^0 может оказаться с любой стороны от N_S^ε . Этим обстоятельством и вызвано отнесение пограничных случаев к худшей (т. е. с большим числом возможных переключений) по сравнению с $\varepsilon = 0$ ситуации.

Замечание. Сопоставление условий, гарантирующих отсутствие скольжения фазовых траекторий вдоль кривой N_S^ε при $\varepsilon = 0$ (теорема 5) и при малых $\varepsilon > 0$ (теорема 8), показывает их сходство в том смысле, что они выполнены в случае общего положения, т. е. при отсутствии вырождений, характеризуемых условиями типа равенства. Однако вырождения, исключаемые в случае $\varepsilon > 0$ и характеризующиеся нарушением неравенств (5.6), имеют коразмерность, равную 1, т. е. несоизмеримо слабее вырождений бесконечной коразмерности, отсутствие которых предполагается при $\varepsilon = 0$. Этому обстоятельству может быть предоставлено следующее естественное объяснение. Размер (т. е. ширина по k) окрестности компоненты N_S^0 , соответствующей $k = k^*$, для которой не определен знак величины $S(k, s, \varepsilon)$ из (5.7) при $\varepsilon \rightarrow +0$, может быть оценен как ширина интервала, на котором $|f_2^m(k) - f_1^m(k)| < \varepsilon$ и, следовательно, пропорционален $\sqrt[n+1]{\varepsilon}$, где $n \geq 1$ — порядок нуля $k = k^*$ указанной разности. При $\varepsilon = 0$ такая ширина равна нулю при всех $n \in \mathbf{N}$, что и обеспечивает очень сильный результат теоремы 5 в отличие от более слабого результата теоремы 8 для $\varepsilon > 0$.

Литература

- [1] Разжевайкин В.Н., Юсуфов А.Т. Оптимальная двухвозрастная эксплуатация биологической популяции // Вестник СамГУ. Естественная серия. 2011. № 2(83). С. 57–69.

- [2] Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.]. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.

Поступила в редакцию 20/II/2012;
в окончательном варианте — 20/II/2012.

MATHEMATICAL MODELLING OF OPTIMUM CULTIVATION OF BIOLOGICAL CULTURE

© 2012 V.N. Razzhevaikin,³ A.T. Yusufov⁴

Questions of optimum control over the process of organization of cultivation of biological culture in the conditions of two-regime cultivates are studied. Ways of acceptance of optimum decisions concerning conveyance of production made in the conditions of one of the ways in the conditions of the second, based on estimations of observable variables are specified.

Key words: mathematical modeling, optimum control, biological population, principle of maximum of Pontrjagin.

Paper received 20/II/2012.
Paper accepted 20/II/2012.

³Razzhevaikin Valeriy Nikolaevich (razz@mail.ru), Dorodnicyn Computing Center of RAS, Moscow, 119333, Russian Federation.

⁴Yusufov Ali Turaevich (aliysufov@mail.ru), the Dept of computing machinery, Orenburg State University, 460018, Orenburg, Russian Federation.