УДК 517.988.67

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ КРАТНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ РЕДУКЦИОННЫМ МЕТОДОМ ЛОЖНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

© 2012 Д.Г. Рахимов[1]

На основе методов теории ветвления рассматривается задача уточнения кратных собственных значений и соответствующих собственных и корневых элементов. Предлагается прием, позволяющий понизить алгебраическую кратность до единицы. Для построения итерационных процессов применяется метод ложных возмущений.

Ключевые слова: методы теории ветвления, кратное собственное значение, корневое число, редукционный метод ложных возмущений.

Введение

В работах [1–3] рассмотрено уточнение приближенно заданных собственных значений, собственных векторов и обобщенных жордановых цепочек (ОЖЦ) обобщенной задачи на собственные значения с достаточно гладкой оператор-функцией спектрального параметра методом ложных возмущений (ЛВ-метод) [4], основанного на специальном выборе оператора ложного возмущения таком, что известные приближения к собственным значениям, собственным элементам и обобщенным жордановым цепочкам становятся точными для возмущенного оператора. При использовании методов теории ветвления [5] строятся итерационные процессы для нахождения соответствующих точных значений. Наиболее общий ЛВ-оператор, симметрично использующий ОЖЦ прямой и сопряженной спектральных задач, предложенный в [3], нашел многие приложения в задачах математической физики [6; 7].

В работе [8] с помощью конечномерного регуляризующего оператора уменьшается геометрическая кратность собственного числа до единицы, т. е. случай кратного собственного значения со многими линейно независимыми собственными элементами без ОЖЦ сводится к простому для регуляризованного оператора.

В настоящей статье на основе методики работы [8] предложен прием, позволяющий уменьшить алгебраическую кратность собственного числа, используются терминология и обозначения книги [5].

[1]Рахимов Давран Ганиевич (Davranaka@yandex.ru), ведущий научный сотрудник Института математики и информационных технологий АН РУз, 700143, Республика Узбекистан, г. Ташкент, ул. Ф. Ходжаева, 29.

1. Постановка задачи

Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства, $A_0 : E_1 \supset D(A_0) \longrightarrow E_2$, $A_1 : E_1 \supset \supset D(A_1) \longrightarrow E_2$ — плотно заданные замкнутые линейные операторы, причем $D(A_0) \subset D(A_1)$ и A_1 подчинен A_0 (т. е. $\|A_1 x\|_{E_2} \leqslant \|A_0 x\|_{E_2} + \|x\|_{E_1}$ на $D(A_0)$) или $D(A_1) \subset D(A_0)$ и A_0 подчинен A_1 (т. е. $\|A_0 x\|_{E_2} \leqslant \|A_1 x\|_{E_2} + \|x\|_{E_1}$ на $D(A_1)$).

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$(A_0 - tA_1)x = 0. \tag{1.1}$$

Пусть неизвестное собственное значение λ является фредгольмовой точкой оператор-функции $A_0 - tA_1$ с $N(A_0 - \lambda A_1) = span\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, $N(A_0^* - \lambda A_1^*) = span\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ и отвечающими им A_1- и A_1^* — жордановыми цепочками [5] с длинами $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_n$

$$(A_0 - \lambda A_1)\varphi_i^{(s)} = A_1 \varphi_i^{(s-1)},\ (A_0^* - \lambda A_1^*)\psi_i^{(s)} = A_1^* \psi_i^{(s-1)},\ s = \overline{2, p_i}, i = \overline{1, n}, \tag{1.2}$$

$$K = det\| \left\langle A_1 \varphi_i^{(p_i)}, \psi_j^{(1)} \right\rangle \| \neq 0,\ L = det L_{ij} \neq 0,\ L_{ik} = \| \left\langle A_1 \varphi_i^{(p_i+1-j)}, \psi_k^{(l)} \right\rangle \|,$$
$$i(k) = \overline{1, n},\ j(l) = \overline{2, p_i(p_k)}.$$

Согласно [9] элементы $\varphi_i^{(j)}, \psi_k^{(l)}, j(l) = \overline{2, p_i(p_k)}, i(k) = \overline{1, n}$, A_1- и A_1^* жордановых наборов, отвечающих фредгольмовой точке λ оператор-функции $A_0 - \lambda A_1$, могут быть выбраны так, чтобы выполнялись следующие соотношения биортогональности:

$$\langle \varphi_i^{(j)}, \gamma_k^{(l)} \rangle = \delta_{ik}\delta_{jl},\ \langle z_i^{(j)}, \psi_k^{(l)} \rangle = \delta_{ik}\delta_{jl},\ j(l) = \overline{2, p_i(p_k)}, \tag{1.3}$$
$$\gamma_k^{(l)} = A_1^* \psi_k^{(p_k+1-l)},\ z_i^{(j)} = A_1 \varphi_i^{(p_i+1-j)}, i(k) = \overline{1, n}.$$

Предположим, что известны достаточно хорошие приближения $\Lambda, \varphi_{i0}^{(s)}, \psi_{i0}^{(s)}$ к неизвестному собственному значению λ и ОЖЦ: $\|\varphi_j^{(s)} - \varphi_{j0}^{(s)}\| \leqslant \varepsilon$, $\|\psi_j^{(s)} - \psi_{j0}^{(s)}\| \leqslant \varepsilon$, $\mid \lambda - \Lambda \mid \leqslant \varepsilon$ с близкими к единице соответствующими значениями K_0 и L_0 (2.2).

В работе [3] доказана следующая

Лемма. Переходя к линейным комбинациям, можно определить системы

$$\left\{ \gamma_{k0}^{(l)} \right\}_{k,l=1}^{n,p_k},\ \gamma_{k0}^{(l)} = A_1^* \psi_{k0}^{(p_k+1-l)},\ \left\{ z_{k0}^{(l)} \right\}_{k,l=1}^{n,p_k},\ z_{k0}^{(l)} = A_1 \varphi_{k0}^{(p_k+1-l)}, \tag{1.4}$$

удовлетворяющие соотношениям биортогональности (1.3)

$$\langle \varphi_{i0}^{(j)}, \gamma_{k0}^{(l)} \rangle = \delta_{ik}\delta_{jl},\ \langle z_{i0}^{(j)}, \psi_{k0}^{(l)} \rangle = \delta_{ik}\delta_{jl},\ j(l) = \overline{2, p_i(p_k)}. \tag{1.5}$$

Используя методику работы [8], требуется свести задачу ложного возмущения для кратного собственного значения к случаю простого собственного значения, уточнить собственное значение λ и соответствующие элементы ОЖЦ поставленной задачи и сопряженной к ней.

2. Случай одной ОЖЦ

Пусть $N(A_0 - \lambda A_1) = \{\varphi\}$. Регуляризуем $A_0 - \lambda A_1$ следующим образом:

$$\overline{A(t)} \equiv \overline{(A_0 - tA_1)} = A(t) + \sum_{k=2}^{p} \langle \cdot, \gamma_0^{(k)} \rangle z_0^{(p+1-k)}. \tag{2.1}$$

Справедлива следующая

Теорема 2.1. Искомое собственное значение λ является простым собственным числом регуляризованной оператор-функции (2.1), причем соответствующие собственный вектор и дефектный функционал определяются в виде

$$\tilde{\varphi} = \varphi^{(p)} + \sum_{s=1}^{p-1} c_s \varphi^{(s)}, \;\; \tilde{\psi} = \psi + \sum_{s=2}^{p} d_s \psi^{(s)}. \qquad (2.2)$$

Доказательство. Если (2.2) является решением (2.1) при $t = \lambda$, то

$$0 = \overline{A(\lambda)}\tilde{\varphi} = \left(A(\lambda) + \sum_{k=2}^{p} \langle \cdot, \gamma_0^{(k)} \rangle z_0^{(p+1-k)} \right) \left(\varphi^{(p)} + \sum_{s=1}^{p-1} c_s \varphi^{(s)} \right) =$$

$$= 0 + \sum_{k=2}^{p} \langle \varphi^{(p)}, \gamma_0^{(k)} \rangle z_0^{(p+1-k)} + \sum_{k=2}^{p} \sum_{s=2}^{p} c_s \langle \varphi^{(s)}, \gamma_0^{(k)} \rangle z_0^{(p+1-k)} +$$

$$+ \sum_{s=2}^{p} c_s A_1 \varphi^{(s-1)} + (A_0 - \lambda A_1)\varphi^{(p)};$$

$$0 = \overline{A^*(\lambda)}\tilde{\psi} = \sum_{k=2}^{p} \sum_{s=2}^{p} d_s \langle z_0^{(p+1-k)}, \psi^{(s)} \rangle \gamma_0^{(k)} + \sum_{s=2}^{p} d_s A_1^* \psi^{(s-1)} + \sum_{k=2}^{p} \langle z_0^{(p+1-k)}, \psi \rangle \gamma_0^{(k)}.$$

Применяя к первому равенству $\psi_0^{(j)}$ и ко второму $\varphi_0^{(j)}$ поочередно для всех $j = \overline{2,p}$, будем иметь системы линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов $c_1, \ldots, c_p$ и $d_1, \ldots, d_p$:

$$\sum_{s=2}^{p} c_s a_{js} = -\langle \varphi^{(p)}, \gamma_0^{(p+1-j)} \rangle - \langle A_1 \varphi^{(p-1)}, \psi_0^{(j)} \rangle, \;\; j = \overline{2,p}; \qquad (2.3)$$

$$\sum_{s=2}^{p} d_s b_{js} = -\langle z_0^{(p+1-j)}, \psi \rangle, \;\; j = \overline{2,p}, \qquad (2.4)$$

где $a_{js} = \langle \varphi^{(s)}, \gamma_0^{(p+1-j)} \rangle + \langle A_1 \varphi^{(s-1)}, \psi_0^{(j)} \rangle$, $b_{js} = \langle z_0^{(p+1-j)}, \psi^{(s)} \rangle + \langle \varphi_0^{(j)}, A_1^* \psi^{(s-1)} \rangle$. Показано, что $|a_{j,p+1-j}| = 1 + O(\varepsilon)$, $|a_{j,p+2-j}| = 1 + O(\varepsilon)$, $|b_{j,p+1-j}| = 1 + O(\varepsilon)$, $|b_{j,p+2-j}| = 1 + O(\varepsilon)$, а для остальных $s \neq p+1-j;\ p+2-j:$ $|a_{js}| = O(\varepsilon)$, $|b_{js}| = O(\varepsilon)$. Следовательно, $det\,\|a_{js}\| = 1 + O(\varepsilon)$, $det\,\|b_{js}\| = 1 + O(\varepsilon)$, т. е. системы (2.3) и (2.4) имеют единственные решения.

Так как $\left| \langle \varphi^{(p)}, \gamma_0^{(p-1)} \rangle + \langle A_1 \varphi^{(p-1)}, \psi_0^{(2)} \rangle \right| = 1 + O(\varepsilon)$, и $\left| \langle \varphi^{(p)}, \gamma_0^{(p+1-j)} \rangle + \langle A_1 \varphi^{(p-1)}, \psi_0^{(j)} \rangle \right| = O(\varepsilon)$, для всех $j > 2$, то $c_i = O(\varepsilon)$, $i = \overline{1, p-2}$, и $c_{p-1} = -1 + O(\varepsilon)$. Поэтому в качестве начальных приближений к $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ следует взять $\tilde{\varphi}_0 = \varphi_0^{(p)} - \varphi_0^{(p-1)}$ и $\tilde{\psi}_0 = \psi_0$ соответственно. Начальное приближение к λ выберем как решение уравнения $\langle \overline{A}(t)\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0 \rangle = 0$, т. е. $\lambda_0 = \frac{\langle A_0 \tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0 \rangle + 1}{\langle A_1 \tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0 \rangle}$.

Так как $k_0 = \langle A_1 \tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0 \rangle = \langle A_1 \varphi_0^{(p)}, \tilde{\psi}_0 \rangle - \langle A_1 \varphi_0^{(p-1)}, \tilde{\psi}_0 \rangle = \langle A_1 \varphi_0^{(p)}, \tilde{\psi}_0 \rangle \neq 0$, то, полагая $\tilde{\gamma}_0 = \frac{1}{k_0} A_1^* \psi_0$, $\tilde{z}_0 = \frac{1}{k_0} A_1 \tilde{\varphi}_0$, имеем $\langle \tilde{\varphi}_0, \tilde{\gamma}_0 \rangle = 1$, $\langle \tilde{z}_0, \tilde{\psi}_0 \rangle = 1$.

Оператор ложного возмущения строится в виде

$$D_0 x = \langle x, \tilde{\gamma}_0 \rangle \overline{A(\lambda_0)} \tilde{\varphi}_0 + \langle x, \overline{A^*(\lambda_0)} \psi_0 \rangle \tilde{z}_0, \;\; D_0^* y = \langle \overline{A(\lambda_0)} \tilde{\varphi}_0, y \rangle \tilde{\gamma}_0 + \langle \tilde{z}_0, y \rangle \overline{A^*(\lambda_0)} \psi_0.$$

Тогда $D_0 \tilde{\varphi}_0 = \overline{A(\lambda_0)} \tilde{\varphi}_0$, $D_0^* \tilde{\psi}_0 = \overline{A^*(\lambda_0)} \psi_0$, т. е. $N(\overline{A(\lambda_0)} - D_0) = \{\tilde{\varphi}_0\}$, $N(\overline{A^*(\lambda_0)} - D_0^*) = \{\tilde{\psi}_0\}$.

Применением регуляризатора Шмидта [5] уравнение $\overline{A(t)}x = 0$ сводится к системе

$$\begin{cases} x = \xi\left[I + \overline{\Gamma_0}\left(D_0 + \overline{A(t)} - \overline{A(\lambda_0)}\right)\right]^{-1}\tilde{\varphi}_0, \\ \xi = \langle x, \tilde{\gamma}_0\rangle. \end{cases} \tag{2.5}$$

где $\overline{\Gamma_0} = \left[\overline{A(\lambda^0)} - D_0 + \langle\cdot, \tilde{\gamma}_0\rangle\tilde{z}_0\right]^{-1}$.

Подстановкой первого равенства во второе в системе (2.5) получим уравнение разветвления, простым корнем которого является точное собственное значение λ:

$$F(t) \equiv 1 - \langle\left[I + \overline{\Gamma_0}\left(D_0 + \overline{A(t)} - \overline{A(\lambda_0)}\right)\right]^{-1}\tilde{\varphi}_0, \tilde{\gamma}_0\rangle = 0. \tag{2.6}$$

Пусть $S(\lambda_0; \rho)$ — некоторый шар с радиусом ρ с центром λ_0.

Теорема 2.2. Если начальные приближения достаточно хороши, то существует шар $S(\lambda_0; r)$, где $r = \frac{1-\sqrt{1-4h}}{2h}\eta \leqslant \rho$, $h = |F'(\lambda_0)|^{-1} L\,|F(\lambda_0)| \leqslant \frac{1}{4}$, $\eta = |F'(\lambda_0)|\,|F(\lambda_0)|$, в котором уравнение (2.6) имеет единственное решение $t = \lambda$, и последовательные приближения, определяемые модифицированным методом Ньютона:

$$\lambda_{m+1} = \lambda_m - [F'(\lambda_0)]^{-1} F(\lambda_m),\ m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.7}$$

сходятся к этому решению.

Доказательство. Проверим условия теоремы 2 [10, с. 446]:

1) $F(\lambda_0) = 1 - \langle\left[I + \overline{\Gamma_0}D_0\right]^{-1}\tilde{\varphi}_0, \gamma_0\rangle = 1 - \langle\tilde{\varphi}_0, \gamma_0\rangle + \langle D_0\tilde{\varphi}_0, \psi_0\rangle - \cdots = O(\|D_0\|)$; $|F(\lambda_0)| \leqslant C_1(\|D_0\|)$;

2) $F'(\lambda_0) = \langle\left[I + \overline{\Gamma_0}D_0\right]^{-1}\overline{\Gamma_0}A_1\left[I + \overline{\Gamma_0}D_0\right]^{-1}\tilde{\varphi}_0, \gamma_0\rangle = \langle A_1\tilde{\varphi}_0, \psi_0\rangle - 2\langle D_0\overline{\Gamma_0}D_0\tilde{\varphi}_0, \psi_0\rangle + \cdots = k_0 - 2\langle D_0\overline{\Gamma_0}D_0\tilde{\varphi}_0, \psi_0\rangle + \cdots$, $|F'(\lambda_0)| \geqslant |k_0| - C_2(\|D_0\|)$, $M_0 = |F'(\lambda_0)|^{-1} \leqslant [|k_0| - C_2(\|D_0\|)]^{-1}$;

3) $|F'(t_1) - F'(t_2)| = |F''(t_1 + \theta(t_1 - t_2))(t_1 - t_2)| \leqslant L\cdot|t_1 - t_2|$, где $L = \sup\limits_{t\in G}|F''(t)|$.

Если начальные приближения достаточно хороши, то ε можно так выбрать, чтобы $M_0LC_1 \leqslant \frac{1}{4}$. Тогда согласно теореме 2 [10, с. 446] для $r = \frac{1-\sqrt{1-4h}}{2h}M_0C_1 \leqslant \rho$ в шаре $S(\lambda_0; r)$ существует единственное решение (2.6), к которому приближения, вычисленные по формуле (2.7), сходятся.

Заметим, что при реализации итерационного процесса (2.7) на каждом шаге необходимо решать одно операторное уравнение

$$\left[\overline{A(\lambda_m)} + \langle\cdot, \tilde{\gamma}_0\rangle\tilde{z}_0\right]x = \tilde{z}_0.$$

Теорема 2.3. Элементы ОЖЦ $\left\{\varphi^{(i)}\right\}_{i=1}^p$, $\left\{\psi^{(i)}\right\}_{i=1}^p$ являются решениями следующих рекуррентных систем:

$$[A_0 - \lambda A_1 + \langle\cdot, \gamma_0\rangle z_0]\,x = z_0,\ [A_0^* - \lambda A_1^* + \langle z_0, \cdot\rangle\gamma_0]\,y = \gamma_0,$$

$$[A_0 - \lambda A_1 + \langle\cdot, \gamma_0\rangle z_0]\,x_s = A_1x_{s-1} + z_0,\ x_1 = \varphi,\ x_s = \varphi^{(s)};$$

$$[A_0^* - \lambda A_1^* + \langle z_0, \cdot\rangle\gamma_0]\,y_s = A_1^*y_{s-1} + \gamma_0,\ y_1 = \psi, y_s = \psi^{(s)},\ s = \overline{2, p}.$$

Доказательство. К исходным уравнениям (2.1), (2.2) применим ЛВ-метод, вводя оператор ложного возмущения:

$$D_0x = \langle x, \gamma_0\rangle\left[(A_0 - \lambda A_1)\varphi_0 - \langle x, (A_0^* - \lambda A_1^*)\psi_0\rangle z_0\right] + \langle x, (A_0^* - \lambda A_1^*)\psi_0\rangle z_0,$$

$$D_0^*y = \langle(A_0 - \lambda A_1)\varphi_0, y\rangle\gamma_0 + \langle z_0, y\rangle\left[(A_0^* - \lambda A_1^*)\psi_0 - \langle(A_0 - \lambda A_1)\varphi_0, y\rangle\gamma_0\right].$$

Тогда $N(A_0 - \lambda A_1 - D_0) = \{\varphi_0\}$, $N(A_0^* - \lambda A_1^* - D_0^*) = \{\psi_0\}$.

Уравнение $(A_0 - \lambda A_1)x = 0$ сводится к системе

$$\begin{cases} x = \xi \left[I + \Gamma_0 D_0\right]^{-1} \varphi_0, \\ \xi = \langle x, \gamma_0 \rangle, \end{cases}$$

где $\Gamma_0 = \left[A_0 - \lambda A_1 - D_0 + \langle \cdot, \gamma_0 \rangle z_0\right]^{-1}$ – ограниченный оператор, существующий согласно лемме Шмидта [5]. Тогда

$$\xi = \xi \langle \left[I + \Gamma_0 D_0\right]^{-1} \varphi_0, \gamma_0 \rangle$$

или для любых ξ

$$1 - \langle \left[I + \Gamma_0 D_0\right]^{-1} \varphi_0, \gamma_0 \rangle = 0, \tag{2.8}$$

поэтому можно положить

$$\varphi = \left[I + \Gamma_0 D_0\right]^{-1} \varphi_0.$$

Аналогично (2.2) сводится к системе

$$\begin{cases} x_s = \xi^{(s)} \left[I + \Gamma_0 D_0\right]^{-1} \varphi_0 + \left[I + \Gamma_0 D_0\right]^{-1} \Gamma_0 A_1 x_{s-1}, \\ \xi^{(s)} = \langle x_s, \gamma_0 \rangle. \end{cases}$$

Подставляя первое равенство во второе и учитывая (2.8), имеем

$$\langle \left[I + \Gamma_0 D_0\right]^{-1} \Gamma_0 A_1 x_{s-1}, \gamma_0 \rangle = 0,$$

которое справедливо для любых $\xi^{(s)}$, поэтому следует принять

$$x_s = \left[I + \Gamma_0 D_0\right]^{-1} \varphi_0 + \left[I + \Gamma_0 D_0\right]^{-1} \Gamma_0 A_1 x_{s-1}.$$

Двойственным образом, применяя к уравнениям $(A_0^* - \lambda A_1^*)y = 0$ и $(A_0^* - -\lambda A_1^*)y_s = A_1^* y_{s-1}$ вышеуказанную схему, приходим к рекуррентным равенствам:

$$\psi = \left[I + \Gamma_0^* D_0^*\right]^{-1} \psi_0,$$

$$y_s = \left[I + \Gamma_0^* D_0^*\right]^{-1} \psi_0 + \left[I + \Gamma_0^* D_0^*\right]^{-1} \Gamma_0^* A_1^* y_{s-1},\ s > 1.$$

Пример. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим в пространстве $C^2\left[(0, x_0) \cup (x_0, 1)\right] \cap C^1\left[0, 1\right]$ следующую задачу на собственные значения из работы [11]:

$$u'' + \lambda u = 0,\ u(0) = 0,\ u'(x_0) = u'(1).$$

При $x_0 = \frac{2s-2m+1}{2s+2m+1}$ и $0 < m < s + \frac{1}{2}$ точное собственное значение $\mu_m = = \mu_s = \mu_0$, где $\mu_m = \frac{2m\pi}{1+x_0}$, $\mu_s = \frac{(2s+1)\pi}{1+x_0}$, будет двукратным, ему соответствуют собственные и присоединенные элементы

$$\varphi^{(1)} = sin\mu_0 x,\ \ \varphi^{(2)} = -\frac{1}{2\mu_0} x cos\mu_0 x,$$

$$\psi^{(1)} = \begin{cases} 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ \frac{8\mu_0}{1-x_0^2} cos\mu_0 x, x_0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \qquad \psi^{(2)} = \begin{cases} -\frac{4}{1+x_0} sin\mu_0 x,\ \ 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ -\frac{4(1-x)}{1-x_0^2} sin\mu_0 x, x_0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Взяв в качестве начальных приближений $\varphi_0^{(1)}, \tilde{\psi}_0^{(1)}, \varphi_0^{(2)}, \tilde{\psi}_0^{(2)}$ соответствующие отрезки рядов Тейлора длины $n = 25$ собственных функций $\varphi^{(1)}, \tilde{\psi}^{(1)}$ и жордановых элементов $\varphi^{(2)}, \tilde{\psi}^{(2)}$, проведены вычислительные эксперименты с использованием пакетов программ Maple 11.

При $m = s = 1,\ x_0 = \frac{1}{5},\ \lambda = \frac{25\pi^2}{4} = 61,6850275 : \lambda_0 = 61,8321723; \lambda_1 = = 61,6728554; \lambda_2 = 61,6850467; \lambda_3 = 61,6850275; \lambda_4 = 61,6850275.$

Замечание. Автор рассматривал также случай со многими собственными элементами и обобщенным жордановым набором, который будет рассмотрен в другой статье.

Литература

[1] Логинов Б.В., Рахимов Д.Г. О методе ложных возмущений при наличии обобщенных жордановых цепочек // Дифференциальные уравнения и их приложения / ред. М.С. Салахитдинова. Ташкент: Фан, 1979. С. 113–125.

[2] Loginov B.V., Rakhimov D.G., Sidorov N.A. Development of M.K. Gavurin's Pseudoperturbation Method // Fields Institute Communications, 2000. № 25. P. 367–381.

[3] Логинов Б.В., Макеева О.В., Цыганов А.В. Уточнение приближенно заданных жордановых цепочек линейной оператор-функции спектрального параметра на основе теории возмущений // Функциональный анализ: межвуз. сб. науч. тр. Ульяновск, 2003. Вып. 38. С. 52–62.

[4] Гавурин М.К. О методе ложных возмущений для нахождения собственных значений // ЖВМ и МФ. 1961. Т. 1. № 5. С. 751–770.

[5] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.

[6] Loginov B.V., Makeeva O.V. Pseudoperturb iteration methods generalized eigenvalue problems // ROMAI Journal. 2008. V. 1. № 1. P. 149–168.

[7] Логинов Б.В., Макеева О.В. Метод ложных возмущений в обобщенных задачах на собственные значения // Доклады РАН. Сер.: Математика. 2008. Т. 419. № 2. Р. 160–163.

[8] Рахимов Д.Г. О вычислении кратных фредгольмовых точек дискретного спектра линейных оператор-функций методом ложных возмущений // Журнал Средневолжского мат. об-ва. 2010. Т. 12. № 2. С. 106–112.

[9] Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления // Прямые и обратные задачи для уравнений с частными производными / ред. М.С. Салахитдинова. Ташкент: Фан, 1978. С. 133–148.

[10] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1964.

[11] Макеева О.В. Метод ложных возмущений в обобщенной задаче на собственные значения: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ульяновск, 2007.

Поступила в редакцию 18/*XI*/2011;
в окончательном варианте — 19/*XII*/2011.

ON REGULIRATION MULTIPLE EIGENVALUE BY REDUCTION PSEUDOPERTURBATION METHODS

© 2012 D.G. Rakhimov[2]

On the base of the bifurcation theory methods it is considered the problem of the retaining multiple eigenvalues and relevant eigenvectors and roots elements. An approch is suggested which allows reduce algebraic multiple to unit, that is reduce the problem of the retaining multiple eigenvalues to simple. For construction iterated process applied pseudoperturbation methods.

Key words: bifurcation theory methods, multiple eigenvalues, root number, reduction pseudoperturbation method.

Paper received 18/*XI*/2011.
Paper accepted 19/*XII*/2011.

[2]Rakhimov Davran Ganievich (`Davranaka@yandex.ru`), Institute of Mathematical and Calculations tehnology of Academ Science of Republic of Uzbekistan, Tashkent, 700143, Uzbekistan.