УДК 330.101.54

*А.Л. Сараев, Л.А. Сараев**

КОНТИНУАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРОЦЕССА И ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ФАКТОРОВ ПРОИЗВОДСТВА ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

В статье предложена континуальная экономико-математическая модель описания производственного процесса промышленного предприятия. Получена система уравнений квазистатического взаимодействия производственных факторов, издержек, выпуска продукции и прибыли.

Ключевые слова: факторы производства, издержки, затраты, выпуск продукции, прибыль, производственная функция, ресурсы.

Любой производственный процесс, в котором производится некоторая продукция и затрачивается определенное количество ресурсов, изменяется под влиянием внешних и внутренних воздействий. Эти воздействия изменяют параметры выпуска продукции и издержек производства, оказывают влияние на формирование прибыли и на рентабельность предприятия [1—6]. Для установления количественной оценки таких изменений в экономической теории широко используются методы математического моделирования [7—12].

В данной статье предложен континуальный подход описания соотношений между факторами производства и параметрами производственного процесса. Эти соотношения могут быть использованы для установления оптимального состояния промышленного производства методами математической физики. С этой целью вводится понятие непрерывного пространства производственных факторов, рассматриваются величины, описывающие изменения структуры выпуска продукции, прибыли и издержек.

1. Тензор роста факторов производства

Производство любой продукции промышленным предприятием требует определенных затрат ресурсов. В самом общем случае эти ресурсы представляют собой трехмерный вектор объемов факторов производства

Сараев Александр Леонидович (alex.saraev@gmail.com), *Сараев Леонид Александрович* (saraev_leo@mail.ru), кафедра математики и бизнес-информатики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

$\mathbf{Q} = (K, L, M)$.

Здесь $(0 \le K \le K_{\max})$ – капитал (производственные фонды), $(0 \le L \le L_{\max})$ – трудовые ресурсы, $(0 \le M \le M_{\max})$ – материал и технологии. Эти величины выражаются в денежной форме. Однако для математического моделирования конфигурацию используемых ресурсов удобно задавать в виде безразмерного вектора

$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$.

Здесь

$$q_1 = \frac{K}{K_{max}}, q_2 = \frac{L}{L_{max}}, q_3 = \frac{M}{M_{max}} (0 \le q_i \le 1).$$

Очевидно, что радиус-вектор $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ определяет положение некоторой точки $M = (q_1, q_2, q_3)$ трехмерного пространства R^3. Множество всех таких точек пространства образует некоторую область в декартовой системе координат (q_1, q_2, q_3). Таким образом, конфигурация факторов производства промышленного предприятия трактуется как математический континуум, и его близкие точки переходят после изменений также в близкие точки.

Если в некоторый начальный момент времени производство занимает в ресурсном евклидовом пространстве R^3 некоторую область с объемом V, ограниченную поверхностью G, то в некоторый текущий момент времени изменившееся производство будет занимать в этом пространстве новую область с объемом V', ограниченную поверхностью G'.

Точка $M = (q_1, q_2, q_3)$ области V переместится в точку $M'(h_1, h_2, h_3)$ области V', положение которой описывается в той же самой системе координат (q_1, q_2, q_3).

Соответствие между векторами $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ и $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ описывается соотношениями

$$h_i = h_i(q_1, q_2, q_3)\ (i = 1...3). \tag{1}$$

Так как производство представляет собой математический континуум, соотношения (1) являются взаимно однозначными.

$$q_i = q_i(h_1, h_2, h_3)\ (i = 1...3). \tag{2}$$

Предполагается, что функции (1) и (2) принадлежат классу C^1. Обозначим

$$u_i = h_i - q_i\ \ (i = 1...3). \tag{3}$$

Вектор $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ характеризует изменение конфигурации ресурсов $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$, вызванных развитием производственной ситуации. Компоненты вектора $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ представляют собой достаточно малые величины $(0 \le u_i << 1)$. Такие величины называются инфинитезимальными.

Соотношение (3) можно записать в виде

$$h_i = q_i + u_i(q_1, q_2, q_3)(i = 1...3). \tag{4}$$

Рассмотрим две достаточно близкие точки области рынка объема V. Точка M имеет декартовы координаты q_i, а точка N имеет координаты $q_i + dq_i$. В новом объеме V' точка M перейдет в положение точки M' с координатами $h_i = q_i + u_i$, а точка N переместится в точку N' с координатами $q_i + dq_i + u_i + du_i$.

Вычислим квадрат расстояния между точками M и N, который равен скалярному квадрату вектора $\overrightarrow{MN}$

$$\left|\overrightarrow{MN}\right|^2 = ds_0^2 = dq_l dq_l. \tag{5}$$

Квадрат расстояния между точками M' и N' равен скалярному квадрату вектора $\overrightarrow{M'N'}$ и выражается формулой

$$\left|\overrightarrow{M'N'}\right|^2 = ds^2 = dh_k dh_k. \tag{6}$$

Здесь использовано известное правило Эйнштейна, согласно которому по дважды встречающемуся индексу производится суммирование.

Вычислим полный дифференциал соотношения (1)

$$dh_k = \frac{\partial h_k}{\partial q_j} dq_j. \tag{7}$$

Подставляя формулу (7) в выражение (6), находим

$$ds^2 = dh_k dh_k = \frac{\partial h_k}{\partial q_i}\frac{\partial h_k}{\partial q_j} dq_i dq_j. \tag{8}$$

Вычислим разность квадратов расстояний

$$ds^2 - ds_0^2 = \left(\frac{\partial h_k}{\partial q_i}\frac{\partial h_k}{\partial q_j} - \delta_{ij}\right) dq_i dq_j = 2Q_{ij} dq_i dq_j. \tag{9}$$

Величины

$$Q_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_k}{\partial q_i}\frac{\partial h_k}{\partial q_j} - \delta_{ij}\right) \tag{10}$$

представляют собой безразмерную форму изменения конфигурации ресурсов в первоначальной системе координат (q_1, q_2, q_3). Здесь $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера.

Исключив из соотношений (3), (10) координаты h_i, получим

$$Q_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial q_j} + \frac{\partial u_j}{\partial q_i} + \frac{\partial u_k}{\partial q_i}\frac{\partial u_k}{\partial q_j}\right). \tag{11}$$

Величины Q_{ij} образуют компоненты симметричного тензора второго ранга $Q_{ij} = Q_{ji}$.

В силу инфинитезимальности величин u_i квадратами производных можно пренебречь, и формула (11) принимает вид [1]

$$Q_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial q_j} + \frac{\partial u_j}{\partial q_i}\right), \tag{12}$$

или

$$Q_{ij}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}(\mathbf{q}) + u_{j,i}(\mathbf{q})\right). \tag{13}$$

Здесь индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате $f_{,i} = \dfrac{\partial f}{\partial q_i}$.

Компоненты тензора Q_{11}, Q_{22}, Q_{33} описывают изменение конфигурации ресурсов вдоль координатных осей (q_1, q_2, q_3) соответственно. Вычислим относительный рост элемента объема $dV = dq_1\, dq_2\, dq_3 = d\mathbf{q}$. В результате изменения ситуации этот элемент будет занимать объем

$$dV' = \left(dq_1 + \frac{\partial u_1}{\partial q_1} dq_1\right)\left(dq_2 + \frac{\partial u_2}{\partial q_2} dq_2\right)\left(dq_3 + \frac{\partial u_3}{\partial q_3} dq_3\right) =$$

$$= (1 + Q_{11})(1 + Q_{22})(1 + Q_{33})\, dq_1\, dq_2\, dq_3.$$

Относительный прирост объема имеет вид

$$\theta = \frac{dV' - dV}{dV} = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = Q_{ss}. \tag{14}$$

Здесь по-прежнему можно пренебречь квадратами производных $u_{i,j}$. Выражение (14) называется дилатацией изменения конфигурации ресурсов.

Компоненты тензора Q_{12}, Q_{23}, Q_{13} описывают изменение направления ресурсного вектора в евклидовом координатном пространстве (q_1, q_2, q_3), а также формы элемента объема и, следовательно, перераспределение структуры конфигурации ресурсов.

2. Тензор роста результатов производства

Очевидно, что при развитии производственной ситуации соответствующая первоначальная область в евклидовом ресурсном пространстве изменяет свою форму и объем. Это приводит к изменениям векторных величин выпуска продукции, прибыли и издержек во всех направлениях ресурсного пространства. Пусть вектор $\mathbf{P}$ представляет собой либо вектор выпуска продукции, либо вектор прибыли, либо вектор издержек в зависимости от рассматриваемой задачи. Компоненты этого вектора выражаются в денежных единицах.

Выделим внутри деформированной области ресурсов вокруг некоторой точки M с координатами q_i элемент поверхности с площадью dG_n и с вектором единичной нормали $\mathbf{n}$. Этому элементу будет соответствовать вектор $d\mathbf{P}^{(n)}$. Тогда вектор

$$\mathbf{P}^{(n)} = \frac{d\mathbf{P}^{(n)}}{dG_n} \tag{15}$$

будет описывать либо выпуск продукции, либо прибыль, либо издержки, отнесенные к единице площади поверхности в ресурсном евклидовом пространстве.

Рассмотрим важные частные случаи расположения единичных площадок в ресурсном евклидовом пространстве относительной декартовой системы координат (q_1, q_2, q_3), представленные на рис. 1.

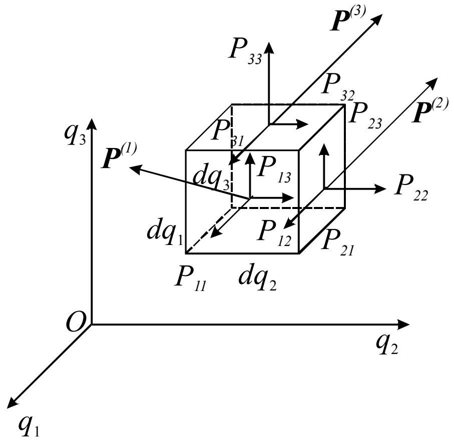

Рис. 1

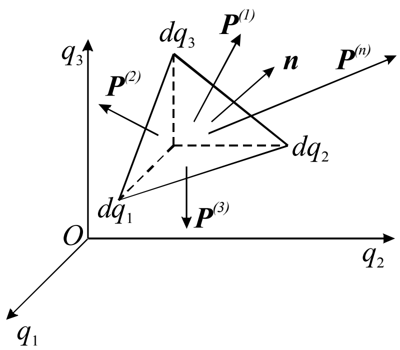

Рис. 2

Выделим в пространстве элементарный параллелепипед объема $dV = dq_1\, dq_2\, dq_3 = d\mathbf{q}$ с боковыми гранями dG_1, dG_2, dG_3. Элементу $dG_1 = dq_2 dq_3$, ортогональному оси q_1, соответствует вектор $\mathbf{P}^{(1)} = (P_{11}, P_{12}, P_{13})$. Элементу $dG_2 = dq_1 dq_3$, ортогональному оси q_2, соответствует вектор $\mathbf{P}^{(2)} = (P_{21}, P_{22}, P_{23})$. Элементу $dG_3 = dq_1 dq_2$, ортогональному оси q_3, соответствует вектор $\mathbf{P}^{(3)} = (P_{31}, P_{32}, P_{33})$.

Таким образом, изменение состояния выпуска продукции, прибыли и издержек в ресурсном евклидовом пространстве полностью описывается компонентами тензора второго ранга P_{ij}. Можно показать, что этот тензор является симметричным [12]

$P_{ij} = P_{ji}$.

Рассмотрим представленный на рис. 2 в ресурсном евклидовом пространстве тетраэдр с ребрами dq_1, dq_2, dq_3, к трем взаимно перпендикулярным граням которого приложены векторы $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$. К четвертой наклонной грани приложен равнодействующий вектор $\mathbf{P}^{(n)}$.

Очевидно, что векторы $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}^{(n)}$ не являются независимыми и связаны между собой направляющими косинусами n_j, компонентами вектора единичной нормали $\mathbf{n}$.

Компоненты этих векторов P_{ij}, $P_i^{(n)}$ и компоненты вектора единичной нормали связаны соотношением

$$P_i^{(n)} = P_{ij}\, n_j \tag{16}$$

3. Уравнения квазистатического состояния производства

Конфигурация ресурсов рассматриваемого производства промышленного предприятия может подвергаться некоторым внутренним воздействиям. К таким воздействиям могут быть отнесены изменения доходов предприятия, стоимости различных ресурсов и комплектующих. Сюда также могут быть отнесены изменения цен на основные фонды, материалы, совершенствование технологий производства, налоги и субсидии и т. д.

Перечисленные выше воздействия могут быть математически описаны вектором F_i, действующим на элемент объема dV.

Если рынок, занимающий объем V, ограниченный поверхностью G, находится в равновесном состоянии, то

$$\int_V F_i dV + \int_G P_i^{(n)} dG = 0. \tag{17}$$

Применяя к интегралам (17) теорему Гаусса – Остроградского

$$\int_V F_i dV + \int_G P_i^{(n)} dG = \int_V F_i dV + \int_G P_{ij} n_j dG =$$

$$= \int_V F_i dV + \int_V P_{ij,j} dV = \int_V \left(F_i + P_{ij,j}\right) dV = 0 \tag{18}$$

и учитывая, что область V выбрана достаточно произвольно, находим систему уравнений равновесия для компонентов тензора

$$P_{ij,j}(\mathbf{q}) + F_i(\mathbf{q}) = 0. \tag{19}$$

К уравнениям (13), (19) следует добавить уравнения связи компонентов тензора результатов производства P_{ij} с компонентами тензора роста факторов производства Q_{ij}. Например, пропорциональные и сверхпропорциональные издержки производства и факторы производства связаны линейными тензорными соотношениями

$$P_{ij} = E_{ijkl} \left(Q_{kl}\right)^{a_{kl}}. \tag{20}$$

Здесь E_{ijkl} – компоненты тензора четвертого ранга, коэффициентов значимости компонентов факторов производства, a_{kl} – показатели степени сверхпропорциональности издержек. Если показатель $a_{mn} = 1$, то соответствующий компонент представляет собой пропорциональные издержки, в противном случае издержки являются сверхпропорциональными. Очевидно, что при $a_{mn} > 1$ издержки будут дигрессивными, а при $a_{mn} < 1$ издержки будут прогрессивными.

Уравнения (13), (19) и (20) образуют замкнутую систему уравнений для решения краевых задач, описывающих процесс изменения издержек производства

$$\begin{cases} P_{ij} = E_{ijkl}\left(Q_{kl}\right)^{a_{kl}}, \\ P_{ij,j} + F_i = 0, \\ Q_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right). \end{cases} \tag{21}$$

Граничными условиями для системы (21) могут служить условия, задаваемые на границе рынка $G = G_P \bigcup G_Q$. На одной части этой границы G_P могут задаваться внешние ограничения для вектора $u_i(\mathbf{q})$

$$u_i(\mathbf{q})\big|_{G_P} = f_i(\mathbf{q}). \tag{22}$$

На другой части границы G_Q может быть задан вектор спроса или предложения

$$P_{ij}(\mathbf{q}) n_j(\mathbf{q})\big|_{G_Q} = g_i^{(n)}(\mathbf{q}). \tag{23}$$

Для описания выпуска продукции уравнения связи компонентов тензора результатов производства P_{ij} с компонентами тензора роста факторов производства Q_{ij} следует задавать в виде обобщенной тензорной производственной функции Кобба – Дугласа

$$P_{ij} = P_{ij}^0 \prod_{k=1}^{3}\prod_{l=1}^{3}\left(Q_{kl}\right)^{s_{kl}}. \tag{24}$$

Здесь P_{ij}^0 – тензор технологических коэффициентов, s_{kl} – коэффициенты эластичности по факторам производства.

В этом случае замкнутую систему уравнений для решения краевых задач, описывающих изменения выпуска продукции, образуют уравнения (13), (19) и (24)

$$\begin{cases} P_{ij} = P_{ij}^0 \prod_{k=1}^{3}\prod_{l=1}^{3}\left(Q_{kl}\right)^{s_{kl}}, \\ P_{ij,j} + F_i = 0, \\ Q_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right). \end{cases} \tag{25}$$

Системы из пятнадцати уравнений (21), (25) могут быть представлены в виде трех уравнений относительно компонентов вектора u_i. Это достигается исключением из этих систем величин P_{ij}, Q_{ij}.

Библиографический список

1. Тюкавкин Н.М. Управление издержками (затратами) // Управленческий учет. 2008. № 3.
2. Тюкавкин Н.М. Практика финансового анализа: монография. Самара: Офорт, 2008. 291 с.
3. Сараев А.Л. Теоретические основы бухгалтерского учета в промышленности // Аудит и финансовый анализ. 2012. № 3. С. 52–57.
4. Сараев А.Л., Татарских Б.Я. Нормирование затрат как инструмент управления производством продукции промышленных предприятий // Вестн. Самар. гос. экон. ун-та. 2012. № 4 (90). С. 79–86.
5. Сараев А.Л. Организация системы управления издержками промышленных предприятий // Вестн. Самар. гос. ун-та. Сер.: Экономика и управление. 2012. № 1 (92). С. 77–90.
6. Сараев А.Л. Издержки двигателестроения: классификация, учет, оценка и управление: монография. Самара: Глагол, 2012. 232 с.
7. Сараев А.Л. К теории издержек промышленных предприятий // Современные тенденции в экономике и управлении: новый взгляд: сб. матер. XII междунар. науч.-практ. конф. / под общ. ред. С.С. Чернова. Новосибирск: Издательство НГТУ, 2011. Ч. 2. С. 213–222.
8. Сараев А.Л. Управление затратами (издержками) предприятий промышленности // Креативная экономика и инновационные процессы (вопросы модернизации, развития и управления): труды III междунар. молодежной науч. конф. Самара: Изд-во «Самарский университет», 2011. С. 133–142.
9. Сараев А.Л. Теоретические и методические основы управления затратами промышленных предприятий // Актуальные проблемы развития финансово-экономических систем: труды первой междунар. науч.-метод. конф. Самара: Изд-во «Самарский университет», 2010. Ч. 2. С. 4–18.
10. Сараев А.Л., Сараев Л.А. К расчету эффективных параметров оптимизации производства с микроструктурой // Вестн. Самар. гос. ун-та. Сер.: Экономика и управление. 2012. № 1 (92). С. 231–236.
11. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Прогнозирование эффективных характеристик затрат неоднородного производства // Вестн. Самар. гос. ун-та. Сер.: Экономика и управление. 2012. № 4 (95). С. 109–114.
12. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Закономерности взаимодействия потребителей и производителей в условиях непрерывного конкурентного рынка // Актуальные проблемы развития финансово-экономических систем: труды первой междунар. науч.-метод. конф. Самара: Изд-во «Самарский университет», 2010. Ч. 2. С. 58–68.

A.L.Saraev, L.A.Saraev*

CONTINUOUS THEORY OF PRODUCTION PROCESS AND PRODUCTIVITY FACTORS OF INDUSTRIAL ENTERPRISES

In the published work the continuous economic and mathematical model for the description of production process of industrial enterprise is suggested. A system of equations of quasi-static interaction of productivity factors, costs, production output and profits is received.

Key words: factors of production, costs, costs, production output, income, production function, resources.

---

* *Saraev Alexander Leonidovich* (alex.saraev@gmail.com), *Saraev Leonid Alexandrovich* (saraev_leo@mail.ru),the Dept. of Mathematics and Business-Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.