

К ТЕОРИИ СНИЖЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ ПАРА, СОПРИКАСАЮЩЕГОСЯ С ЖИДКОСТЬЮ В ЗАМКНУТОМ ОБЪЕМЕ

© 2012 В.Ш. Шагапов¹, Ю.А. Юмагулова²

В работе рассмотрена задача снижения давления пара в замкнутом объеме вследствие конденсации на границе контакта с холодной жидкостью. Получены нелинейные интегродифференциальные уравнения, численное решение которых выполнено методом конечных разностей. Проанализировано влияние начального состояния и расхода жидкости, геометрического размера замкнутого объема на темп снижения давления.

Ключевые слова: давление пара, парокapelная среда, конденсация, межфазный теплообмен, инъекция капель.

Важной проблемой для предотвращения или хотя бы частичного уменьшения последствия аварий, связанных с неконтролируемым выходом пара в объектах, является процесс снижения высокого давления в замкнутом объеме. Наглядным примером такой ситуации является недавняя авария на АЭС в Фукусиме, когда для недопущения повреждения корпуса станции высоким давлением пар был выпущен в атмосферу. Представляется, что наиболее простым и эффективным мероприятием, позволяющим снизить давление, не выпуская в атмосферу пар, содержащий экологически опасные составляющие, является введение холодной воды. Однако дозировка вводимой жидкости, а также конфигурация контакта между паром и водой должны удовлетворять условиям, обеспечивающим снижение давления до необходимых величин за приемлемые периоды времени.

1. Постановка задачи в плоскоодномерном приближении

Пусть в емкости с вертикальными стенками находится пар. Верхняя граница емкости — твердая плоскость, а на нижней границе пар контактирует со слоем воды. Тепловыми потерями через верхнюю и боковые стенки емкости будем пренебрегать (материал этих стенок представляет собой идеальный теплоизолятор).

¹Шагапов Владислав Шайхулагзамович (shagapov@rambler.ru), Институт механики Уфимского научного центра РАН, 450025, Российская Федерация, г. Уфа, пр. Октября, 71.

²Юмагулова Юлия Александровна (ym_julia@mail.ru), кафедра математического анализа и прикладной математики Бирского филиала Башкирского государственного университета, 452453, Российская Федерация, г. Бирск, Интернациональная, 10.

Для описания процесса ось координат направим вертикально вниз с началом на верхней границе емкости. Тогда можно записать следующие уравнения неразрывности и притока тепла для пара ($0 < x < b$)

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\partial \rho_v v_v}{\partial x} = 0, \quad \rho_v c_v \left(\frac{\partial T_v}{\partial t} + v_v \frac{\partial T_v}{\partial x} \right) = \lambda_v \frac{\partial^2 T_v}{\partial x^2} + \frac{dp}{dt}, \quad (1.1)$$

где ρ_v , p , v_v , T_v — плотность, давление, скорость, температура пара, c_v и λ_v — теплоемкость пара при постоянном давлении и коэффициент теплопроводности. Здесь и в дальнейшем нижние индексы v и w относятся к параметрам пара и воды. Значение координаты $x = b$ соответствует границе раздела "пар-вода". Отметим, что второе уравнение (1.1) записано в рамках гипотезы гомобаричности [1] (однородности давления $\partial p / \partial x = 0$).

Для воды $b < x < b + a$, где a — толщина слоя воды, имеем уравнения, аналогичные (1.1), в которых последнее слагаемое для давления отсутствует. Воду будем считать несжимаемой, а ее скорость на нижней стенке $x = b + a$ равной нулю ($v_w = 0$). Тогда из уравнения неразрывности для воды следует $v_w = 0$, и уравнение теплопроводности для воды можно записать в виде

$$\frac{\partial T_w}{\partial t} = \nu_w \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2}, \quad (1.2)$$

где $\nu_w = \lambda_w / (\rho_w c_w)$ — температуропроводность воды.

В качестве уравнения состояния для пара примем уравнение Клапейрона–Менделеева

$$p = \rho_v R_v T_v. \quad (1.3)$$

Приведенную систему уравнений необходимо дополнить начальными и граничными условиями. Пусть в начальном состоянии ($t = 0$) температуры пара и воды однородны и равны соответственно T_{v0} и T_{w0} , а давление пара p_0 . Для скорости и температуры пара на верхней границе ($x = 0$) примем условия

$$x = 0: \quad v_v = 0, \quad \lambda_v \frac{\partial T_v}{\partial x} = 0, \quad (1.4)$$

соответствующие отсутствию массовых и тепловых потоков.

На поверхности раздела "пар-вода" ($x = b$) выполняется условие равенства температуры межфазной поверхности T_b равновесной температуре фазовых переходов для давления p ($T_b = T_s(p)$). Здесь и в дальнейшем дополнительный индекс b относится к значениям на этой поверхности ($x = b$). Кроме того, выполняются условия баланса массы и тепла

$$\rho_{vb} \left(v_{vb} - \frac{\partial b}{\partial t} \right) = -\rho_w \frac{\partial b}{\partial t} = j, \quad \lambda_v \frac{\partial T_v}{\partial x} - \lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial x} = jl. \quad (1.5)$$

Здесь l — удельная теплота фазового перехода, j — интенсивность конденсации, отнесенная на единицу площади. Из уравнений (1.5), учитывая, что для рассматриваемой системы обычно $\rho_{vb} \ll \rho_w$, можем получить

$$\lambda_v \frac{\partial T_v}{\partial x} - \lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial x} = \rho_{vb} l v_{vb}. \quad (1.6)$$

Для замыкания приведенной системы уравнений необходимо записать еще одно граничное условие для температуры воды. При записи такого условия можно принять одну из двух предельных ситуаций, соответствующих изотермическому ($T_w = T_{w0}$) или адиабатному ($\lambda_w \partial T_w / \partial x = 0$) процессу на нижней границе емкости ($x = b + a$). Однако в случае, если за представляющее интерес в данной задаче

время толщина зон в воде, где реализуются температурные перепады, значительно меньше толщины слоя воды (слой жидкости достаточно толстый), вместо двух предельных вариантов можно принять условие

$$T_w = T_{w0} \quad (x \rightarrow \infty). \quad (1.7)$$

Из уравнений (1.1) с учетом уравнения (1.3) можем получить

$$\left(\frac{c_v}{R_v} - 1\right) \frac{dp}{dt} + c_v \frac{\partial(\rho_v T_v v_v)}{\partial x} = \lambda_v \frac{\partial^2 T_v}{\partial x^2}. \quad (1.8)$$

Проинтегрировав уравнение (1.8) по координате от нуля до b с учетом граничных условий (1.4) и (1.6), получим уравнение

$$\left(\frac{c_v}{R_v} - 1\right) b \frac{dp}{dt} = \left(-\frac{c_v T_{vb}}{l} + 1\right) \lambda_v \left(\frac{\partial T_v}{\partial x}\right)_b + \frac{c_v T_{vb} \lambda_w}{l} \left(\frac{\partial T_w}{\partial x}\right)_b. \quad (1.9)$$

Оценки показывают, что обычно $c_v T_{vb} < l$, а для коэффициентов теплопроводности имеет место соотношение $\lambda_v \ll \lambda_w$. Тогда из уравнения (1.9) с учетом $T_{vb} = T_s(p)$ следует приближение

$$b \frac{dp}{dt} = \frac{R_v c_v T_s(p) \lambda_w}{l(c_v - R_v)} \left(\frac{\partial T_w}{\partial x}\right)_b, \quad (1.10)$$

согласно которому снижение давления происходит за счет конденсации пара, ее интенсивность лимитируется теплоотбором жидкостью от межфазной поверхности "пар-вода".

Решение уравнения (1.2), удовлетворяющее условию $T_w = T_s(p)$ при $x = b$ и условию (1.7), имеет вид [2]

$$T_w = \int_0^t \frac{\partial U(x-b, t-\tau)}{\partial t} T_s(p(\tau)) d\tau, \quad U(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\eta^2} d\eta. \quad (1.11)$$

Подставляя выражение (1.11) в соотношение (1.10), получим интегродифференциальное уравнение для изменения давления

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{R_v c_v \lambda_w T_s(p)}{b(c_v - R_v) l} \left(\frac{T_s(p_0) - T_{w0}}{\sqrt{\pi \nu_w t}} + \int_0^t \frac{\partial T_s}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \nu_w (t-\tau)}} \right). \quad (1.12)$$

Учитывая зависимость равновесной температуры фазовых переходов от давления $T_s = T_* / \ln(p_*/p)$ ($T_* = l/R_v$, p_* — эмпирические параметры, определяемые на основе табличных данных), уравнение Клапейрона–Клаузиуса $dT_s/dp = T_s/(l\rho_v)$ и уравнение состояния для пара (1.3), уравнение (1.12) можно записать в виде

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{A}{\ln(p_*/p)} \left(\frac{\Delta T}{\sqrt{t}} + T_* \int_0^t \frac{dp/d\tau}{p \ln^2(p_*/p) \sqrt{t-\tau}} \right). \quad (1.13)$$

Уравнение (1.13) представляет собой нелинейное интегродифференциальное уравнение, которое можно решить методом конечных разностей [3–5]. Данный метод часто используется при решении задач теплопереноса и заключается в том, что расчетный интервал покрывается сеткой из n точек. Затем дифференциальные уравнения исходной задачи заменяются аппроксимирующими их уравнениями в конечных разностях для каждого i -го шага.

При вычислении интеграла будем использовать его представление в виде

$$\int_0^t \frac{dp/d\tau}{p \ln^2(p_*/p)\sqrt{t-\tau}} = -2 \int_0^t \frac{dp/d\tau}{p \ln^2(p_*/p)} d\sqrt{t-\tau}.$$

Для решения уравнения (1.13) строится четырехточечная разностная схема, в которой используется сетка $p_i = p(t_i)$, $i = 1, \dots, n$, $t_i = t_0 + ih$, $n = M/h$, где M — время, для которого проводятся вычисления, h — шаг по времени. Аппроксимируя на этой сетке уравнение (1.13), получим следующую разностную схему:

$$p_1 = p_0 + \dot{p}(0)h, \quad \dot{p}(t_0) = \dot{p}(0), \quad \dot{p}(t_k) = \frac{p_{k+1} - p_{k-1}}{2h},$$

$$p_{i+1} = p_{i-1} - \frac{2Ah}{\ln(p_*/p_i)} \left(\frac{\Delta T}{\sqrt{ih}} + 2T_*\sqrt{h}S \right), \quad (1.14)$$

$$S = \sum_{k=1}^i \frac{\dot{p}(t_k) + \dot{p}(t_{k-1})}{[p_k \ln^2(p_*/p_k) + p_{k-1} \ln^2(p_*/p_{k-1})](\sqrt{i-k+1} + \sqrt{i-k})}.$$

Для каждого $i > 0$ значение p_{i+1} на следующем шаге выражается через уже известные значения, вычисленные на предыдущих шагах.

В численных расчетах для теплофизических параметров системы "пар-вода", определяющих ее теплофизические свойства, приняты следующие значения [6]: $\rho_w = 10^3$ кг/м³, $c_w = 4.2$ кДж/(кг·К), $\lambda_w = 0.556$ Вт/(м·К) ($\nu_w = 1.324 \cdot 10^{-7}$ м²/с), $c_v = 2.1$ кДж/(кг·К), $R_v = 450$ Дж/(моль·К), $T_* = 5 \cdot 10^3$, $p_* = 7 \cdot 10^{10}$.

На рис. 1 представлена эволюция снижения давления при его начальном значении $p_0 = 0,8$ МПа, высоте емкости $b = 7$ м и различных значениях температуры воды T_{w0} .

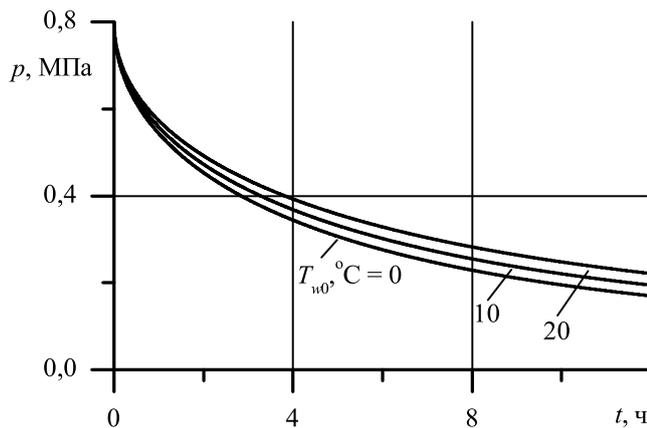


Рис. 1. Эволюция давления пара при различных начальных значениях температуры воды T_{w0} для случая плоской постановки задачи

Видно, что снижение давления в два раза от исходной величины может длиться 3–4 часа в зависимости от температуры воды, что может быть недопустимым с точки зрения ущерба из-за аварийной ситуации.

2. Инжекция капель в пар

Рассмотрим ситуацию, когда в пар, находящийся в замкнутом объеме, впрыскиваются водяные капли. Будем полагать, что после этого образуется однородная парок капельная смесь с объемным содержанием воды α_w и радиусами капель a . Для учета межфазного теплообмена примем ячеистую схему [1]. Радиусы ячеек и капель связаны соотношением $\alpha = (a/b)^3$. Уравнение, аналогичное (1.10), в данном случае запишется в виде

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{3a^2 R_v c_v T_s(p) \lambda_w}{(b^3 - a^3) l (c_v - R_v)} \left(\frac{\partial T_w}{\partial x} \right)_a, \quad (2.1)$$

здесь r — радиальная координата, отсчитываемая от центра капли.

Для задания теплового потока на поверхности капли в уравнении (2.1) воспользуемся решением следующей нестационарной задачи теплопроводности внутри сферы ($0 < r < a$):

$$\frac{\partial T_w}{\partial t} = \frac{\nu_w}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_w}{\partial r} \right)$$

при начальных и граничных условиях $T_w = T_{w0}$ ($t = 0$, $0 < r < a$), $\partial T_w / \partial r = 0$ ($t > 0$, $r = 0$), $T_w = T_a(t)$ ($t > 0$, $r = a$).

Решение этой задачи имеет вид [7]

$$T_w = \frac{2}{ar} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\nu_w n^2 \pi^2 t}{a^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi r}{a}\right) \times \\ \times \left[\int_0^a r' T_{w0} \sin\left(\frac{n\pi r'}{a}\right) dr' - n\pi \nu_w (-1)^n \int_0^t \exp\left(\frac{\nu_w n^2 \pi^2 \tau}{a^2}\right) T_a(\tau) d\tau \right].$$

Отсюда можем получить

$$\left(\frac{\partial T_w}{\partial r} \right)_a = \frac{1}{a} \left[(T_a(0) - T_{w0}) \theta_3\left(\frac{\nu_w t}{a^2}\right) + \int_0^t \frac{dT_a}{d\tau} \theta_3\left(\frac{\nu_w(t-\tau)}{a^2}\right) d\tau \right], \quad (2.2)$$

$$\theta_3(\xi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 \pi^2 \xi).$$

Подставляя (2.2) в (2.1), находим следующее интегродифференциальное уравнение для давления:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{3a R_v c_v T_s(p) \lambda_w}{(b^3 - a^3) l (c_v - R_v)} \times \\ \times \left[(T_a(0) - T_{w0}) \theta_3\left(\frac{\nu_w t}{a^2}\right) + \int_0^t \frac{dT_a}{d\tau} \theta_3\left(\frac{\nu_w(t-\tau)}{a^2}\right) d\tau \right].$$

Тета-функция $\theta_3(\xi)$ имеет асимптоты $1/\sqrt{\pi\xi}$ ($0 < \xi < 1.526/\pi^2$), $2 \exp(-\pi^2 \xi)$ ($\xi > 1.526/\pi^2$) [8], используя которые получаем для ранней стадии ($t \ll a^2/\nu_w$) уравнение, совпадающее по виду с (1.13). При этом коэффициент A следует взять в виде

$$A = \frac{3a^2 c_v \lambda_w}{(b^3 - a^3) (c_v - R_v) \sqrt{\pi \nu_w}}. \quad (2.3)$$

Для поздней стадии ($t \gg a^2/\nu_w$), используя вторую асимптотику, можем получить

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{B}{\ln(p_*/p)} \left[\Delta T \exp(-\eta t) + T_* \int_0^t \frac{dp/d\tau}{p \ln^2(p_*/p)} \exp(-\eta(t-\tau)) d\tau \right], \quad (2.4)$$

где $B = 2A/(a\sqrt{\pi\nu_w})$, $\eta = \pi^2\nu_w/a^2$.

Разностный аналог интегрального уравнения (2.4) будет иметь вид:

$$p_{i+1} = p_{i-1} - \frac{2Bh(\Delta T \exp(-\eta h) + T_* S)}{\ln(p_*/p_i)}, \quad (2.5)$$

$$S = \sum_{k=1}^i \frac{[\exp(-\eta h(i-k+1)) + \exp(-\eta h(i-k))][\dot{p}(t_k) + \dot{p}(t_{k-1})]}{p_k \ln^2(p_*/p_k) + p_{k-1} \ln^2(p_*/p_{k-1})}.$$

В численных расчетах начальная стадия ($0 \leq t \leq t_*$, $t_* = 1.526a^2/(\nu_w\pi^2)$) рассчитывалась на основе уравнения (1.14) с соответствующей поправкой коэффициента A из (2.3). Завершающая стадия изменения давления ($t \geq t_*$) рассчитывалась согласно уравнению (2.5) со шивкой значения давления при $t = t_*$ с решением для предыдущей стадии.

На рис. 2 представлена эволюция давления при различных значениях температуры воды T_{w0} . Для начального давления, радиуса капель и объемного содержания приняты значения $p_0 = 0.8$ МПа, $a = 2 \cdot 10^{-3}$ м, $\alpha_w = 5 \cdot 10^{-3}$.

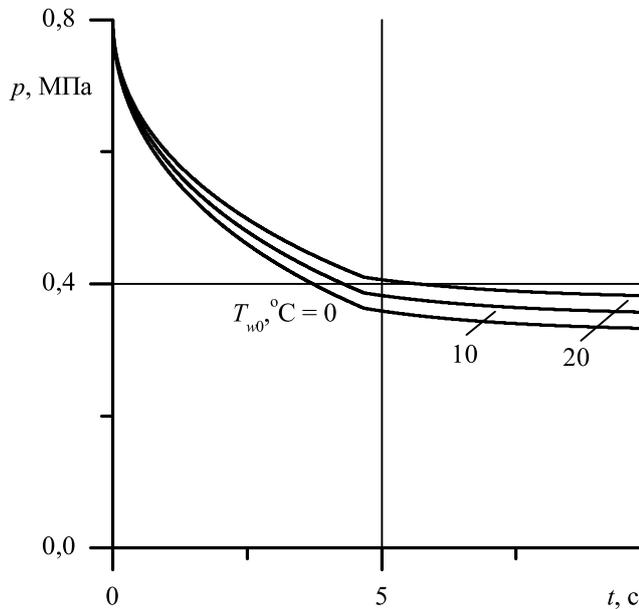


Рис. 2. Эволюция давления пара при различных начальных значениях температуры воды T_{w0} для случая инъекции капель

Видно, что независимо от температуры воды снижение давления в два раза от исходной величины происходит в течение нескольких секунд.

На рис. 3 представлена эволюция давления при начальном давлении $p_0 = 0.8$ МПа, температуре воды $T_{w0} = 10^\circ\text{C}$ и различных значениях радиуса капель $a = 10^{-3}$ (сплошные линии) и $a = 2 \cdot 10^{-3}$ (пунктирные линии) и объемного содержания α_w .

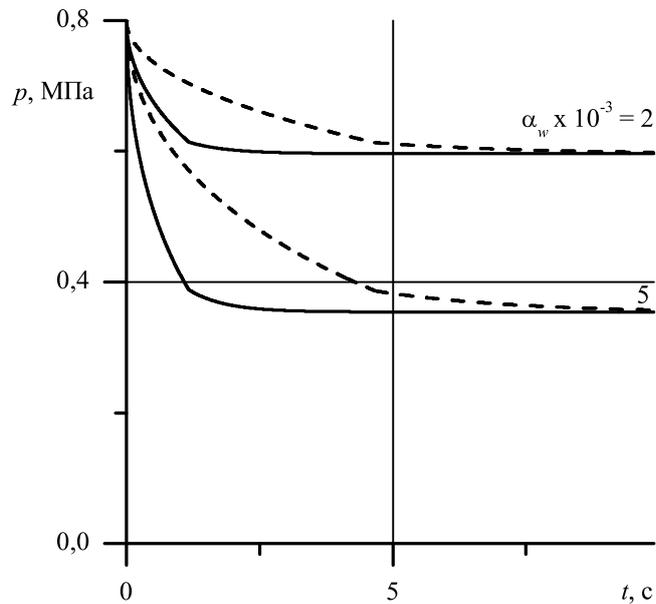


Рис. 3. Эволюция давления пара при различных значениях радиуса a и объемного содержания α_w

Из рис. 3 видно, что снижение давления до необходимых величин определяется объемным содержанием воды α_w , причем при одном и том же значении объемного содержания уменьшение размера капли приводит к ускорению процесса снижения давления пара в замкнутом объеме.

Таким образом, для оперативного снижения давления случай контакта пара с жидкостью на горизонтальной поверхности не является эффективным. В случае инъекции капель в пар путем подбора температуры воды и ее объемного содержания можно достичь снижения давления до необходимых величин за несколько секунд.

Литература

- [1] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред: в 2 ч. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с. Ч. 2. 360 с.
- [2] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004. 798 с.
- [3] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
- [4] Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980. 352 с.

- [5] Висицкий Е.В., Петров А.Г., Шундерюк М.М. Движение частицы в вязкой жидкости под действием силы тяжести и вибрации при наличии силы Басе // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 5. С. 763–775.
- [6] Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.
- [7] Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
- [8] Аль-Маннай М., Хабеев Н.С., Шагапов В.Ш. К вопросу об инъекции капель в пар с целью понижения давления // Изв. РАН. Сер.: Механика жидкости и газа. 2012. № 1. С. 115–118.

Поступила в редакцию 25/*XII*/2012;
в окончательном варианте — 25/*XII*/2012.

TO THE THEORY OF PRESSURE DECREASE OF STEAM ADJOINING TO A LIQUID IN THE CLOSED VOLUME

© 2012 V.Sh. Shagapov³ Y.A. Yumagulova⁴

In work the problem of pressure decrease of steam in the closed volume owing to condensation on border of contact to a cold liquid is considered. The nonlinear integrodifferential equations which numerical decision is executed by a method of final differences are received. Influence of an initial condition and the expense of a liquid, the geometrical size of the closed volume on rate of pressure decrease is analysed.

Key words: pressure of steam, vapour the drop medium, condensation, interphase heat exchange, injection of drops.

Paper received 25/*XII*/2012.
Paper accepted 25/*XII*/2012.

³Shagapov Vladislav Shayhulagzamovich (shagapov@rambler.ru), Institute of Mechanics of Ufa Branch, RAS, Ufa, 450025, Russian Federation.

⁴Yumagulova Yulia Alexandrovna (ym_julia@mail.ru), Dept. of the mathematical analysis and the applied mathematics, Birk branch of the Bashkir State University, Birk, 452453, Russian Federation.