УДК 517.987

РАВНОМЕРНАЯ ИСЧЕРПЫВАЕМОСТЬ СЕМЕЙСТВА РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВА В ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2012 Т.А. Срибная[1]

В работе доказаны условия, при выполнении которых семейство регулярных функций множества, заданных на алгебре Σ подмножеств некоторого σ-топологического пространства и принимающих значения в произвольном топологическом пространстве, является равномерно исчерпывающим.

Ключевые слова: регулярные функции множества, σ-топологическое пространство, равномерно исчерпывающие функции множества, равномерно квазитреугольные функции множества, композиционные функции множества, внешние меры, аддитивные функции множества.

Введение

В работе [1] А.Д. Александров показал, что в любом некомпактном нормальном σ-топологическом пространстве существует регулярная относительно класса всех замкнутых множеств аддитивная скалярная функция множества, обладающая свойством исчерпываемости, но не являющаяся непрерывной сверху в нуле. В связи с этим возник вопрос: будет ли регулярная счетно-аддитивная функция множества φ исчерпывающей?

А.Н. Саженков [2], изучая связь счетной аддитивности и исчерпываемости для топологических мер, дал положительный ответ на этот вопрос, доказав, что регулярная относительно класса замкнутых множеств счетно-аддитивная функция множества является исчерпывающей. Довольно широкий класс неаддитивных функций множества, для которых из регулярности и непрерывности сверху в нуле следует свойство исчерпываемости, указан в работе [3].

В предлагаемой работе найдены условия, достаточные для равномерной исчерпываемости семейства регулярных функций множества, заданных на некоторой алгебре множеств, содержащей класс открытых множеств некоторого σ-топологического пространства, принимающих значения в произвольном топологическом пространстве.

[1]Срибная Татьяна Аркадьевна (sribnaya@ssu.samara.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

1. Основные определения и обозначения. Примеры

Пусть T — некоторое множество, η — класс подмножеств множества T, замкнутый относительно счетных соединений и конечных пересечений, $\varnothing \in \eta$, $T \in \eta$. Следуя А.Д. Александрову [1], пространство (T, η) будем называть σ-топологическим, множества из класса η открытыми, а их дополнения — замкнутыми.

Пусть S и $\mathcal{F}$ — некоторые классы замкнутых множеств. Будем говорить, что классы множеств S и $\mathcal{F}$ η-отделимы, если для любых непересекающихся множеств $C \in S$ и $F \in \mathcal{F}$ существуют такие открытые непересекающиеся множества $V, W \in \in \eta$, что $C \subset V,\ F \subset W$.

Примеры топологических пространств (T, η) с η-отделимыми классами замкнутых множеств приведены в работе [4].

Пусть Σ — некоторая алгебра подмножеств множества T, причем $\Sigma \supset \eta$. Из этого условия, вообще говоря, не следует, что класс множеств Σ является σ-алгеброй. Пусть (X, τ) — произвольное топологическое пространство, пусть $\Phi = \{\varphi\},\ \varphi : \Sigma \to X,\ \varphi(\varnothing) = e,\ e \in X$, есть некоторое семейство функций множества, пусть $\mathcal{H}$ — фундаментальная система окрестностей точки $e \in X$.

Последовательность попарно непересекающихся множеств будем называть спектром, убывающую последовательность множеств с пустым пересечением — локализатором.

Говорят, что семейство функций множества $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно исчерпывающее (равностепенно непрерывно сверху в нуле) на классе множеств $\mathcal{L} \subset \Sigma$, если для любого спектра (соответственно, локализатора) $\{E_n\} \subset \mathcal{L}$ соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) = e$$

выполняется равномерно относительно $\varphi \in \Phi$.

Если семейство функций множества $\Phi = \{\varphi\}$ состоит из одной функции φ, то говорят, соответственно, что функция φ исчерпывающая или непрерывная сверху в нуле на $\mathcal{L}$.

Определение 1. Будем говорить, что семейство функций множества $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно квазитреугольное, если для любой окрестности $U \in \mathcal{H}$ существует окрестность $V = V(U),\ V \in \mathcal{H}$, такая, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любых непересекающихся множеств $A, B \in \Sigma$ выполняются условия:

если $\varphi(A) \in V,\ \varphi(B) \in V$, то $\varphi(A \cup B) \in U$,

если $\varphi(A) \in V,\ \varphi(A \cup B) \in V$, то $\varphi(B) \in U$.

Если семейство функций множества $\Phi = \{\varphi\}$ состоит из одной функции φ, то функцию φ называют квазитреугольной.

Пример 1. Пусть $F = \{f\},\ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — класс непрерывных, строго возрастающих функций точки таких, что $f(0) = 0,\ f(x) \geqslant x$. Пусть $(G, |\cdot|)$ — абелева группа с квазинормой.

Следуя [5] (определение 3.3, с. 41), функцию $\varphi : \Sigma \to (G, |\cdot|)$ будем называть f-композиционной, если существует функция $f \in \mathcal{F}$ такая, что для любых непересекающихся множеств $A, B \in \Sigma$ справедливы неравенства

$$|\varphi(A \cup B)| \leqslant f(|\varphi(A)|) + f(|\varphi(B)|),$$

$$|\varphi(B)| \leqslant f(|\varphi(A \cup B)|) + f(|\varphi(A)|).$$

Если $\Phi = \{\varphi\},\ \varphi : \Sigma \to (G, |\cdot|)$ — семейство аддитивных функций множества, то функции множества семейств $\Phi_1 = \{\mu\}$ и $\Phi_2 = \{\nu\}$, определенные равенствами

$$\mu(E) = e^{|\varphi(E)|} - 1,\ \ E \in \Sigma,\ \ \varphi \in \Phi,$$

$$\nu(E) = \sum_{k=1}^{n} c_k |\varphi(E)|^k, \ \ c_k \geqslant 0, \ \ k = \overline{1, n}, \ \ E \in \Sigma, \ \ \varphi \in \Phi,$$

являются f-композиционными, где, соответственно, $f(x) = x + x^2$ и $f(x) = 2^{n-1}x$.

Семейство f-композиционных функций множества является равномерно квазитреугольным.

Пример 2. Пусть $(G, +, \theta)$ — топологическая абелева группа, $\mathcal{K}$ — фундаментальная система окрестностей нуля в G.

Следуя [6], функцию множества $\varphi : \Sigma \to (G, +, \theta)$ будем называть k-внешней мерой, $k \in \mathbb{N}$, если для любой окрестности $U \in \mathcal{K}$ и для любых непересекающихся множеств $A, B \in \Sigma$ из условия $\varphi(A) \in U$ следует $\varphi(A \cup B) - \varphi(B) \in k \cdot U$, где $k \cdot U = \{u_1 + ...u_k, \ \ u_i \in U, i = \overline{1, k}\}$.

Примерами k-внешних мер являются аддитивные группозначные функции множества, внешние числовые меры, квазилипшицевые функции множества.

Семейство k-внешних мер является равномерно квазитреугольным семейством функций множества.

Пример 3. В работах [7; 8] исследовался вопрос о равномерной исчерпываемости семейств аддитивных функций множества со значениями в равномерной полугруппе.

Пусть $(Y, +, \theta)$ — абелева полугруппа с нулем θ, $\mathcal{U}$-равномерность на Y. Полугруппу $Y = (Y, +, \theta, \mathcal{U})$ называют равномерной полугруппой, если операция сложения $(x, y) \to (x + y)$, действующая из $Y \times Y$ в Y, равномерно непрерывна.

Пусть $Y = (Y, +, \theta, \mathcal{U})$ — равномерная полугруппа. Обозначим через $\tau(\mathcal{U})$ топологию, соответствующую равномерности $\mathcal{U}$. Если $\Phi = \{\varphi\}$, $\varphi : \Sigma \to Y$ — семейство аддитивных функций множества, то функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$, рассматриваемые как функции со значениями в топологическом пространстве $(Y, \tau(\mathcal{U}))$, являются равномерно квазитреугольными.

2. Регулярные функции множества со значениями в топологическом пространстве

Пусть (T, η) — σ-топологическое пространство, Σ — некоторая алгебра подмножеств множества T, $\Sigma \supset \eta$, пусть (X, τ) — произвольное топологическое пространство, пусть $\Phi = \{\varphi\}$, $\varphi : \Sigma \to X$, $\varphi(\varnothing) = e$ — некоторое семейство функций множества, $\mathcal{H}$ — фундаментальная система окрестностей точки $e \in X$.

Для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любого множества $E \in \Sigma$ положим

$$\widetilde{\varphi}(E) = \{\varphi(F), \ \ F \subset E, \ \ F \in \Sigma\}.$$

Будем говорить, что семейство функций множества $\Phi = \{\varphi\}$ регулярное на классе множеств $\mathcal{L} \subset \Sigma$ относительно класса множеств $S \subset \Sigma$, если для любой окрестности $U \in \mathcal{H}$ и для любого множества $E \in \mathcal{L}$ существует такое множество $F \in S$, что $F \subset E$ и $\widetilde{\varphi}(E \setminus F) \subset U$ для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Будем говорить, что функция множества $\varphi \in \Phi$ является слабо регулярной на классе множеств $\mathcal{L} \subset \Sigma$ относительно класса множеств $S \subset \Sigma$, если для любой окрестности $U \in \mathcal{H}$ и для любого множества $E \in \mathcal{L}$ существует такое множество $F \in S$, что $F \subset E$ и $\varphi(E \setminus F) \in U$.

Предложение 1. Пусть S — некоторый класс замкнутых множеств пространства (T, η). Если семейство функций множества $\varphi \in \Phi$ регулярное на классе множеств η относительно класса S, то для любого замкнутого множества $C \in \Sigma$ и для любой окрестности $U \in \mathcal{H}$ существует такое открытое множество A, что $C \subset A$ и $\widetilde{\varphi}(A \setminus C) \subset U$ для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Доказательство. Пусть множество $C \in \Sigma$ замкнутое. Пусть $U \in \mathcal{H}$. Положим $E = T \backslash C$. В силу регулярности семейства функций множества $\Phi = \{\varphi\}$ на классе η относительно класса S существует такое множество $F \in \mathcal{F}$, что $F \subset E$ и $\widetilde{\varphi}(E \backslash F) \subset$ $\subset U$ для любой функции $\varphi \in \Phi$. Множество $A = T \setminus F$ искомое.

Предложение 2. Пусть S — некоторый класс замкнутых множеств пространства (T, η). Если функция множества $\varphi : \Sigma \to X$ является квазитреугольной и слабо регулярной на алгебре Σ относительно класса S, то

1) для любого открытого множества $H \in \eta$ и для любой окрестности $U \in \mathcal{H}$, для которых $\widetilde{\varphi}(H) \not\subset U$, существует открытое множество $A \in \eta$ такое, что $A \subset H$, $\varphi(A) \notin U_0$;

2) для любого множества $E \in \Sigma$ и для любой окрестности $U \in \mathcal{H}$, для которых $\widetilde{\varphi}(E) \not\subset U$ существует замкнутое множество $F \in S$ такое, что $F \subset E$, $\varphi(F) \notin U_0$.

Здесь $U_0 = V(U)$ — окрестность из $\mathcal{H}$, которая находится для окрестности $U \in \mathcal{H}$ в силу квазитреугольности функции φ.

Доказательство. Пусть множество $H \in \eta$ и окрестность $U \in \mathcal{H}$ такие, что $\widetilde{\varphi}(H) \not\subset U$. Тогда существует множество $E \in \Sigma$ такое, что $E \subset H$ и $\varphi(E) \notin U$. Так как функция φ слабо регулярная на классе множеств Σ относительно класса S, то существует такое множество $C \in S$, что $C \subset H \setminus E$, $\varphi((H \setminus E) \setminus C) \in U_0$.

Положим $A = H \setminus C$. Предположим, что $\varphi(A) \in U_0$. Так как $A = (A \setminus E) \cup E)$ и $\varphi(A \setminus E) \in U_0$, то $\varphi(E) \in U$.

Полученное противоречие показывает, что множество A искомое.

Справедливость п. 2 проверяется аналогично.

3. Основные результаты

Теорема 1. Пусть (T, η) — некоторое σ-топологическое пространство, пусть Σ — некоторая алгебра подмножеств множества T, причем $\Sigma \supset \eta$, пусть S — некоторый класс замкнутых множеств пространства (T, η), пусть $\mathcal{L} \subset \Sigma$ — некоторый класс множеств. Пусть $X = (X, \tau)$ — некоторое топологическое пространство.

Пусть $\Phi = \{\varphi\}$, $\varphi : \Sigma \to X$, — равностепенно непрерывное сверху в нуле на Σ, регулярное на классе множеств η относительно класса S семейства функций множеств; пусть, кроме того, каждая функция $\varphi \in \Phi$ слабо регулярна на классе множеств $\mathcal{L}$ относительно S. Если семейство функций множества $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно квазитреугольное на Σ, то $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно исчерпывающее на $\mathcal{L} \cup \eta$.

Доказательство теоремы 1 опирается на лемму 1, которая формулируется в предположении, что выполнены условия теоремы.

Лемма 1. Семейство функций множества $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно исчерпывающее на классе множеств S.

Доказательство. Пусть $U \in \mathcal{H}$. Всюду в дальнейшем через $V(U)$ будем обозначать такую окрестность из $\mathcal{H}$, которая находится для окрестности $U \in \mathcal{H}$ по условию равномерной квазитреугольности семейства $\Phi = \{\varphi\}$.

Построим последовательность окрестностей $\{U_n\} \subset \mathcal{H}$ такую, что

$$U_0 = V(U);\ \ U_n = U_{n-1} \cap V(U_{n-1}),\ \ n = 1, 2, ...$$

Пусть $\{A_n\}$ — некоторый спектр из S. Положим $C_1 = A_1$. В силу предложения 1 найдем такое открытое множество B_1, что $C_1 \subset B_1$ и $\widetilde{\varphi}(B_1 \setminus C_1) \subset U_1$ для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Положим $C_2 = A_2 \setminus B_1$ и найдем, в силу предложения 1, такое открытое множество B_2, что

$$C_2 \subset B_2 \text{ и } \widetilde{\varphi}(B_2 \setminus C_2) \subset U_2$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Продолжив процесс, по индукции построим последовательность замкнутых множеств $\{C_n\}$ и последовательность открытых множеств $\{B_n\}$ таких, что

$$C_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k, \ \ n = 2, 3, ..., \tag{3.1}$$

$$C_n \subset B_n \text{ и } \widetilde{\varphi}(B_n \setminus C_n) \subset U_n, \ \ n = 1, 2, ...$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Так как

$$A_n \subset C_n \cup (\bigcup_{k=1}^{n-1} (B_k \setminus C_k)), \ \ n = 2, 3, ...,$$

то каждое множество A_n, $n = 2, 3, ...$, можно представить в виде

$$A_n = C_n \cup \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup ... \cup \mathcal{D}_{n-1}, \text{ где } \mathcal{D}_1 = (B_1 \setminus C_1) \cap A_n, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{D}_k = ((B_k \setminus C_k) \bigcap A_n) \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} \mathcal{D}_i, \ \ k = 2, 3, ..., n-1. \tag{3.3}$$

Из (3.1) и (3.3) следует для каждого номера $n = 2, 3, ...$

$$\widetilde{\varphi}(\mathcal{D}_k) \subset U_k, \ \ k = 1, 2, ..., n-1$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$, причем множества $\mathcal{D}_k$, $k = 1, 2, ..., n-1$, попарно не пересекаются. Отсюда в силу построения последовательности $\{U_n\} \in \mathcal{H}$ получаем

$$\widetilde{\varphi}(\bigcup_{k=1}^{n-1} \mathcal{D}_k) \subset U_0, \ \ n = 2, 3, ..., \tag{3.4}$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Положим

$$H_1 = B_1, \ \ H_n = B_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k, \ \ n = 2, 3, ...$$

Тогда

$$C_n \subset H_n, \ \ H_n \setminus C_n \subset B_n \setminus C_n, \ \ n = 1, 2, ...$$

Отсюда в силу (3.1) следует

$$\widetilde{\varphi}(H_n \setminus C_n) \subset U_n \subset ... \subset U_1. \tag{3.5}$$

Положим

$$F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} H_k, \ \ n = 1, 2, ...$$

Тогда

$$F_n = H_n \cup F_{n+1}, \ \ H_n \cap F_{n+1} = \varnothing, \ \ n = 1, 2, ..., \tag{3.6}$$

и множества F_n, $n = 1, 2, ...$, образуют локализатор из Σ.

Так как семейство функций $\Phi = \{\varphi\}$ равностепенно непрерывно сверху в нуле, то существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ справедливо

$$\varphi(F_n) \subset U_2 \tag{3.7}$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Так как семейство функций $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно квазитреугольное, то из (3.6) и (3.7) следует, что для всех $n > n_0$

$$\varphi(H_n) \in U_1$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Отсюда с учетом (3.5) получим

$$\varphi(C_n) \in U_0, \;\; n > n_0 \tag{3.8}$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Из (3.2), (3.4) и (3.8) в силу выбора окрестности $U_0 \in \mathcal{H}$ следует, что для всех номеров $n > n_0$

$$\varphi(A_n) \in U$$

для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что семейство функций $\Phi = \{\varphi\}$ не является равномерно исчерпывающим на $\mathcal{L} \cup \eta$. Тогда существуют спектр $\{E_n\} \subset \mathcal{L} \cup \eta$, окрестность $U \in \mathcal{H}$ и последовательность функций $\{\varphi_n\} \subset \Phi$, для которых

$$\varphi_n(E_n) \notin U, \;\; n = 1, 2, \ldots. \tag{3.9}$$

Из условий теоремы следует, что каждая функция φ_n слабо регулярна на классе $\mathcal{L} \cup \eta$ относительно класса S. В силу чего существуют множества $F_n \in S$ такие, что

$$F_n \subset E_n \;\text{ и }\; \varphi_n(E_n \setminus F_n) \in U_0, n > n_0.$$

По лемме 1 существует номер n_0 такой, что

$$\varphi_n(F_n) \in U_0$$

при всех $n > n_0$.

Так как

$$E_n = F_n \cup (E_n \setminus F_n),$$

то

$$\varphi_n(E_n) \in U, \;\; n > n_0,$$

что противоречит (3.9).

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть (T, η) — некоторое σ-топологическое пространство, пусть Σ — некоторая алгебра подмножеств множества T, причем $\Sigma \supset \eta$, пусть S — некоторый класс замкнутых множеств пространства (T, η), пусть $\mathcal{L} \subset \Sigma$ — некоторый класс множеств. Пусть $X = (X, \tau)$ — некоторое топологическое пространство.

Пусть функция множества φ, заданная на алгебре Σ со значениями в топологическом пространстве X, непрерывна сверху в нуле на Σ и регулярна на классе множеств $\mathcal{L} \cup \eta$ относительно класса S. Если функция множества φ квазитреугольная, то она исчерпывающая на $\mathcal{L} \cup \eta$.

Следствие 2. Пусть (T, η) — некоторое σ-топологическое пространство; пусть Σ — некоторая алгебра подмножеств множества T, причем $\Sigma \supset \eta$; пусть S — некоторый класс замкнутых множеств пространства (T, η).

Пусть $\Phi = \{\varphi\}$ — одно из перечисленных ниже семейств функций множества, заданных на алгебре Σ :

– семейство композиционных функций множества со значениями в абелевой группе с квазинормой;

– семейство k-внешних мер со значениями в топологической абелевой группе;

– семейство аддитивных функций множества со значениями в равномерной полугруппе.

Если семейство функций множества $\Phi = \{\varphi\}$ равностепенно непрерывно сверху в нуле на Σ, регулярно на классе множеств η относительно класса множеств S, причем каждая функция $\varphi \in \Phi$ слабо регулярна на Σ относительно класса множеств S, то семейство $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно исчерпывающее на Σ.

Теорема 2. Пусть (T, η) — некоторое σ-топологическое пространство; Σ — некоторая алгебра подмножеств множества T, причем $\Sigma \supset \eta$. Пусть $\mathcal{F}$ — класс всех замкнутых множеств пространства (T, η), $S \subset \mathcal{F}$ и классы множеств S и $\mathcal{F}$ η-отделимы. Пусть $X = (X, \tau)$ — некоторое топологическое пространство.

Пусть $\Phi = \{\varphi\}$, $\varphi : \Sigma \to X$, — равномерно квазитреугольное на Σ семейство функций множества. Пусть каждая функция множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ слабо регулярна на классе множеств Σ относительно класса S.

Если семейство функций множества $\Phi = \{\varphi\}$ равностепенно непрерывно сверху в нуле на Σ, то оно равномерно исчерпывающее на Σ.

Доказательство.

1. Покажем, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно исчерпывающие на классе открытых множеств.

Пусть $U \in \mathcal{H}$, для окрестности U найдем окрестность $U_0 = V(U)$, $U_0 \in \mathcal{H}$, по определению 1. Пусть H_n — некоторый спектр из η. Положим $E_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} H_k$, $n \in \mathbb{N}$. Так как последовательность множеств $\{E_n\}$ является локализатором из η, то существует номер n_0 такой, что для всех номеров $n > n_0$ и для любой функции $\varphi \in \Phi$ справедливо
$$\varphi(E_n) \in U_0.$$

Отсюда и из соотношения
$$E_n = H_n \cup E_{n+1}$$
в силу выбора окрестности $U_0 \in \mathcal{H}$ следует, что для любого номера $n > n_0$ и для любой функции $\varphi \in \Phi$ справедливо
$$\varphi(H_n) \in U.$$

2. Покажем, что для любой окрестности $U \in \mathcal{H}$ и для любого множества $F \in \mathcal{F}$ существует такое открытое множество $H \in \eta$, что
$$F \subset H, \;\; \widetilde{\varphi}(H \setminus F) \subset U$$
для любой функции $\varphi \in \Phi$.

Предположим противное. Тогда существуют окрестность $U \in \mathcal{H}$, множество $F_0 \in \mathcal{F}$ и функция $\varphi_{n_1} \in \Phi$ такие, что
$$\widetilde{\varphi}_{n_1}(T \setminus F_0) \not\subset U.$$

Для окрестности $U \in \mathcal{H}$ по определению 1 найдем окрестность $U_0 = V(U)$, $U_0 \in \mathcal{H}$, а для окрестности U_0 — окрестность $U_1 = V(U_0)$, $U_1 \in \mathcal{H}$.

В силу предложения 2 существует такое множество $F_1 \in S$, что
$$F_1 \subset T \setminus F_0, \;\; \varphi_{n_1}(F_1) \notin U_1. \tag{3.10}$$

Так как классы множеств S и $\mathcal{F}$ η-отделимы, то существуют такие открытые множества A_1' и A_2', что

$$F_0 \subset A_1',\ \ F_1 \subset A_2',\ \ A_1' \cap A_2' = \varnothing.$$

В силу (3.10) и предложения 1 существует такое открытое множество $A_1 \subset \subset A_2'$, что

$$\varphi_{n_1}(A_1) \notin U_1.$$

По предположению для открытого множества A_1' существует такая функция $\varphi_{n_2} \in \Phi$, что

$$\varphi_{n_2}(A_1' \setminus F_0) \not\subset U.$$

В силу предложения 2 существует такое множество $F_2 \in S$, что

$$F_2 \subset A_1' \setminus F_0,\ \ \varphi_{n_2}(F_2) \notin U_0. \tag{3.11}$$

Так как классы множеств S и $\mathcal{F}$ η-отделимы, то существуют такие открытые множества A_1'' и A_2'', что

$$F_0 \subset A_1'' \subset A_1',\ \ F_2 \subset A_2'' \subset A_2',\ \ A_1'' \cap A_2'' = \varnothing.$$

В силу (3.11) и предложения 1 существует такое открытое множество $A_2 \subset \subset A_2''$, что

$$\varphi_{n_2}(A_2) \notin U_1.$$

Продолжив процесс по индукции, построим спектр $\{A_k\}$ открытых множеств и подпоследовательность $\{\varphi_{n_k}\} \subset \Phi$, для которых

$$\varphi_{n_k}(A_k) \notin U_1,\ \ k \in \mathbb{N},$$

что противоречит равномерной исчерпываемости на η семейства функций множества $\Phi = \{\varphi\}$.

3. Покажем, что семейство функций множества $\Phi = \{\varphi\}$ регулярно на классе множеств η относительно класса всех замкнутых множеств пространства (T, η). Пусть $U \in \mathcal{H}$. Пусть множество $E \in \eta$ открытое. Положим $G = T \setminus E$, множество G замкнутое. В силу п. 2 существует такое открытое множество $A \in \eta$, что $G \subset A$ и $\widetilde{\varphi}(A \setminus G) \subset U$ для любой функции $\varphi \in \Phi$. Множество $F = T \setminus A$ искомое.

4. Для завершения доказательства осталось применить теорему 1, рассмотрев случай, когда класс множеств $\mathcal{L}$ совпадает с алгеброй Σ.

Следствие 3. Пусть (T, η) регулярное хаусдорфово топологическое пространство, S — класс компактных множеств пространства (T, η). Пусть Σ — некоторая алгебра подмножеств множества T, причем $\Sigma \supset \eta$.

Пусть $\Phi = \{\varphi\}$ одно из перечисленных в следствии 2 семейств функций множества. Если каждая функция множества $\varphi \in \Phi$ слабо регулярная на алгебре Σ относительно класса S и семейство функций множества $\Phi = \{\varphi\}$ равностепенно непрерывно сверху в нуле на Σ, то семейство функций множества $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно исчерпывающее на Σ.

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что если (T, η) регулярное хаусдорфово топологическое пространство, S — класс компактных множеств, а $\mathcal{F}$ — класс всех замкнутых множеств пространства (T, η), то классы множеств S и $\mathcal{F}$ η-отделимы, и применить теорему 2.

Литература

[1] Александров А.Д. Аддитивные функции множества в абстрактных пространствах // Мат. сб. 1941. Т. 9 (51). С. 563–628.

[2] Саженков А.Н. Принцип ограниченности для мер: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1984. 63 с.

[3] Климкин В.М., Срибная Т.А. Исчерпываемость регулярной функции множества в топологическом пространстве // Мат. заметки. 1991. Т. 50. № 5. С. 43–47.

[4] Срибная Т.А. Равномерная исчерпываемость семейства регулярных векторных внешних мер // Вестник СамГУ. 2007. № 2 (52). С. 57–66.

[5] Климкин В.М. Введение в теорию функций множества. Саратов: Изд-во Саратовского гос. ун-та, 1989. 210 с.

[6] Саженков А.Н. Ограниченность векторных внешних мер // Матем. заметки. 1979. Т. 25. № 6. С. 913–917.

[7] Lucia P., Morales P. Equivalence of Brooks-Jewett, Vitali-Hahn-Saks and Nikodym convergence theorems for uniform semigroup-valued additive functions on a Boolean ring // Ricerche Mat. 1986. V. 35. P. 75–87.

[8] Andrea A.B., Lucia P. The Brooks-Jewett Theorem on an Orthomodular Lattice // Journ. of Math. Anal. and Appl. 1991. V. 154. P. 507–522.

Поступила в редакцию 5/*III*/2012;
в окончательном варианте — /*III*/2012.

UNIFORM EXHAUSTIVITY OF A FAMILY OF REGULAR SET FUNCTIONS ON TOPOLOGICAL SPACES

© 2012 T.A. Sribnaya[2]

Conditions for the uniform exhaustivity of a family of regular set functions defined on an algebra Σ of subsets of a σ-topological space and taking values in arbitrary topological space are found.

Key words: regular set functions, σ-topological space, uniformly exhaustive set functions, uniformly quasi-triangular set functions, composition set functions, outer measures, additive set functions.

Paper received 5/*III*/2012.
Paper accepted 5/*III*/2012.

[2]Sribnaya Tatyana Arkadievna (sribnaya@ssu.samara.ru), the Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.