УДК 517.925+531.01

НОВЫЙ СЛУЧАЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ДИНАМИКЕ МНОГОМЕРНОГО ТЕЛА

© 2012 Н.В. Походня[1], М.В. Шамолин[2]

В данной статье полученные результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие среды с четырехмерным телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости, которая перпендикулярна данному диску. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от тензора угловой скорости. Данная зависимость может быть распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

Ключевые слова: многомерное твердое тело, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

Введение

Ранее в [1] уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее [1; 2] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

В данной работе полученные результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие среды с четырехмерным телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости, которая перпендикулярна данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от

[1]Походня Наталья Витальевна (shamolin@rambler.ru), кафедра теоретической информатики и дискретной математики Московского педагогического государственного университета, 107140, Российская Федерация, г. Москва, ул. Краснопрудная, 14.

[2]Шамолин Максим Владимирович (shamolin@imec.msu.ru), Институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119899, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.

угловой скорости. Данная зависимость в дальнейшем может быть распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

1. Более общая задача о движении со следящей силой

Рассмотрим движение однородного динамически симметричного

$$I_1 = I_2, \;\; I_3 = I_4 \tag{1.1}$$

твердого тела с "передним торцом" (двумерным диском, "взаимодействующим со средой, заполняющей четырехмерное пространство") в поле силы $\mathbf{S}$ сопротивления в условиях квазистационарности [1].

Пусть $(v, \alpha, \beta_2, \beta_1)$ — координаты вектора скорости $\mathbf{v}_D$ некоторой характерной точки D твердого тела (D — центр двумерного диска) такие, что α — угол между вектором $\mathbf{v}_D$ и плоскостью Dx_1x_2, β_2 — угол, измеряемый в плоскости Dx_1x_2 до проекции вектора $\mathbf{v}_D$ на плоскость Dx_1x_2, β_1 — угол, измеряемый в плоскости Dx_3x_4 до проекции вектора $\mathbf{v}_D$ на плоскость Dx_3x_4,

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

— тензор угловой скорости тела, $Dx_1x_2x_3x_4$ — система координат, связанная с телом, при этом прямая CD лежит в плоскости Dx_1x_2 (C — центр масс), а оси Dx_3, Dx_4 лежат в гиперплоскости диска, $I_1, \; I_2, \; I_3, \; I_4, \; m$ — инерционно-массовые характеристики.

Примем следующие разложения в проекциях на оси системы координат $Dx_1x_2x_3x_4$:

$$\mathbf{DC} = \{\sigma \sin\gamma, -\sigma\cos\gamma, 0, 0\},$$
$$\mathbf{v}_D = \{v\cos\alpha\sin\beta_2, v\cos\alpha\cos\beta_2, v\sin\alpha\cos\beta_1, v\sin\alpha\sin\beta_1\}. \tag{1.2}$$

При этом в случае (1.1) также будет справедливо разложение для функции воздействия среды на четырехмерное тело:

$$\mathbf{S} = \{S_1, S_2, 0, 0\}, \tag{1.3}$$

при этом

$$S_1 = S\sin\gamma, \;\; S_2 = -S\cos\gamma, \;\; \gamma = \mathrm{const}, \tag{1.4}$$

т. е. в данном случае $\mathbf{F} = \mathbf{S}$, и угол γ измеряется в плоскости Dx_1x_2.

Тогда та часть динамических уравнений движения тела (в том числе и в случае аналитических функций Чаплыгина [3; 4]), которые описывают движение центра масс и соответствуют пространству $\mathbf{R}^4$, при котором касательные силы воздействия среды на двумерный диск отсутствуют, примет вид:

$$\dot{v}\cos\alpha\sin\beta_2 - \dot{\alpha}v\sin\alpha\sin\beta_2 + \dot{\beta}_2 v\cos\alpha\cos\beta_2 -$$
$$-\omega_6 v\cos\alpha\cos\beta_2 + \omega_5 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \omega_3 v\sin\alpha\sin\beta_1 -$$
$$-\sigma(\omega_6^2 + \omega_5^2 + \omega_3^2)\sin\gamma - \sigma(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3)\cos\gamma +$$

$$+\sigma\dot{\omega}_6 \cos\gamma = \frac{S_1}{m}, \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered}\dot{v}\cos\alpha\cos\beta_2 - \dot{\alpha}v\sin\alpha\cos\beta_2 - \dot{\beta}_2 v\cos\alpha\sin\beta_2 + \\ +\omega_6 v\cos\alpha\sin\beta_2 - \omega_4 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \\ +\sigma(\omega_6^2+\omega_4^2+\omega_2^2)\cos\gamma + \sigma(\omega_4\omega_5+\omega_2\omega_3)\sin\gamma + \\ +\sigma\dot{\omega}_6\sin\gamma = \frac{S_2}{m},\end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered}\dot{v}\sin\alpha\cos\beta_1 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 - \\ -\omega_5 v\cos\alpha\sin\beta_2 + \omega_4 v\cos\alpha\cos\beta_2 - \omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \\ +\sigma(\omega_4\omega_6-\omega_1\omega_3)\sin\gamma - \sigma(\omega_5\omega_6+\omega_1\omega_2)\cos\gamma - \\ -\sigma\dot{\omega}_5\sin\gamma - \sigma\dot{\omega}_4\cos\gamma = 0,\end{gathered} \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered}\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \\ +\omega_3 v\cos\alpha\sin\beta_2 - \omega_2 v\cos\alpha\cos\beta_2 + \omega_1 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \\ -\sigma(\omega_2\omega_6+\omega_1\omega_5)\sin\gamma + \sigma(\omega_3\omega_6-\omega_1\omega_4)\cos\gamma + \\ +\sigma\dot{\omega}_3\sin\gamma + \sigma\dot{\omega}_2\cos\gamma = 0,\end{gathered} \tag{1.8}$$

где

$$S = s(\alpha)v^2, \ \ \sigma = CD, \ \ v > 0. \tag{1.9}$$

Далее вспомогательная матрица для вычисления момента силы сопротивления примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{3N} & x_{4N} \\ S_1 & S_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

тогда та часть динамических уравнений движения тела, которые описывают движение тела вокруг центра масс и соответствуют алгебре Ли so(4), примет вид:

$$(\lambda_4+\lambda_3)\dot{\omega}_1 + (\lambda_3-\lambda_4)(\omega_3\omega_5+\omega_2\omega_4) = 0, \tag{1.11}$$

$$(\lambda_2+\lambda_4)\dot{\omega}_2 + (\lambda_2-\lambda_4)(\omega_3\omega_6-\omega_1\omega_4) = -x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2\cos\gamma, \tag{1.12}$$

$$(\lambda_4+\lambda_1)\dot{\omega}_3 + (\lambda_4-\lambda_1)(\omega_2\omega_6+\omega_1\omega_5) = -x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2\sin\gamma, \tag{1.13}$$

$$(\lambda_3+\lambda_2)\dot{\omega}_4 + (\lambda_2-\lambda_3)(\omega_5\omega_6+\omega_1\omega_2) = x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2\cos\gamma, \tag{1.14}$$

$$(\lambda_1+\lambda_3)\dot{\omega}_5 + (\lambda_3-\lambda_1)(\omega_4\omega_6-\omega_1\omega_3) = x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2\sin\gamma, \tag{1.15}$$

$$(\lambda_1+\lambda_2)\dot{\omega}_6 + (\lambda_1-\lambda_2)(\omega_4\omega_5+\omega_2\omega_3) = 0. \tag{1.16}$$

Таким образом фазовым пространством системы (1.5)–(1.8), (1.11)–(1.16) десятого порядка является прямое произведение четырехмерного многообразия на алгебру Ли so(4):

$$\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^3 \times \mathrm{so}(4). \tag{1.17}$$

Сразу же заметим, что система (1.5)–(1.8), (1.11)–(1.16) в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_1 = I_2, \ \ I_3 = I_4 \tag{1.18}$$

обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_1 \equiv \omega_1^0 = \text{const}, \;\; \omega_6 \equiv \omega_6^0 = \text{const}. \tag{1.19}$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_6^0 = 0. \tag{1.20}$$

Если же рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, действующей на плоскости Dx_1x_2 и обеспечивающей во все время движения выполнение равенств (см. также [2])

$$v \equiv \text{const}, \;\; \beta_2 \equiv \text{const}, \tag{1.21}$$

то в системе (1.5)–(1.8), (1.11)–(1.16) вместо F_1 и F_2 будут стоять соответственно величины

$$T_1 + S_1, \;\; T_2 + S_2. \tag{1.22}$$

В результате соответствующего выбора величины T следящей силы можно формально добиться во все время движения выполнения равенств (1.21). Действительно, формально выражая величину T в силу системы (1.5)–(1.8), (1.11)–(1.16), получим при $\cos\alpha \neq 0$:

$$\begin{gathered} T_1 = T_{1,v,\beta 2}(\alpha, \beta_1, \Omega) = \\ = -m\sigma(\omega_5^2 + \omega_3^2)\sin\gamma - m\sigma(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3)\cos\gamma + \\ + m\omega_5 v \sin\alpha\cos\beta_1\cos^2\beta_2 - m\omega_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos^2\beta_2 + \\ + m\omega_4 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_2 - m\omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_2 - \\ - s(\alpha)v^2\left[\sin\gamma - \frac{m\sigma}{I_1+I_3}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin\beta_2\cdot\Lambda_{v,\beta_2}\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\right], \end{gathered} \tag{1.23}$$

$$\begin{gathered} T_2 = T_{2,v,\beta 2}(\alpha, \beta_1, \Omega) = \\ = m\sigma(\omega_4^2 + \omega_2^2)\cos\gamma + m\sigma(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3)\sin\gamma - \\ - m\omega_4 v \sin\alpha\cos\beta_1\sin^2\beta_2 + m\omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin^2\beta_2 - \\ - m\omega_5 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_2 + m\omega_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_2 + \\ + s(\alpha)v^2\left[\cos\gamma - \frac{m\sigma}{I_1+I_3}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\beta_2\cdot\Lambda_{v,\beta_2}\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\right], \end{gathered} \tag{1.24}$$

где

$$\begin{gathered} \Lambda_{v,\beta_2}\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right) = x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1 + \\ + x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1. \end{gathered} \tag{1.25}$$

При получении равенств (1.23) и (1.24) используются условия (1.19)–(1.21).

На данную процедуру можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы при помощи наличия в ней следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующих нас классов движений (1.21). Во-вторых, на это все можно посмотреть как на процедуру, позволяющую понизить порядок системы. Действительно, система (1.5)–(1.8), (1.11)–(1.16) в результате действий порождает независимую систему шестого порядка следующего вида:

$$\begin{gathered} \dot\alpha v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot\beta_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 - \omega_5 v\cos\alpha\sin\beta_2 + \\ + \omega_4 v\cos\alpha\cos\beta_2 - \sigma\dot\omega_5\sin\gamma - \sigma\dot\omega_4\cos\gamma = 0, \end{gathered} \tag{1.26}$$

$$\dot{\alpha} v\cos\alpha\sin\beta_1 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \omega_3 v\cos\alpha\sin\beta_2 -$$
$$-\omega_2 v\cos\alpha\cos\beta_2 + \sigma\dot{\omega}_3\sin\gamma + \sigma\dot{\omega}_2\cos\gamma = 0, \tag{1.27}$$
$$(I_1+I_3)\dot{\omega}_2 = -x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2\cos\gamma, \tag{1.28}$$
$$(I_1+I_3)\dot{\omega}_3 = -x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2\sin\gamma, \tag{1.29}$$
$$(I_1+I_3)\dot{\omega}_4 = x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2\cos\gamma, \tag{1.30}$$
$$(I_1+I_3)\dot{\omega}_5 = x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2\sin\gamma, \tag{1.31}$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляются параметры v, β_2.

1.1. Две системы рассуждений об интегрируемости

Замечание (об аналитических первых интегралах). Видно, что система (1.26)–(1.31) обладает двумя аналитическими первыми интегралами, выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций:

$$\omega_2\sin\gamma - \omega_3\cos\gamma = W_1' = \mathrm{const}, \tag{1.32}$$
$$\omega_4\sin\gamma - \omega_5\cos\gamma = W_2' = \mathrm{const}. \tag{1.33}$$

Прежде всего это означает, что систему (1.26)–(1.31) можно редуцировать к системе четвертого порядка на своем четырехмерном фазовом многообразии.

В дальнейшем при исследовании системы (1.26)–(1.31) можно пойти следующими путями (т. е. принять следующие системы рассуждений).

I. Во-первых, можно "не замечать" наличие в системе первых интегралов вида (1.32), (1.33). Тогда, проводя ряд эквивалентных преобразований, можно пытаться привести исследуемую систему (1.26)–(1.31) к эквивалентной системе, в которой произойдет отделение систем меньших размерностей. При этом для полного ее интегрирования достаточно будет получить количество независимых первых интегралов, меньшее на две единицы, в силу (1.32), (1.33).

II. Во-вторых, можно сразу же воспользоваться первыми интегралами (1.32), (1.33), выразив две интересующие фазовые переменные из списка $\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$. Получим при этом как раз систему четвертого порядка как систему, являющуюся редукцией системы (1.26)–(1.31) на некоторое четырехмерное фазовое многообразие.

Для начала выберем систему рассуждений **I**.

Действительно, система (1.26)–(1.31) эквивалентна

$$\dot{\alpha} v\cos\alpha - \omega_5 v\cos\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2 + \omega_4 v\cos\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2 +$$
$$+\omega_3 v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - \omega_2 v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - \sigma\dot{\omega}_5\sin\gamma\cos\beta_1 -$$
$$-\sigma\dot{\omega}_4\cos\gamma\cos\beta_1 + \sigma\dot{\omega}_3\sin\gamma\sin\beta_1 + \sigma\dot{\omega}_2\cos\gamma\sin\beta_1 = 0, \tag{1.34}$$
$$\dot{\beta}_1 v\sin\alpha + \omega_3 v\cos\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2 - \omega_2 v\cos\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2 +$$
$$+\omega_5 v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - \omega_4 v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \sigma\dot{\omega}_3\sin\gamma\cos\beta_1 +$$
$$+\sigma\dot{\omega}_2\cos\gamma\cos\beta_1 + \sigma\dot{\omega}_5\sin\gamma\sin\beta_1 + \sigma\dot{\omega}_4\cos\gamma\sin\beta_1 = 0, \tag{1.35}$$

$$\dot{\omega}_2 = -\frac{v^2}{I_1+I_3} x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)\cos\gamma, \tag{1.36}$$

$$\dot{\omega}_3 = -\frac{v^2}{I_1+I_3} x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)\sin\gamma, \tag{1.37}$$

$$\dot{\omega}_4 = \frac{v^2}{I_1+I_3} x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)\cos\gamma, \tag{1.38}$$

$$\dot{\omega}_5 = \frac{v^2}{I_1+I_3} x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)\sin\gamma. \tag{1.39}$$

Введем новые квазискорости в системе. Для этого преобразуем величины $\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$ посредством композиции следующих поворотов:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ -z_2 \end{pmatrix} = T_*(-\beta_1)\begin{pmatrix} \omega_3 \\ \omega_5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_3 \\ -z_4 \end{pmatrix} = T_*(-\beta_1)\begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_4 \end{pmatrix}, \tag{1.40}$$

где

$$T_*(\beta_1) = \begin{pmatrix} \cos\beta_1 & -\sin\beta_1 \\ \sin\beta_1 & \cos\beta_1 \end{pmatrix}, \tag{1.41}$$

а также

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = T_*(\beta_2)\begin{pmatrix} z_3 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = T_*(-\beta_2)\begin{pmatrix} -z_4 \\ z_2 \end{pmatrix}. \tag{1.42}$$

Таким образом, справедливы следующие соотношения:

$$z_1 = \omega_3\cos\beta_1 + \omega_5\sin\beta_1, \quad z_2 = \omega_3\sin\beta_1 - \omega_5\cos\beta_1,$$

$$z_3 = \omega_2\cos\beta_1 + \omega_4\sin\beta_1, \quad z_4 = \omega_2\sin\beta_1 - \omega_4\cos\beta_1,$$

$$w_1 = -z_1\sin\beta_2 + z_3\cos\beta_2, \quad w_2 = z_3\sin\beta_2 + z_1\cos\beta_2,$$

$$w_3 = z_2\sin\beta_2 - z_4\cos\beta_2, \quad w_4 = z_4\sin\beta_2 + z_2\cos\beta_2.$$

Как видно из (1.34)–(1.39), на многообразии

$$O_2 = \left\{(\alpha, \beta_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5) \in \mathbf{R}^6 : \ \alpha = \frac{\pi}{2}k, \ k \in \mathbf{Z}\right\} \tag{1.43}$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}_1$. Формально, таким образом, на многообразии (1.43) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, во-первых, при k четном или нечетном неопределенность возникает по причине вырождения координат $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$, параметризующих трехмерную сферу (но не являющихся классическими сферическими координатами), а, во-вторых, при k нечетном происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом первое уравнение (1.34) вырождается.

Из этого следует, что система (1.34)–(1.39) вне и только вне многообразия (1.43) эквивалентна системе

$$\dot{\alpha} = -w_3 + \frac{\sigma v}{I_1+I_3}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Lambda_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right), \tag{1.44}$$

$$\begin{gathered}\dot{w}_4 = -\frac{v^2}{I_1+I_3} s(\alpha)\sin(\beta_2+\gamma)\Lambda_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) + \\ + w_2\left[w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sigma v}{I_1+I_3}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\right],\end{gathered} \tag{1.45}$$

$$\dot{w}_3 = \frac{v^2}{I_1+I_3} s(\alpha)\cos(\beta_2+\gamma)\Lambda_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) -$$

$$-w_1\left[w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sigma v}{I_1+I_3}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\right], \tag{1.46}$$

$$\dot{w}_2=\frac{v^2}{I_1+I_3}s(\alpha)\sin(\beta_2+\gamma)\Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)-$$

$$-w_4\left[w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sigma v}{I_1+I_3}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\right], \tag{1.47}$$

$$\dot{w}_1=\frac{v^2}{I_1+I_3}s(\alpha)\cos(\beta_2+\gamma)\Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)+$$

$$+w_3\left[w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sigma v}{I_1+I_3}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\right], \tag{1.48}$$

$$\dot{\beta}_1=w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sigma v}{I_1+I_3}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right), \tag{1.49}$$

где

$$\Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)=-x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1+$$

$$+x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1, \tag{1.50}$$

а функция $\Lambda_{v,\beta_2}(\alpha,\beta_1,\Omega/v)$ представлена в виде (1.25).

Здесь и далее зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\beta_2,z_1/v,z_2/v,z_3/v,z_4/v)$ (или $(\alpha,\beta_1,\beta_2,w_1/v,w_2/v,w_3/v,w_4/v)$).

Нарушение теоремы единственности для системы (1.34)–(1.39) на многообразии (1.43) при нечетном k происходит в следующем смысле: почти через любую точку из многообразия (1.43) при нечетном k проходит неособая фазовая траектория системы (1.34)–(1.39), пересекая многообразие (1.43) под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения следящей силы.

2. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

2.1. Введение зависимости от угловой скорости

Пусть $x=(x_{1N},x_{2N},x_{3N},x_{4N})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на двумерный диск, $Q=(Q_1,Q_2,Q_3,Q_4)$ — компоненты силы $\mathbf{S}$ воздействия среды, не зависящие от тензора угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N},x_{2N},x_{3N},x_{4N})$ от тензора угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно [1].

Итак, примем следующую зависимость:

$$x=Q+R, \tag{2.1}$$

где $R=(R_1,R_2,R_3,R_4)$ — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости. При этом зависимость функции R от компонент тензора угловой скорости гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Здесь (h_1, h_2, h_3, h_4) — некоторые положительные параметры (ср. с [1]).

Теперь применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} \equiv x_{2N} \equiv 0$, то

$$x_{3N} = Q_3 - \frac{h_1}{v}(\omega_4 - \omega_5), \;\; x_{4N} = Q_4 - \frac{h_1}{v}(\omega_3 - \omega_2). \tag{2.3}$$

2.2. Приведенная система

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [4]

$$Q_3 = A \sin\alpha \cos\beta_1, \;\; Q_4 = A \sin\alpha \sin\beta_1, \;\; A > 0, \tag{2.4}$$

динамические функции s, x_{3N} и x_{4N} примем в следующем виде:

$$\begin{gathered} s(\alpha) = B\cos\alpha, \;\; B > 0, \\ x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = A \sin\alpha \cos\beta_1 - \frac{h}{v}(\omega_4 - \omega_5), \;\; h = h_1 > 0, \;\; v \neq 0, \\ x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = A \sin\alpha \sin\beta_1 - \frac{h}{v}(\omega_3 - \omega_2), \;\; h = h_2 > 0, \;\; v \neq 0, \end{gathered} \tag{2.5}$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т. е. присутствует зависимость момента от компонент тензора угловой скорости). Причем $h_1 = h_2$, $h_3 = h_4$ в силу рассматриваемой динамической симметрии (1.18) тела.

Выберем далее систему рассуждений **I**, которая в дальнейшем учитывает и систему рассуждений **II** (см. выше).

Для этого в данном разделе попробуем ввести следующие фазовые переменные:

$$u_1 = \omega_2 - \omega_3, \;\; u_2 = \omega_4 - \omega_5, \;\; u_3 = \omega_2 \cos\beta_2 - \omega_3 \sin\beta_2, \;\; u_4 = \omega_4 \cos\beta_2 - \omega_5 \sin\beta_2.$$

Тогда уравнения (1.34)–(1.39) при условии (2.5) вне и только вне многообразия

$$O_3 = \left\{(\alpha, \beta_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5) \in \mathbf{R}^6 : \;\; \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, \;\; k \in \mathbf{Z}\right\} \tag{2.6}$$

преобразуются в следующие уравнения:

$$\begin{gathered} \dot\alpha - u_3 \sin\beta_1 + u_4 \cos\beta_1 - \\ -\sigma n_0^2 v \sin\alpha + \sigma H_1'[-u_1 \sin\beta_1 + u_2 \cos\beta_1] = 0, \end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered} \dot\beta_1 \sin\alpha - \\ -\cos\alpha[u_3 \cos\beta_1 + u_4 \sin\beta_1] - \sigma H_1' \cos\alpha[u_1 \cos\beta_1 + u_2 \sin\beta_1] = 0, \end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\dot u_1 = -n_0^2 v^2 r_1 \sin\alpha \cos\alpha \sin\beta_1 - \frac{Bvh}{I_1 + I_3} r_1 u_1 \cos\alpha, \tag{2.9}$$

$$\dot u_2 = n_0^2 v^2 r_1 \sin\alpha \cos\alpha \cos\beta_1 - \frac{Bvh}{I_1 + I_3} r_1 u_2 \cos\alpha, \tag{2.10}$$

$$\dot{u}_3 = -n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\cos(\gamma+\beta_2) - \\ -\frac{Bvh}{I_1+I_3} u_1 \cos\alpha\cos(\gamma+\beta_2), \tag{2.11}$$

$$\dot{u}_4 = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta_1\cos(\gamma+\beta_2) - \\ -\frac{Bvh}{I_1+I_3} u_2 \cos\alpha\cos(\gamma+\beta_2), \tag{2.12}$$

где

$$r_1 = \cos\gamma - \sin\gamma \neq 0,\ \ n_0^2 = \frac{AB}{I_1+I_3},\ \ H_1' = \frac{Bh}{I_1+I_3}. \tag{2.13}$$

Введем далее следующие фазовые переменные по формулам:

$$v_1 = -u_1\sin\beta_1 + u_2\cos\beta_1,\ \ v_2 = u_1\cos\beta_1 + u_2\sin\beta_1,$$

$$v_3 = -u_3\sin\beta_1 + u_4\cos\beta_1,\ \ v_4 = u_3\cos\beta_1 + u_4\sin\beta_1.$$

Тогда вне и только вне многообразия

$$O_4 = \big\{(\alpha,\beta_1,u_1,u_2,u_3,u_4)\in\mathbf{R}^6:\ \ \beta_1 = \pi k,\ \ k\in\mathbf{Z}\big\} \tag{2.14}$$

система (2.7)–(2.12) примет вид

$$\dot{\alpha} = -v_3 - bH_1 v_1 + b\sin\alpha, \tag{2.15}$$

$$\dot{\beta}_1 = [v_4 + bH_1 v_2]\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.16}$$

$$\dot{v}_1 = n_0^2 v^2 r_1 \sin\alpha\cos\alpha - \\ -H_1' v r_1 v_1 \cos\alpha - v_2\cdot[v_4 + bH_1 v_2]\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.17}$$

$$\dot{v}_2 = -H_1' v r_1 v_2\cos\alpha + v_1\cdot[v_4 + bH_1 v_2]\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.18}$$

$$\dot{v}_3 = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\cos(\gamma+\beta_2) - \\ -H_1' v v_1 \cos\alpha\cos(\gamma+\beta_2) - v_4\cdot[v_4 + bH_1 v_2]\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.19}$$

$$\dot{v}_4 = -H_1' v v_2\cos\alpha\cos(\gamma+\beta_2) + v_3\cdot[v_4 + bH_1 v_2]\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.20}$$

где по-прежнему вводим безразмерные параметры следующим образом:

$$n_0^2 = \frac{AB}{I_1+I_3},\ \ b = \sigma n_0,\ \ [b] = 1,\ \ H_1 = \frac{H_1'}{n_0} = \frac{Bh}{(I_1+I_3)n_0},\ \ [H_1] = 1. \tag{2.21}$$

Введем также еще одну вспомогательную замену части фазовых переменных системы, а именно:

$$s_1 = v_3 + bH_1 v_1,\ \ s_2 = v_4 + bH_1 v_2. \tag{2.22}$$

Тогда исследуемая система (2.15)–(2.20) после введения безразмерных переменных и дифференцирования

$$v_k \mapsto n_0 v v_k,\ \ k = 1,\ldots,4,\ \ <\cdot> = n_0 v <'>, \tag{2.23}$$

перепишется в виде

$$\alpha' = -s_1 + b\sin\alpha, \tag{2.24}$$

$$\beta_1' = s_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.25}$$

$$s_1' = R_1\sin\alpha\cos\alpha - s_2^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - R_1 H_1 v_1\cos\alpha, \tag{2.26}$$

$$s_2' = s_1 s_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - R_1 H_1 v_2 \cos\alpha, \tag{2.27}$$

$$v_1' = R_2 \sin\alpha\cos\alpha - s_2 v_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 R_2 v_1 \cos\alpha, \tag{2.28}$$

$$v_2' = s_2 v_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 R_2 v_2 \cos\alpha, \tag{2.29}$$

где

$$R_1 = bH_1(\cos\gamma - \sin\gamma) + \cos(\gamma + \beta_2), \;\; R_2 = r_1 = \cos\gamma - \sin\gamma. \tag{2.30}$$

Видно, что формально при $H_1 = 0$ в системе (2.24)–(2.29) выделяется независимая подсистема четвертого порядка (2.24)–(2.27) на касательном расслоении $T\mathbf{S}^2$ к двумерной сфере $\mathbf{S}^2\{0 < \alpha < \pi,\ 0 \leqslant \beta_1 < 2\pi\}$, в которой, в свою очередь, может быть выделена независимая подсистема третьего порядка (2.24), (2.26), (2.27) на своем трехмерном фазовом многообразии.

Но это в принципе и понятно, поскольку при $H_1 = 0$ мы попадаем в условия отсутствия зависимости момента сил от тензора угловой скорости. Последнее позволяет аналогичным образом вполне проинтегрировать рассматриваемую систему четвертого порядка (2.24)–(2.27), а значит, и рассматриваемую систему шестого порядка (2.24)–(2.29), поскольку существуют два независимых аналитических первых интеграла (1.32), (1.33) (см. выше о двух системах рассуждений **I** и **II**).

В данном же случае для нас существенно, что $H_1 \neq 0$. Поэтому преобразуем имеющиеся аналитические первые интегралы (1.32), (1.33). Имеем их явный вид в разных координатах:

$$\frac{u_3 - u_1\sin\beta_2}{\cos\beta - 2 - \sin\beta_2}\sin\gamma - \frac{u_3 - u_1\cos\beta_2}{\cos\beta - 2 - \sin\beta_2}\cos\gamma = W_1' = \mathrm{const}, \tag{2.31}$$

$$\frac{u_4 - u_2\sin\beta_2}{\cos\beta - 2 - \sin\beta_2}\sin\gamma - \frac{u_4 - u_2\cos\beta_2}{\cos\beta - 2 - \sin\beta_2}\cos\gamma = W_2' = \mathrm{const}. \tag{2.32}$$

Если мы рассматриваем случай (1.21) (т. е., в частности, когда величина β_2 является тождественной постоянной вдоль фазовых траекторий), то следующие аналитические функции постоянны на фазовых траекториях рассматриваемой системы:

$$u_3(\sin\gamma - \cos\gamma) + u_1\cos(\gamma + \beta_2) = W_1^0 = \mathrm{const}, \tag{2.33}$$

$$u_4(\sin\gamma - \cos\gamma) + u_2\cos(\gamma + \beta_2) = W_2^0 = \mathrm{const}. \tag{2.34}$$

В других переменных последние два инвариантных соотношения примут вид

$$\begin{gathered}(v_2\cos\beta_1 - v_1\sin\beta_1)\cos(\gamma+\beta_2) + \\ +(v_4\cos\beta_1 - v_3\sin\beta_1)(\sin\gamma - \cos\gamma) = W_1^0 = \mathrm{const},\end{gathered} \tag{2.35}$$

$$\begin{gathered}(v_2\sin\beta_1 + v_1\cos\beta_1)\cos(\gamma+\beta_2) + \\ +(v_4\sin\beta_1 + v_3\cos\beta_1)(\sin\gamma - \cos\gamma) = W_2^0 = \mathrm{const},\end{gathered} \tag{2.36}$$

или

$$\begin{gathered}R_1 v_2\cos\beta_1 - R_1 v_1\sin\beta_1 + \\ +R_2[s_1\sin\beta_1 - s_2\cos\beta_1] = W_1^0 = \mathrm{const},\end{gathered} \tag{2.37}$$

$$\begin{gathered}R_1 v_2\sin\beta_1 + R_1 v_1\cos\beta_1 - \\ -R_2[s_1\cos\beta_1 + s_2\sin\beta_1] = W_2^0 = \mathrm{const}.\end{gathered} \tag{2.38}$$

Далее выразим из соотношений (2.37), (2.38) величины v_1, v_2. Имеем:

$$v_2 R_1 = R_2 s_2 + \psi_1(\beta_1, W_1^0, W_2^0), \tag{2.39}$$

$$v_1 R_1 = R_2 s_1 + \psi_2(\beta_1, W_1^0, W_2^0), \tag{2.40}$$

где

$$\psi_1(\beta_1, W_1^0, W_2^0) = W_1^0\cos\beta_1 + W_2^0\sin\beta_1, \ \ \psi_2(\beta_1, W_1^0, W_2^0) = W_2^0\cos\beta_1 - W_1^0\sin\beta_1.$$

Тогда система (2.24)–(2.27) примет вид независимой системы четвертого порядка:

$$\alpha' = -s_1 + b\sin\alpha, \tag{2.41}$$

$$s_1' = R_1\sin\alpha\cos\alpha - s_2^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} -$$
$$-R_2H_1s_1\cos\alpha - H_1\psi_2(\beta_1, W_1^0, W_2^0)\cos\alpha, \tag{2.42}$$

$$s_2' = s_1s_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} -$$
$$-R_2H_1s_2\cos\alpha - H_1\psi_1(\beta_1, W_1^0, W_2^0)\cos\alpha, \tag{2.43}$$

$$\beta_1' = s_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{2.44}$$

Систему (2.41)–(2.44) можно рассматривать как систему (2.24)–(2.27), редуцированную на уровни (W_1^0, W_2^0) аналитических первых интегралов (2.37), (2.38).

Очевидно, что

$$\psi_1(\beta_1, 0, 0) \equiv \psi_2(\beta_1, 0, 0) \equiv 0. \tag{2.45}$$

Поэтому будем рассматривать систему (2.41)–(2.44) на нулевых уровнях аналитических первых интегралов (2.37), (2.38):

$$W_1^0 = W_2^0 = 0, \tag{2.46}$$

которая примет вид

$$\alpha' = -s_1 + b\sin\alpha, \tag{2.47}$$

$$s_1' = R_1\sin\alpha\cos\alpha - s_2^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - R_2H_1s_1\cos\alpha, \tag{2.48}$$

$$s_2' = s_1s_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - R_2H_1s_2\cos\alpha, \tag{2.49}$$

$$\beta_1' = s_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{2.50}$$

Данная система может быть рассмотрена на касательном расслоении $T\mathbf{S}^2$ к двумерной сфере $\mathbf{S}^2\{0 < \alpha < \pi, \ 0 \leqslant \beta_1 < 2\pi\}$, в которой, в свою очередь, может быть выделена независимая подсистема третьего порядка (2.47)–(2.49) на своем трехмерном фазовом многообразии.

Итак, для интегрирования системы шестого порядка мы для начала использовали систему расссуждений **I** (см. выше), когда еще не учитывали наличие двух независимых аналитических первых интегралов вида (1.32), (1.33). Впоследствии мы ограничили (средуцировали) рассматриваемую систему шестого порядка на уровни (далее нулевые) данных первых интегралов, т. е. была использована система рассуждений **II** (см. выше).

2.3. Полный список инвариантных соотношений

Для начала сопоставим системе третьего порядка (2.47)–(2.49) неавтономную систему второго порядка

$$\frac{ds_1}{d\alpha} = \frac{R_1\sin\alpha\cos\alpha - s_2^2\cos\alpha/\sin\alpha - R_2H_1s_1\cos\alpha}{-s_1 + b\sin\alpha},$$

$$\frac{ds_2}{d\alpha} = \frac{s_1s_2\cos\alpha/\sin\alpha - R_2H_1s_2\cos\alpha}{-s_1 + b\sin\alpha}.$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему в алгебраическом виде

$$\frac{ds_1}{d\tau} = \frac{R_1\tau - s_2^2/\tau - R_2H_1s_1}{-s_1 + b\tau}, \quad \frac{ds_2}{d\tau} = \frac{s_1s_2/\tau - R_2H_1s_2}{-s_1 + b\tau}.$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$s_1 = t_1\tau, \quad s_2 = t_2\tau, \tag{2.51}$$

приводим ее к следующему виду:

$$\tau\frac{dt_1}{d\tau} + t_1 = \frac{R_1 - t_2^2 - R_2H_1t_1}{-t_1 + b}, \quad \tau\frac{dt_2}{d\tau} + t_2 = \frac{t_1t_2 - R_2H_1t_2}{-t_1 + b},$$

что эквивалентно

$$\tau\frac{dt_1}{d\tau} = \frac{t_1^2 - t_2^2 - (b + R_2H_1)t_1 + R_1}{-t_1 + b}, \quad \tau\frac{dt_2}{d\tau} = \frac{2t_1t_2 - (b + R_2H_1)t_2}{-t_1 + b}.$$

Сопоставим системе второго порядка неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{dt_1}{dt_2} = \frac{t_1^2 - t_2^2 - (b + R_2H_1)t_1 + R_1}{2t_1t_2 - (b + R_2H_1)t_2}, \tag{2.52}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{t_1^2 + t_2^2 - (b + R_2H_1)t_1 + R_1}{t_2}\right) = 0. \tag{2.53}$$

Итак, уравнение (2.52) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{t_1^2 + t_2^2 - (b + R_2H_1)t_1 + R_1}{t_2} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{2.54}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\frac{s_1^2 + s_2^2 - (b + R_2H_1)s_1\sin\alpha + R_1\sin^2\alpha}{s_2\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{2.55}$$

Замечание 1. Рассмотрим систему (2.47)–(2.49) с переменной диссипацией с нулевым средним [1], становящейся консервативной при $b = R_2H_1$:

$$\alpha' = -s_1 + b\sin\alpha,$$
$$s_1' = R_1\sin\alpha\cos\alpha - s_2^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - bs_1\cos\alpha,$$
$$s_2' = s_1s_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - bs_2\cos\alpha.$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$s_1^2 + s_2^2 - 2bs_1\sin\alpha + R_1\sin^2\alpha = C_1^* = \mathrm{const}, \tag{2.56}$$

$$s_2\sin\alpha = C_2^* = \mathrm{const}. \tag{2.57}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (2.56), (2.57) также является первым интегралом исходной системы. Но при $b \neq R_2H_1$ каждая из функций

$$s_1^2 + s_2^2 - (b + R_2H_1)s_1\sin\alpha + R_1\sin^2\alpha \tag{2.58}$$

и (2.57) по отдельности не является первым интегралом системы (2.47)–(2.49). Однако отношение функций (2.58), (2.57) является первым интегралом системы (2.47)–(2.49) при любых b, R_2H_1.

Далее найдем стуктурный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (2.47)–(2.49). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (2.54) при $t_2 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(t_1 - \frac{b + R_2 H_1}{2}\right)^2 + \left(t_2 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{(b + R_2 H_1)^2 + C_1^2 - 4R_1}{4}. \tag{2.59}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b + R_2 H_1)^2 + C_1^2 - 4R_1 \geqslant 0, \tag{2.60}$$

и фазовое пространство системы (2.47)–(2.49) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (2.59).

Таким образом, в силу соотношения (2.54) одно из уравнений системы примет вид

$$\tau \frac{dt_1}{d\tau} = \frac{2t_1^2 - 2(b + R_2 H_1)t_1 + 2R_1 - C_1 U_1(C_1, t_1)}{b - t_1}, \tag{2.61}$$

где

$$U_1(C_1, t_1) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm U_2(C_1, t_1)\}, \tag{2.62}$$

$$U_2(C_1, t_1) = \sqrt{C_1^2 - 4(R_1 - (b + R_2 H_1)t_1 + t_1^2)},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (2.60).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (2.47)–(2.49) примет вид

$$\int \frac{d\tau}{\tau} =$$

$$= \int \frac{(b - t_1)dt_1}{2(R_1 - (b + R_2 H_1)t_1 + t_1^2) - C_1\{C_1 \pm U_2(C_1, t_1)\}/2}. \tag{2.63}$$

Замечание 2. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (2.54).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\ln|\sin\alpha| + G_2\left(\sin\alpha, \frac{s_1}{\sin\alpha}, \frac{s_2}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{2.64}$$

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (2.47)–(2.50) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной же ее интегрируемости, как указано выше, достаточно найти дополнительный первый интеграл, ”привязывающий” уравнение (2.50).

Поскольку

$$\frac{dt_2}{d\tau} = \frac{2t_1 t_2 - (b + R_2 H_1)t_2}{(b - t_1)\tau}, \quad \frac{d\beta_1}{d\tau} = \frac{t_2}{(b - t_1)\tau}, \tag{2.65}$$

то

$$\frac{dt_2}{d\beta_1} = 2t_1 - (b + R_2 H_1). \tag{2.66}$$

Очевидно, что при $t_2 \neq 0$ выполнено равенство

$$t_1 = \frac{1}{2}\left((b + R_2 H_1) \pm \sqrt{b_1^2 - (2t_2 - C_1)^2}\right), \tag{2.67}$$

$$b_1^2 = (b + R_2 H_1)^2 + C_1^2 - 4R_1,$$

тогда интегрирование следующей квадратуры:

$$\beta_1 + \mathrm{const} = \pm \int \frac{dt_2}{\sqrt{b_1^2 - (2t_2 - C_1)^2}} \tag{2.68}$$

приведет к инвариантному соотношению

$$2(\beta_1 + C_3) = \pm \arcsin \frac{2t_1 - C_1}{\sqrt{(b + R_2H_1)^2 + C_1^2 - 4R_1}}, \quad C_3 = \mathrm{const}. \tag{2.69}$$

Другими словами, выполнено равенство

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm \frac{2t_2 - C_1}{\sqrt{(b + R_2H_1)^2 + C_1^2 - 4R_1}} \tag{2.70}$$

или при переходе к старым переменным

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm \frac{2s_2 - C_1 \sin\alpha}{\sqrt{(b + R_2H_1)^2 + C_1^2 - 4R_1}\sin\alpha}. \tag{2.71}$$

В принципе с целью получения дополнительного инвариантного соотношения, ”привязывающего” уравнение (2.50), на последнем равенстве можно остановиться, добавив к этому то, что в последнем выражении формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (2.54).

Но мы проведем некоторые преобразования, приводящие к получению следующего явного вида дополнительного первого интеграла (при этом используется равенство (2.54)):

$$\mathrm{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] = \\ = \frac{(t_2^2 - t_1^2 + (b + R_2H_1)t_1 - R_1)^2}{t_2^2(2t_1 - (b + R_2H_1))^2}. \tag{2.72}$$

Возвращаясь к старым координатам, получим дополнительное инвариантное соотношение в виде

$$\mathrm{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] = \\ = \frac{(s_2^2 - s_1^2 + (b + R_2H_1)s_1\sin\alpha - R_1\sin^2\alpha)^2}{s_2^2(2s_1 - (b + R_2H_1)\sin\alpha)^2}, \tag{2.73}$$

или окончательно

$$-\beta_1 \pm \frac{1}{2}\times \\ \times \mathrm{arctg}\frac{s_2^2 - s_1^2 + (b + R_2H_1)s_1\sin\alpha - R_1\sin^2\alpha}{s_2(2s_1 - (b + R_2H_1)\sin\alpha)} = C_3 = \mathrm{const}. \tag{2.74}$$

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (1.5)–(1.8), (1.11)–(1.16) при условии (2.5) имеет девять инвариантных соотношений: представлены аналитические неинтегрируемые связи вида (1.21), циклические первые интегралы вида (1.19), (1.20), аналитические первые интегралы вида (1.32), (1.33), первый интеграл вида (2.55), также имеется первый интеграл, являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций, наконец, трансцендентный первый интеграл вида (2.74).

Теорема 1. *Система (1.5)–(1.8), (1.11)–(1.16) при условиях (1.21), (2.5), (1.20), (2.46) обладает девятью инвариантными соотношениями (полным набором), три из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом все соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

Литература

[1] Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007. 352 с.

[2] Шамолин М.В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Доклады РАН. 2000. Т. 375. № 3. С. 343–346.

[3] Шамолин М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.

[4] Чаплыгин С.А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Полн. собр. соч. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. Т. 1. С. 133–135.

Поступила в редакцию 18/*IX*/2012;
в окончательном варианте — 18/*IX*/2012.

NEW CASE OF INTEGRABILITY IN DYNAMICS OF MULTI-DIMENSIONAL BODY

© 2012 N.V. Pokhodnya[3], M.V. Shamolin[4]

In this chapter the new results are systematized on study of the equations of motion of dynamically symmetrical four-dimensional ($4D-$) rigid body which residing in a certain nonconservative field of forces in case of special dynamical symmetry. Its type is unoriginal from dynamics of the real smaller-dimensional rigid bodies of interacting with a resisting medium on the laws of a jet flow, under which the nonconservative tracing force acts onto the body and forces both the value of velocity of a certain typical point of the rigid body and the certain phase variable to remain as constant in all time, that means the presence in system nonintegrable servo-constraints.

Key words: multi-dimensional rigid body, integrability, transcendental first integral.

Paper received 18/*IX*/2012.
Paper accepted 18/*IX*/2012.

[3]Pokhodnya Natalya Vitalievna (`shamolin@rambler.ru`), the Dept. of Mathematics, Moscow Pedagogical State University, Moscow, 107140, Russian Federation.

[4]Shamolin Maxim Vladimirovich (`shamolin@imec.msu.ru`), the Institute of Mechanics, Moscow State University, Moscow, 119899, Russian Federation