

УДК 519.62

## СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ПОЛНОЙ ОБЛАСТИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА

© 2012 Е.А. Алашеева,<sup>1</sup> М.Ю. Маслов<sup>2</sup>

В статье рассмотрены некоторые аспекты численного решения задач антенной электродинамики, сводимых к интегральным уравнениям второго рода с использованием различных базисов разложения искомой функции.

**Ключевые слова:** интегральные уравнения, численные методы, проекционные методы, базисные функции.

### 1. Общие замечания

При решении ряда прикладных задач электродинамики и теории антенн часто возникает проблема анализа электромагнитного поля, рассеянного проводящими телами, расположенными в непосредственной близости излучающей системы. К подобным задачам относятся задачи расчета ближних полей апертурных антенн, полей апертур в области вне телесного угла основного излучения, при необходимости учета влияния подстилающей поверхности и иных материальных тел, расположенных вблизи антенны, таких как затеняющие металлоконструкции, импедансные структуры и т. п. При использовании ряда известных способов формального представления сторонних источников такие задачи могут быть сведены к интегральным уравнениям второго рода, имеющим смысл граничного условия для магнитного вектора на криволинейной поверхности идеального проводника, в которых в качестве искомой функции выступает поверхностный ток либо эквивалентное ему магнитное поле. Интегральные уравнения второго рода в своей области применения обладают рядом известных достоинств, в качестве одного из которых, безусловно, следует отметить устойчивость решения к малым возмущениям входных параметров задачи. Проблема численного решения интегрального уравнения, традиционно решаемая при помощи проекционных методов, тесно связана с задачей выбора системы базисных функций, обеспечивающих эффективность вычислительного процесса в смысле скорости сходимости, потребности

<sup>1</sup>Алашеева Елена Александровна (allena-81@mail.ru), кафедра высшей математики Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Льва Толстого, 23.

<sup>2</sup>Маслов Михаил Юрьевич (mike@psati.ru), кафедра электродинамики и антенн Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Льва Толстого, 23.

производительности процессора и объема оперативной памяти ЭВМ и т. д. В данном контексте следует отметить целесообразность выбора адекватных, в смысле ресурсоемкости вычислительного процесса, подходов к решению конкретных прикладных задач. В настоящей работе рассматривается численное решение задачи об излучении проводящей поверхности второго порядка, возбуждаемой элементарным электрическим диполем произвольной ориентации с использованием различных систем базисных функций как традиционных, так и перспективных.

## 2. Исходные уравнения

Пусть элементарный излучатель находится в точке с координатами  $\vec{r}' = \{x', y', x'\}$  (см. рисунок) вблизи проводящего тела. Амплитуда тока, возбуждающего излучатель  $I$ , длина излучателя  $l$ . Здесь и далее штрихованные координаты обозначают точки источников первичного поля. Геометрические параметры задачи приведены на рисунке.

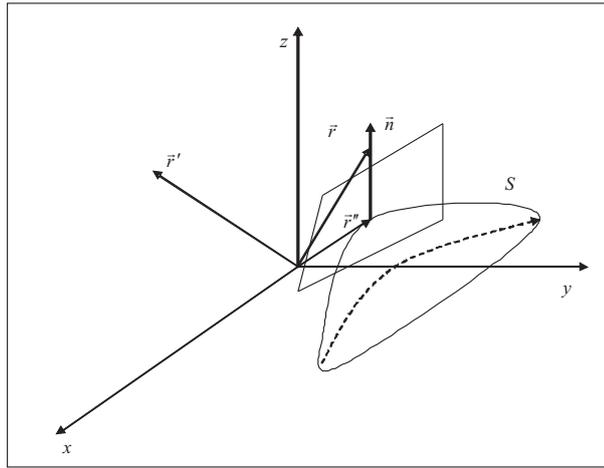


Рис. К выводу интегральных уравнений

Здесь  $\vec{r} = \{x, y, x\}$  — радиус-вектор точки наблюдения,  $\vec{r}' = \{x', y', x'\}$  — радиус-вектор точки источника,  $\vec{r}'' = \{x'', y'', x''\}$  — радиус-вектор точки на поверхности экрана.

Пусть интегральное уравнение имеет смысл граничного условия для магнитного вектора [1] на поверхности проводящего тела

$$\vec{H}_{\tau 0} - \vec{H}_{\tau S} = 0, \quad (2.1)$$

где  $\vec{H}_{\tau 0}$  и  $\vec{H}_{\tau S}$  — тангенциальные компоненты вектора напряженности первичного магнитного поля и поля рассеяния на поверхности  $S$ .

Для тангенциальной компоненты магнитного поля рассеяния справедливо выражение [2]:

$$\vec{H}_{\tau S}(\vec{r}) = \int_S \vec{j}_S(\vec{r}'') \times [\text{grad}G(\vec{r}, \vec{r}'')]^t dS, \quad (2.2)$$

где  $\vec{j}_S(\vec{r}'')$  — вектор плотности тока на поверхности  $S$ ,  $\vec{n}$  — вектор нормали в точке с координатами  $\vec{r}''$ ,  $10G(\vec{r}, \vec{r}'') = \exp(-ik|\vec{r} - \vec{r}''|)/(4\pi|\vec{r} - \vec{r}''|)$  — функция Грина для свободного пространства,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число. Штрих у оператора  $\text{grad}$

в (2.2) указывает на то, что дифференцирование производится по координатам  $\vec{r}'$ . Выражение (2.2) с учетом граничного условия (2.1) можно представить в виде:

$$\vec{n}(\vec{r}_0) \times \vec{H}_0(\vec{r}_0) = \vec{n}(\vec{r}_0) \times \lim_{r \rightarrow r_0} \int_S \vec{j}_S(\vec{r}') \times [\text{grad}G(\vec{r}, \vec{r}')] dS, \quad (2.3)$$

где  $\vec{r}_0$  — текущая координата на поверхности  $S$ .

Вычисление предела в (2.3) с помощью теории потенциала приводит к следующему интегральному уравнению [3]:

$$\vec{n}(\vec{r}_0) \times \vec{H}_0(\vec{r}_0) = \frac{1}{2} \vec{j}(\vec{r}) - \int_S \vec{n}(\vec{r}_0) \times \{ \vec{j}_S(\vec{r}') \times [\text{grad}G(\vec{r}, \vec{r}')] \} dS. \quad (2.4)$$

Векторное уравнение (2.4) можно представить в виде совокупности скалярных уравнений следующим образом. Введем два ортогональных базисных вектора в плоскости, касательной к поверхности  $S$ , таким образом, чтобы

$$\vec{\tau}_1(\vec{r}_0) \times \vec{\tau}_2(\vec{r}_0) = \vec{n}(\vec{r}_0). \quad (2.5)$$

Очевидно, что введенные орты соотносятся между собой следующим образом:

$$\vec{\tau}_1(\vec{r}_0) \times \vec{n}(\vec{r}_0) = -\vec{\tau}_2(\vec{r}_0), \quad \vec{\tau}_2(\vec{r}_0) \times \vec{n}(\vec{r}_0) = \vec{\tau}_1(\vec{r}_0). \quad (2.6)$$

Тогда (2.4) распадается на два уравнения относительно двух ортогональных компонент вектора плотности тока:

$$\vec{\tau}_2(\vec{r}_0) \cdot \vec{H}_0(\vec{r}_0) = -\frac{1}{2} \vec{\tau}_1(\vec{r}_0) \cdot \vec{j}_S(\vec{r}) - \int_S \vec{\tau}_2(\vec{r}_0) \cdot \{ \vec{j}_S(\vec{r}') \times [\text{grad}G(\vec{r}, \vec{r}')] \} dS. \quad (2.7)$$

$$\vec{\tau}_1(\vec{r}_0) \cdot \vec{H}_0(\vec{r}_0) = -\frac{1}{2} \vec{\tau}_2(\vec{r}_0) \cdot \vec{j}_S(\vec{r}) + \int_S \vec{\tau}_1(\vec{r}_0) \cdot \{ \vec{j}_S(\vec{r}') \times [\text{grad}G(\vec{r}, \vec{r}')] \} dS. \quad (2.8)$$

Далее в зависимости от вида элементарного излучателя левые части уравнений будут иметь различный вид [2].

### 3. Применение различных базисов к аппроксимации токовых функций на проводящих поверхностях

Систему базисных функций следует выбрать так, чтобы элементы матрицы импедансов [1] вычислялись по возможности быстро, а сама матрица была удобна для дальнейшего ее обращения. Удачный выбор системы базисных функций позволяет добиться более быстрой сходимости решения, что приводит к меньшему объему расчетов при заданной точности.

Как правило, чем точнее базисные функции  $f_n$  передают характер действительного распределения тока на излучателе, тем лучше сходимость и в некоторых случаях тем более обусловлена матрица импедансов (т. е. более устойчиво решение). Традиционно базисы подразделяются на два типа [4]. К первому типу относятся базисные функции, определенные и не равные нулю во всей области определения оператора  $L$ , за исключением, может быть, множества точек меры нуль. Систему базисных функций этого типа мы называем базисом полной области. В отличие от них базисные функции второго типа установлены во всей области определения оператора  $L$ , но обращаются в нуль в части этой области. Такая система базисных функций называется базисом подобластей.

*Системы базисных функций полной области*

Как отмечалось раньше, это такие базисные функции  $f_n$ , которые определены и отличны от нуля во всей области существования  $A$ , причем  $A = \sum_n I_n f_n$ . Теоретически таких систем функций можно выбрать бесконечно много. Однако выбор системы базисных функций определяется многими конкретными обстоятельствами, связанными с рассматриваемой задачей. Приведем следующие примеры базисных функций (табл. 1).

Таблица 1

**Примеры различных базисов полной области**

Разложение функции $A$ в ряд	Вид базисных функций
<i>Разложение Фурье:</i> $A(y) \approx I_1 \cos \frac{\pi y}{2} + I_2 \cos \frac{3\pi y}{2} + I_3 \cos \frac{5\pi y}{2} + \dots$	$f_n = \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2}$
<i>Разложение Чебышева:</i> $A(y) \approx I_1 T_0(y) + I_2 T_2(y) + I_3 T_4(y) + \dots$	$f_1 = T_0(y) = 1,$ $f_2 = T_2(y) = 2y^2 - 1$
<i>Разложение Маклорена:</i> $A(y) \approx I_1 + I_2 y^2 + I_3 y^4 + \dots$	$f_n = y^{2n-2}$

Для двумерного случая, когда решение  $A(\vec{x})$  является функцией двух переменных  $\vec{x} = (x_1, x_2)$ , в качестве базисных функций удобно выбирать двумерные аналоги приведенных базисов, например, двумерный ряд Фурье.

Базис полной области чаще всего используется, когда искомое решение  $A(\vec{x})$  предполагается достаточно гладким и область определения интегрального оператора правильной формы.

*Системы базисных функций подобластей*

В одномерном случае, когда решение  $A(y)$  зависит от одной переменной, область определения оператора  $L$  разбивается на сегменты  $\Delta y_i$ , и задается набор функций, равных нулю во всех сегментах, кроме какого-то одного. Приведем примеры таких базисов.

При решении двумерной задачи можно использовать аналогичный подход. Теперь функция  $A(\vec{x})$  зависит от двух переменных  $\vec{x} = (x_1, x_2)$ , а область определения оператора  $L$  представляет собой некоторую плоскую фигуру  $Q$ . Функции  $f_n(\vec{x})$  могут быть определены в различных подобластях области определения оператора  $L$ , так что каждая функция  $f_n(\vec{x})$  существует лишь в некоторой подобласти  $Q_n$ . В случае интегрального уравнения, когда  $L$  является интегральным оператором, применение таких базисных функций эквивалентно замене интеграла на конечную риманову сумму. Это можно записать следующим образом [4]:

$$A(\vec{x}) = \begin{cases} a_n f_n(\vec{x}), \vec{x} \in Q_n, \\ 0, \text{ в противном случае } \end{cases} .$$

**4. Численное решение**

Рассмотрим ИУ Фредгольма второго рода, в общем виде записываемое как:

$$\int_a^b \int_a^b K(x, y, u, v) J(u, v) dudv + J(x, y) = f(x, y) \quad (4.9)$$

Таблица 2

## Примеры различных базисов подобластей

Наименование функций	Вид базисных функций
<p>1. <i>Базисные сплайны</i></p> <p>- сплайн нулевой степени:</p> <p>- линейный сплайн:</p> <p>-кубический сплайн:</p>	$f_i = \begin{cases} 0, y < y_i, \\ \frac{1}{h}, y_i \leq y \leq y_{i+1}, \\ 0, y \geq y_{i+1} \end{cases}$ $f_i = \begin{cases} 0, y < y_i, \\ \frac{1}{h} + \frac{y-y_{i+1}}{h^2}, y_i \leq y \leq y_{i+1}, \\ \frac{1}{h} - \frac{y-y_{i+1}}{h^2}, y_{i+1} \leq y \leq y_{i+2}, \\ 0, y \geq y_{i+2} \end{cases}$ $f_i = \begin{cases} 0, y < y_i, \\ \frac{1}{6h^4}(y-y_i)^3, y_i \leq y \leq y_{i+1}, \\ \frac{1}{6h} + \frac{1}{2h^2}(y-y_i) + \frac{1}{2h^3}(y-y_i)^2 - \\ - \frac{1}{2h^4}(y-y_i)^3, y_{i+1} \leq y \leq y_{i+2}, \\ \frac{1}{6h} + \frac{1}{2h^2}(y_{i+3}-y) + \frac{1}{2h^3}(y_{i+3}-y)^2 - \\ - \frac{1}{2h^4}(y_{i+3}-y)^3, y_{i+2} \leq y \leq y_{i+3}, \\ \frac{1}{6h^4}(y_{i+4}-y)^3, y_{i+3} \leq y \leq y_{i+4}, \\ 0, y \geq y_{i+4} \end{cases}$
<p>2. <i>Кусочно-синусоидальные функции:</i></p>	$f_i = \begin{cases} \frac{I_i \sin k(y_{i+1}-y) + I_{i+1} \sin k(y-y_i)}{\sin k \Delta y_i}, y \in [y_i, y_{i+1}], \\ 0, y \in [-\infty, y_i] \cup y \in [y_{i+1}, +\infty] \end{cases}$
<p>3. <i>Базис из сплайновых вейвлет</i></p> <p>-обыкновенная вейвлета:</p>	$\psi_i = \begin{cases} 0, y \in [-\infty, y_{2i}] \\ \frac{(y-y_{2i})}{h}, y \in [y_{2i}, y_{2i+1}], \\ \frac{(y_{2i+2}-7y+6y_{2i+1})}{h}, y \in [y_{2i+1}, y_{2i+2}], \\ \frac{-6(y_{2i+3}+16y-10y_{2i+2})}{h}, y \in [y_{2i+2}, y_{2i+3}], \\ \frac{6(y_{2i+3}-16y+10y_{2i+2})}{h}, y \in [y_{2i+3}, y_{2i+4}], \\ \frac{-(y_{2i+4}+7y-6y_{2i+5})}{h}, y \in [y_{2i+4}, y_{2i+5}], \\ \frac{(y_{2i+6}-y)}{h}, y \in [y_{2i+5}, y_{2i+6}], \\ 0, y \in [y_{2i+6}, +\infty] \end{cases}$
<p>4. <i>Тригонометрическая интерполяция:</i></p>	$f_i = \begin{cases} A + B \sin k(y-y_i) + \\ + C \cos k(y-y_i), y \in [y_i, y_{i+1}], \\ 0, y \in [-\infty, y_i] \cup y \in [y_{i+1}, +\infty] \end{cases}$

с заданной функцией  $f(x, y)$  и неизвестной функцией  $J(x, y)$ . При решении подобных уравнений методом Галеркина, в котором весовые и базисные функции совпадают, имеется известная проблема выбора базиса, адекватного поставленной задаче. Нужно выбрать такую систему базисных функций, чтобы матрица импедансов [1] была как можно меньшего размера, время ее заполнения тоже минимальным и полученное решение соответствовало физическим представлениям о нем (табл. 2).

Можно, конечно, выбрать в качестве базиса кусочно-линейный базис, или, как его еще называют, базис из сплайнов первой степени. При таком выборе мы могли бы решить задачу даже в случае довольно сложной области определения у

интегрального оператора (просто нужно было бы выбрать более густую сетку разбиения для построения базисных функций). Однако решение задачи осложняется тем, что при дискретизации интегрального уравнения получается система линейных алгебраических уравнений с плотной матрицей. А такая система решается прямыми методами, например Гаусса, довольно долго (даже учитывая возможности современных ЭВМ, порядка нескольких часов) [4].

Также можно выбрать в качестве базисных функций вейвлет-базис. В таком случае матрица импедансов будет псевдоразреженной [5; 6], что позволит экономить машинное время при решении системы, а также память ЭВМ при заполнении самой матрицы, используя разреженные технологии. Но в данной ситуации сама матрица системы линейных уравнений заполняется очень долго, т. к. довольно трудно предсказать положение "почти нулей" в матрице и, как следствие, трудно создать эффективно работающий алгоритм. Справедливости ради стоит заметить, что при небольшом усложнении формы поверхности, на которую наведено излучающее устройство, применение данного базиса становится наиболее актуальным [6]. Однако ограничимся рамками данного исследования.

В данном случае область определения интегрального оператора довольно проста, поэтому можно выбрать базис полной области. Так как в задаче мы находим распределение функции тока, то логичнее всего выбрать в качестве базиса разложение данной функции в двумерный ряд Фурье, потому что по форме он близок к искомому результату.

$$J(x, y) = a_1 + a_2 \cos \frac{2\pi i}{\lambda} x + a_3 \sin \frac{2\pi i}{\lambda} x + a_4 \cos \frac{2\pi i}{\lambda} y + a_5 \cos \frac{2\pi i}{\lambda} x \cos \frac{2\pi i}{\lambda} y + \dots,$$

где  $\lambda$  длина волны.

Сравнительная характеристика по времени решения модельной задачи (параболическое зеркало, возбуждаемое элементарным диполем) при применении трех вышеописанных базисов представлена в табл. 3

Таблица 3

**Время нахождения численного решения модельной задачи с использованием различных базисов**

Базисные функции	Время нахождения численного решения модельной задачи
<i>сплайны</i>	20 ч
<i>вейвлеты</i>	5 ч
<i>двумерный ряд Фурье</i>	1 мин

Вообще исследования, проведенные авторами [7; 8], показывают, что тригонометрические базисы полной области имеют существенные преимущества в смысле ресурсоемкости реализованных алгоритмов, по сравнению с иными системами базисных функций, рассмотренными выше, при решении существенно двумерных электродинамических задач с гармоническим возбуждением, геометрия которых относительно проста (плоские рефлекторы, зеркала, образованные поверхностями второго порядка). Данное обстоятельство вполне соответствует априорным физическим оценкам характера ожидаемого решения. Однако в случае сложной геометрии (зеркала, имеющие изломы) негармоническое (в особенности, импульсное) возбуждение, применение вейвлет-базисов, обуславливающих разреженные матрицы, представляются весьма перспективными (в случае импульсных воздействий

все входящие в уравнения (6) величины будут иметь смысл соответствующих Фурье-образов).

## Выводы

В данной статье рассмотрены различные подходы к численному решению электродинамических задач, сводящихся к уравнениям Фредгольма второго рода. Сделаны выводы по эффективности использования данных методов для решения существенно двумерных задач. В частности, описан оригинальный подход с использованием вейвлет-базиса и сделаны выводы о наиболее предпочтительном для данного метода классе электродинамических задач.

## Литература

- [1] Вычислительные методы в электродинамике / под ред. Р. Митры; пер. с англ. Э.Л. Бурштейна. М.: Мир, 1977. 487 с.
- [2] Никольский В.В. Антенны. М.: Связь, 1966.
- [3] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 250 с.
- [4] Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
- [5] Блатов И.А. Об алгебрах операторов с псевдоразреженными матрицами и их приложениях // Сибирский математический журнал. 1996. Т. 37. № 1. С. 36–59.
- [6] Блатов И.А. О методах неполной факторизации для систем с разреженными матрицами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1993. Т. 33. № 7. С. 819–836.
- [7] Алашеева Е.А., Блатов И.А., Маслов М.Ю. Решение задачи рассеяния электромагнитного поля элемента электрического тока проводящим экраном конечных размеров // Инфокоммуникационные технологии. 2007. № 2. С. 8–14.
- [8] Алашеева Е.А., Блатов И.А., Маслов М.Ю. Решение задачи об излучении линейной структуры, расположенной вблизи идеально проводящего экрана, сводимой к двумерной системе уравнений Фредгольма второго рода // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2010. № 2(76). С. 13–22.

Поступила в редакцию 22/IX/2012;  
в окончательном варианте — 22/IX/2012.

**COMPARATIVE CHARACTERISTICS OF VARIOUS  
SYSTEMS OF BASIS FUNCTIONS OF THE FULL FIELD,  
WITH REGARD TO THE SOLUTION  
OF INTEGRAL FREDHOLM EQUATIONS OF THE  
SECOND KIND**

© 2012 E.A. Alasheeva,<sup>3</sup> M.Y. Maslov<sup>4</sup>

The article examines some aspects of numerical solution of some problems of antenna electrodynamics, reducible to the integral equations of the second kind with the use of various bases of decomposition of the sought function.

**Key words:** integral equations, numerical methods, projective methods, basic functions.

Paper received 22/IX/2012.

Paper accepted 22/IX/2012.

---

<sup>3</sup>Alasheeva Elena Alexandrovna ([alashheeva@mail.ru](mailto:alashheeva@mail.ru)), the Dept. of Higher Mathematics, Povolshkiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, 443010, Russian Federation.

<sup>4</sup>Maslov Mihail Yurievich ([mike@psati.ru](mailto:mike@psati.ru)), the Dept. of Electrodynamics and Antenna, Povolshkiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, 443010, Russian Federation.