УДК 330.101.54

*А.Л. Сараев, Л.А. Сараев**

К ОЦЕНКЕ ПРИБЫЛИ И ЗАТРАТ ПРЕДПРИЯТИЙ, МОДЕРНИЗИРУЮЩИХ СТРУКТУРУ ПРОИЗВОДСТВА

В статье предложен вариант метода оценки макроскопических экономических показателей предприятия, находящегося в условиях структурной модернизации собственного производства. Разработана соответствующая математическая модель и получены уравнения процесса структурной замены старого производства новым производством. Вычислены макроскопические экономические характеристики производственной функции, функции затрат и функции прибыли предприятия в целом. Численный анализ модели процесса модернизации предприятия выполнен для случаев дигрессивных и прогрессивных издержек компонентов производства.

Ключевые слова: предприятие, структура, факторы производства, производственная функция, затраты, прибыль, ресурсы, модернизация, усреднение, макроскопические свойства.

Производство предприятием любой продукции сопровождается использованием определенных ресурсов. Эти ресурсы, выражаемые обычно в денежной форме, удобно представлять в виде трехмерного вектора объемов факторов производства:

$$\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3) = (K, L, M).$$

Здесь $Q_1 = K$ – основной капитал (производственные фонды), $Q_2 = L$ – привлекаемые в производство трудовые ресурсы, $Q_3 = M$ – используемые в производстве материалы и технологии. Компоненты вектора объемов факторов производства всегда ограничены своими максимальными значениями

$$0 \le K \le K_1, 0 \le L \le L_1, 0 \le M \le M_1,$$

поэтому для математического моделирования конфигурацию используемых ресурсов удобно задавать в виде безразмерного вектора [3]

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3).$$

Здесь $q_1 = \dfrac{K}{K_1}, q_2 = \dfrac{L}{L_1}, q_3 = \dfrac{M}{M_1}$ – относительные объемы факторов производства, $(0 \le q_i \le 1)$.

Сараев Александр Леонидович (alex.saraev@gmail.com), *Сараев Леонид Александрович* (saraev_leo@mail.ru), кафедра математики и бизнес-информатики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Очевидно, что радиус-вектор $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ определяет положение некоторой точки $N = (q_1, q_2, q_3)$ трехмерного пространства R^3. Множество всех таких точек пространства образует некоторую область в декартовой системе координат (q_1, q_2, q_3), заключенную внутри единичного куба. Таким образом, конфигурация факторов производства промышленного предприятия трактуется как математический континуум однопродуктового распределенного производства.

Выпуск продукции производства обеспечивается трехфакторной производственной функцией Кобба–Дугласа

$$TR = R\ K^a\ L^b\ M^c. \tag{1}$$

Здесь степенные показатели производственной функции a, b, c представляют собой эластичности выпуска по соответствующему ресурсу, R – стоимость продукции? произведенной на единичные объемы ресурсов.

Переменные пропорциональные затраты производства TVC выражаются в виде суммы

$$TVC = TVK + TVL + TVM\ . \tag{2}$$

Здесь $TVK = PK\ \ K$ – затраты, связанные с использованием основных производственных фондов, $TVL = PL\ \ L$ – затраты, связанные с использованием трудовых ресурсов, $TVM = PM\ \ M$ – затраты, связанные с использованием материалов и технологий, PK, PL, PM – стоимости затрат на единичные объемы ресурсов соответственно. Формула (2) принимает вид

$$TVC = PK\ \ K + PL\ \ L + PM\ \ M\,. \tag{3}$$

Переменные сверхпропорциональные затраты производства TSC выражаются в виде суммы

$$TSC = TSK + TSL + TSM\ . \tag{4}$$

Здесь $TSK = SK^u\ \ K^u$ – сверхпропорциональные затраты, связанные с использованием основных производственных фондов, $TSL = SL^v\ \ L^v$ – сверхпропорциональные затраты, связанные с использованием трудовых ресурсов, $TSM = SM^w\ \ M^w$ – сверхпропорциональные затраты, связанные с использованием материалов и технологий, SK, SL, SM – стоимости затрат на единичные сверхпропорциональные объемы ресурсов соответственно, u, v, w – показатели нелинейности для сверхпропорциональных затрат. Выражение (4) принимает вид

$$TSC = SK^u\ \ K^u + SL^v\ \ L^v + SM^w\ \ M^w. \tag{5}$$

Прибыль, представляющая собой разность между стоимостью выпуска продукции и стоимостью затрат на его производство, выражается соотношением

$$\begin{aligned} PR &= TR - TFC - TVC - TSC = \\ &= R\ K^a\ L^b\ M^c - PK\ \ K - PL\ \ L - PM\ \ M - \\ &\quad - SK^u\ \ K^u - SL^v\ \ L^v - SM^w\ \ M^w - TFC. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь TFC – постоянные затраты предприятия.

Предположим, что рассматриваемое предприятие подвергается процессу модернизации производства, согласно которому в его структуре возникает и развивается новый производственный компонент со своим уровнем выпуска продукции и своим уровнем производственных затрат. Такое развитие сопровождается внедрением в производство новых технологий, применением современных материалов, рациональным использованием основных фондов и квалифицированных трудовых ресурсов. Очевидно, что макроскопическое поведение всего производства в целом будет определяться числовыми параметрами производственных функций и функций затрат каждого компонента и способом взаимодействия компонентов производства.

Рассмотрим сначала процесс формирования макроскопических пропорциональных затрат неоднородного производства. Обозначим максимальные размеры объемов факторов нового производства – K_2, L_2, M_2. Тогда в декартовой системе координат трехмерного векторного пространства (q_1, q_2, q_3) всевозможные значения относительных объемов факторов всего производства ограничены объемом единичного куба. Всевозможные значения относительных объемов факторов нового модернизированного производства ограничены объемом параллелепипеда $\omega_2 = k \ l \ m$, а всевозможные значения факторов старого производства ограничены объемом $\omega_1 = 1 - \omega_2$. Здесь $k = \dfrac{K_2}{K_1}, l = \dfrac{L_2}{L_1}, m = \dfrac{M_2}{M_1}$ – относительные объемы факторов нового компонента производства и одновременно относительные линейные размеры объема параллелепипеда ω_2.

Формулу для переменных пропорциональных затрат (3) можно записать для каждого компонента производства

$$TVC = PK_s \ K + PL_s \ L + PM_s \ M, (s = 1, 2). \tag{7}$$

Для установления макроскопических переменных пропорциональных затрат неоднородного производства требуется установить связь между средними значениями величин выпуска продукции, прибыли и затрат производства

$$\langle TVC \rangle = PK^* \langle K \rangle + PL^* \langle L \rangle + PM^* \langle M \rangle. \tag{8}$$

Здесь PK^*, PL^*, PM^* – эффективные значения стоимостей затрат на единичные объемы ресурсов, соответственно.

Рассмотрим сначала пропорциональные затраты, связанные только с использованием ресурса основного капитала и производственных фондов K.

$$TVK = PK_s \ K, (s = 1, 2). \tag{9}$$

В координатном пространстве факторов производства (q_1, q_2, q_3) структура модернизируемого производственного предприятия представляется единичным кубом и вложенным в него параллелепипедом с взаимно параллельными соответствующими ребрами k, l, m.

Выберем некоторое сечение вложенного параллелепипеда, соответствующее произвольной координате k. Очевидно, что площадь этого поперечного сечения вычисляется по формуле $S_k = l \ \ m$. Расположение таких сечений в пространстве удобно описывать индикаторной функцией

$$\Omega_2(\mathbf{q}) = \Omega_2(q_1, q_2, q_3),$$

равной единице в точках объема вложенного параллелепипеда и равной нулю вне этого объема. Среднее значение этой функции по объему единичного куба равно объемному содержанию второго компонента производства [1]

$$\omega_2 = \langle \Omega_2 \rangle = k \ \ l \ \ m, \tag{10}$$

угловыми скобками обозначена операция усреднения. Следует отметить, что среднее значение этой функции на множестве точек поперечного сечения, соответствующего координате k, равно площади этого сечения [1]

$$\langle \Omega_2 \rangle \big|_{q_1 = k} = S_k = l \ \ m. \tag{11}$$

Соотношение (9) принимает вид

$$TVK = \left(PK_1 + [PK] \ \Omega_2 \right) \ K\,. \tag{12}$$

Здесь квадратными скобками обозначены разрывы величин – $[F] = F_2 - F_1$.

Предполагая в рассматриваемом сечении K затраты TVK постоянными, получим [1; 2]

$$K = \frac{1}{PK_1 + [PK] \ \Omega_2} \langle TVK \rangle. \tag{13}$$

Усредняя соотношение (13), определим среднее значение объема ресурса $\langle K \rangle$

$$\langle K \rangle = \int_0^1 K \ \ d\,q_1 = \langle TVK \rangle \int_0^1 \frac{d\,q_1}{PK_1 + [PK] \ \Omega_2} \tag{14}$$

Вычисляя интеграл в формуле (14), находим

$$\langle TVK \rangle = PK^* \ \langle K \rangle. \tag{15}$$

Здесь

$$PK^* = PK_1 \frac{k + \omega_2 (pk - 1)}{k - \omega_2 (pk - 1)(q - 1)}, pk = \frac{PK_2}{PK_1}. \tag{16}$$

Совершенно аналогично находятся эффективные соотношения для затрат, связанных с использованием трудовых ресурсов L

$$TVL = \left(PL_1 + [PL] \ \Omega_2 \right) \ L\,, \tag{17}$$

$$L = \frac{1}{PL_1 + [PL] \ \Omega_2} \langle TVL \rangle, \tag{18}$$

$$\langle L\rangle=\int_0^1 L\cdot d\,q_2=\langle TVL\rangle\int_0^1\frac{d\,q_2}{PL_1+[PL]\,\Omega_2}, \tag{19}$$

$$\langle TVL\rangle=PL^*\,\langle L\rangle, \tag{20}$$

$$PL^*=PL_1\frac{l+\omega_2\,(pl-1)}{l-\omega_2\,(pl-1)(l-1)},\; pl=\frac{PL_2}{PL_1}, \tag{21}$$

и материальных и технологических ресурсов M

$$TVM=\left(PM_1+[PM]\,\Omega_2\right)\,M, \tag{22}$$

$$M=\frac{1}{PM_1+[PM]\cdot\Omega_2}\langle TVM\rangle, \tag{23}$$

$$\langle M\rangle=\int_0^1 M\;\,d\,q_3=\langle TVM\rangle\int_0^1\frac{d\,q_3}{PM_1+[PM]\,\Omega_2}, \tag{24}$$

$$\langle TVM\rangle=PM^*\,\langle M\rangle, \tag{25}$$

$$PM^*=PM_1\frac{m+\omega_2\,(pm-1)}{m-\omega_2\,(pm-1)(m-1)},\; pm=\frac{PM_2}{PM_1}. \tag{26}$$

Применим полученный алгоритм для определения макроскопических сверхпропорциональных затрат неоднородного производства. Формулы (5) для компонентов сверхпропорциональных затрат записываются в виде

$$TSC=SK_s^{u_s}\;\,K^{u_s}+SL_s^{v_s}\;\,L^{v_s}+SM_s^{w_s}\;\,M^{w_s},\left(s=1,2\right). \tag{27}$$

Здесь u_s, v_s, w_s – показатели нелинейности для каждого компонента сверхпропорциональных затрат.

Сверхпропорциональные затраты, связанные только с использованием ресурса основного капитала и производственных фондов K, определяются соотношением

$$TSK=SK_s^{u_s}\;\,K^{u_s},\left(s=1,2\right). \tag{28}$$

или

$$TSK^{\xi_s}=SK_s\;\,K\cdot \tag{29}$$

Здесь $\xi_s=\dfrac{1}{u_s}$. С помощью индикаторной функции $\Omega_2(\mathbf{q})$ формула (29) представляется в виде

$$TSK^{\left(\xi_1+[\xi]\,\Omega_2\right)}=\left(SK_1+[SK]\,\Omega_2\right)\,K. \tag{30}$$

Предполагая в произвольном сечении параллелепипедов плоскостью $q_1 = k$ величину TSK постоянной, находим

$$K = \frac{1}{SK_1 + [SK]\ \Omega_2} \langle TSK \rangle^{(\xi_1 + [\xi]\ \Omega_2)}. \tag{31}$$

Вычисление среднего значения объема ресурса $\langle K \rangle$

$$\langle K \rangle = \int_0^k \frac{\langle TSK \rangle^{(\xi_1 + [\xi]\ l\ m)}}{SK_1 + [SK]\ l\ m} d\, q_1 + \int_k^1 \frac{\langle TSK \rangle^{\xi_1}}{SK_1} d\, q_1, \tag{32}$$

дает уравнение связи макроскопических величин $\langle TSK \rangle$ и $\langle K \rangle$

$$\langle TSK \rangle^{\xi_1} \frac{k^2\ \langle TSK \rangle^{[\xi]\ \omega_2\ k^{-1}} - (k-1)\ (k + (sk-1)\ \omega_2)}{k + \omega_2\ (sk-1)} = \langle K \rangle \tag{33}$$

В общем случае уравнение (33) решить аналитически относительно величины $\langle TSK \rangle$ нельзя, и оно допускает только численные решения.

Подобным образом находятся макроскопические соотношения для сверхпропорциональных затрат от использования трудовых ресурсов L:

$$\langle TSL \rangle^{\eta_1} \frac{l^2\ \langle TSL \rangle^{[\eta]\ \omega_2\ l^{-1}} - (l-1)\ (l + (sl-1)\ \omega_2)}{l + \omega_2\ (sl-1)} = \langle L \rangle, \tag{34}$$

и макроскопические соотношения для сверхпропорциональных затрат от использования материальных и технологических ресурсов M:

$$\langle TSM \rangle^{\zeta_1} \frac{m^2\ \langle TSM \rangle^{[\zeta]\ \omega_2\ m^{-1}} - (m-1)\ (l + (sm-1)\ \omega_2)}{m + \omega_2\ (sm-1)} = \langle M \rangle. \tag{35}$$

Здесь $\eta_s = \dfrac{1}{v_s}$, $\zeta_s = \dfrac{1}{w_s}$.

Если показатели нелинейности для сверхпропорциональных затрат одинаковы для обоих компонентов производства, то уравнения (33) −(35) совпадают с аналогичными соотношениями работы [2].

Макроскопические постоянные затраты неоднородного производства, представляющие собой среднее значение постоянных затрат компонентов производства, вычисляются по правилу смесей:

$$\langle TFC \rangle = \omega_1\ TFC_1 + \omega_2\ TFC_2 \tag{36}$$

Применим описанную выше процедуру к процессу формирования выпуска продукции неоднородного производства. Формулы для производственных функций компонентов производства имеют вид

$$TR = R_s \ K^{a_s} \ L^{b_s} \ M^{c_s} \ , (s = 1{,}2). \tag{37}$$

Стоимость продукции, произведенной на единичные объемы ресурсов R_s, представим в виде произведения стоимостей продукции произведенных на единичные объемы ресурсов каждого фактора производства в отдельности

$$R_s = RK_s^{a_s} \ RL_s^{b_s} \ RM_s^{c_s}, \tag{38}$$

и представим трехфакторную производственную функцию в виде произведения трех однофакторных функций

$$TR = TRK_s \ TRL_s \ TRM_s, (s = 1{,}2). \tag{39}$$

Здесь $TRK_s = RK_s^{a_s} \ K^{a_s}, TRL_s = RL_s^{b_s} \ L^{b_s}, TRM_s = RM_s^{c_s} \ M^{c_s}$.

Вклад в производство продукции, связанный только с использованием ресурса основного капитала и производственных фондов K, записывается в виде

$$TRK = RK_s^{a_s} \ K^{a_s},$$

или

$$TRK^{\alpha_s} = RK_s \ K. \tag{40}$$

Здесь $\alpha_s = \frac{1}{a_s}$. С помощью индикаторной функции $\Omega_2(\mathbf{q})$ соотношение (40) принимает вид

$$TRK^{(\alpha_1 + [\alpha] \cdot \Omega_2)} = (RK_1 + [RK] \ \Omega_2) \ K. \tag{41}$$

Предполагая в произвольном сечении параллелепипедов плоскостью $q_1 = k$ величину TRK постоянной, находим

$$K = \frac{1}{RK_1 + [RK] \ \Omega_2} \langle TRK \rangle^{(\alpha_1 + [\alpha] \ \Omega_2)}. \tag{42}$$

Осреднение соотношения (42)

$$\langle K \rangle = \int_0^k \frac{\langle TRK \rangle^{(\alpha_1 + [\alpha] \ l \ m)}}{RK_1 + [RK] \ l \ m} d \, q_1 + \int_k^1 \frac{\langle TRK \rangle^{\alpha_1}}{RK_1} d \, q_1, \tag{43}$$

дает уравнение связи макроскопических величин $\langle TRK \rangle$ и $\langle K \rangle$

$$\langle TRK \rangle^{\alpha_1} \ \frac{k^2 \ \langle TRK \rangle^{[\alpha] \ \omega_2 \ q^{-1}} - (k-1) \ (k + (rk-1) \ \omega_2)}{k + \omega_2 \ (rk-1)} = \langle K \rangle. \tag{44}$$

Аналогично находятся уравнения связи макроскопических величин $\langle TRL \rangle$ и $\langle L \rangle$:

$$\left\langle TRL\right\rangle^{\beta_1} \frac{l^2 \left\langle TRL\right\rangle^{[\beta]\,\omega_2\, l^{-1}} - (l-1)\left(l+(rl-1)\,\omega_2\right)}{l+\omega_2\,(rl-1)} = \left\langle L\right\rangle, \tag{45}$$

и уравнения связи макроскопических величин $\left\langle TRM\right\rangle$ и $\left\langle M\right\rangle$

$$\left\langle TRM\right\rangle^{\gamma_1} \frac{m^2 \left\langle TRM\right\rangle^{[\gamma]\,\omega_2\, m^{-1}} - (m-1)\left(m+(rm-1)\,\omega_2\right)}{m+\omega_2\,(rm-1)} = \left\langle M\right\rangle, \tag{46}$$

Здесь $\beta_s = \dfrac{1}{b_s}$, $\gamma_s = \dfrac{1}{c_s}$, $rk = \dfrac{RK_2}{RK_1}$, $rl = \dfrac{RL_2}{RL_1}$, $rm = \dfrac{RM_2}{RM_1}$.

Если показатели нелинейности для сверхпропорциональных затрат одинаковы для обоих компонентов производства, то уравнения (45) –(46) совпадают с аналогичными соотношениями работы [2].

При полной или частичной модернизации производства, выражающейся в замене и вытеснении старого производства новым производством, объемное содержание ω_2 и его относительные размеры q, l, m будут меняться от нуля до единицы. При этом скорость изменения этих величин в зависимости от изменения объемного содержания ω_2 будет различаться. Эти различия удобнее всего оценить с помощью степенных функций

$$q = \omega_2^{\sigma}, l = \omega_2^{\rho}, m = \omega_2^{\mu} \tag{47}$$

Здесь σ, ρ, μ – показатели степени роста относительных линейных размеров нового сегмента производства. Из соотношения (10) видно, что показатели σ, ρ, μ не являются независимыми и всегда выполняется равенство $\sigma + \rho + \mu = 1$.

Численный анализ модели процесса модернизации предприятия выполнен в двух вариантах. Кривые зависимостей макроскопической производственной функции, макроскопической функции общих затрат и макроскопической функции прибыли модернизируемого предприятия от объемного содержания ω_2 рассчитаны по формулам (8), (39), (40), (54), (55).

Расчетные значения параметров предприятия для обоих вариантов развития процесса модернизации приведены в таблице.

В первом варианте предполагалось, что новый компонент предприятия обеспечивает одновременно и более высокий уровень выпуска продукции и более низкий уровень производственных затрат в условных денежных единицах. Такой вариант развития событий представлен на рис. 1. и рис. 2.

Здесь кривая прибыли предприятия $\left\langle PR\right\rangle$ является монотонно возрастающей.

Во втором варианте предполагалось, что новый компонент предприятия обеспечивает более высокий уровень выпуска продукции и более высокий уровень производственных затрат в условных денежных единицах. Этот вариант развития событий представлен на рис. 2 и рис. 3.

Таблица

Расчетные значения параметров предприятия для двух вариантов развития процесса модернизации

Параметры Расчетов	Первый Вариант		Второй Вариант	
	V_1	V_2	V_1	V_2
σ	0,15	0,15	0,15	0,15
ρ	0,35	0,35	0,35	0,35
μ	0,50	0,50	0,50	0,50
a	0,52	0,50	0,52	0,50
b	0,49	0,47	0,49	0,47
c	0,51	0,49	0,51	0,49
u	1,20	1,18	1,20	1,18
v	1,30	1,25	1,30	1,25
w	1,40	1,37	1,40	1,37
K_1	10,00	10,00	10,00	10,00
L_1	3,00	3,00	3,00	3,00
M_1	2,00	2,00	2,00	2,00
TFC	5,00	3,00	5,00	3,00
PK	2,00	1,50	2,00	2,50
PL	1,50	0,75	1,50	2,00
PM	0,50	0,25	0,50	0,75
SK	1,00	0,75	1,00	1,50
SL	0,50	0,25	0,50	0,75
SM	0,50	0,25	0,50	0,75
RK	6,00	7,00	6,00	7,00
RL	4,00	5,00	4,00	5,00
RM	3,00	4,00	3,00	4,00

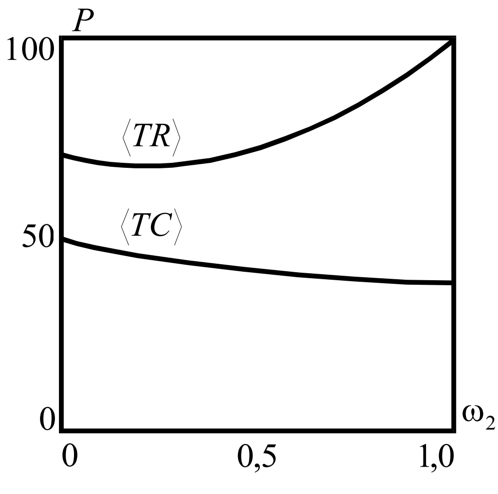

Рис. 1

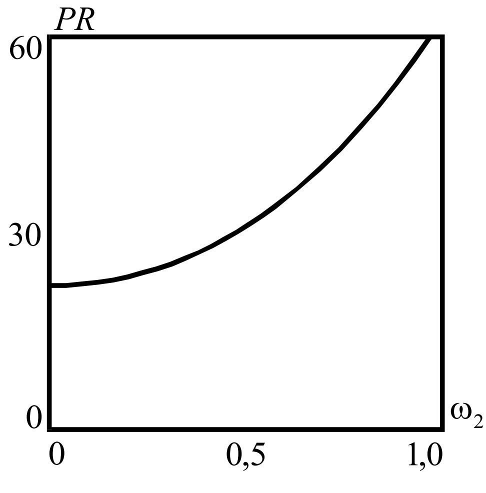

Рис. 2

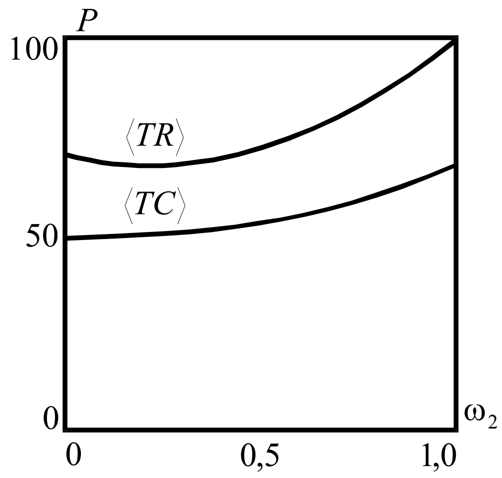

Рис. 3

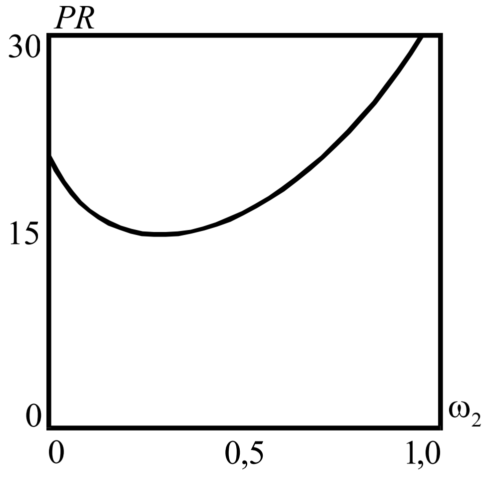

Рис. 4

В этом случае кривая прибыли предприятия $\langle PR \rangle$ является сначала и до определенного момента монотонно убывающей и только после достаточного развития процесса модернизации становится возрастающей. Это подтверждает часто встречающуюся экономическую ситуацию, согласно которой проводимая на предприятии модернизация может приводить до некоторого момента к убыткам и лишь после преодоления определенного порогового значения объемного содержания модернизируемого производства дает ожидаемый положительный эффект.

Библиографический список

1. Сараев А.Л., Сараев Л.А. К теории структурной модернизации производственных предприятий // Вестник Самарского государственного университета. Сер.: Экономика и управление. 2012. № 10 (101). С. 160–169.

2. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Экономико-математическая модель структурной модернизации производственных предприятий // Глобальное измерение в современной науке и образовании: сб. тр. II Междунар. науч.-практ. конф., 26 декабря 2012 года / под научн. ред. О. П. Чигишевой. Ростов н/Д.: Издательство Международного исследовательского центра «Научное сотрудничество», 2013. С. 24–37.

3. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Континуальная теория производственного процесса и производительности факторов производства промышленных предприятий //Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 7 (98). С. 196–203.

A.L. Saraev, L.A. Saraev*

TO THE ASSESSMENT OF BENEFITS AND COSTS OF AN ENTERPRISE UPGRADING PATTERN OF PRODUCTION

In the published paper the method of macroscopic economic performance evaluation of enterprises is described in terms of structural modernization of its own production. According to the method a mathematical model was developed and the equations of process of structural change from old production to the new one were obtained. We calculate the macroscopic economic characteristics of production function, cost function and profit function of the whole enterprise. Numerical analysis of the company's modernization process model is made for the cases of digressive and progressive components of costs of production.

Key words: enterprise structure, factors of production, production function, costs, profits, resources, modernization, averaging, macroscopic properties.

* *Saraev Alexander Leonidovich* (alex.saraev@gmail.com), *Saraev Leonid Alexandrovich* (saraev_leo@mail.ru), the Dept. of Mathematics and Business-Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.