УДК 517.972

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНАЯ ИГРА СБЛИЖЕНИЯ-УКЛОНЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, I

© 2013 В.Л. Пасиков[1]

Для конфликтно управляемой дифференциальной системы с запаздыванием изучена динамическая игра сближения-уклонения относительно функционального целевого множества. В работе не предполагается относительно правой части системы выполнения условия седловой точки. При доказательстве теорем о сближении-уклонении используется норма гильбертова пространства.

Ключевые слова: дифференциальная игра, последействие, норма, позиционная процедура, гильбертово пространство.

1. Задача сближения с целевым множеством

Предлагаемые методы исследования опираются на концепцию позиционной дифференциальной игры, разработанную под руководством академика Н.Н. Красовского [1–12], и модифицированную в [13; 14].

Рассматривается конфликтно-управляемая система с последействием

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x[t+s], u, v), \quad x[t_0+s] = x_0(s). \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор системы (1.1); r_1— мерный вектор u и r_2 — мерный вектор, v — управляющие воздействия, выбором которых распоряжаются первый и второй игроки, соответственно, которые стеснены ограничениями

$$u \in P, v \in Q, \tag{1.2}$$

где P, Q — компакты в евклидовых пространствах R^{r_1}, R^{r_2}; f — векторный функционал, определенный и непрерывный на произведении $[t_0, \theta] \times B_\tau \times P \times Q$, B_τ любое из пространств $C_{[-\tau,0]}$ или H_τ; $C_{[-\tau,0]}$ — пространство непрерывных n-мерных функций $x(s)$, $s \in [-\tau, 0]$, с нормой $\|x(s)\|_2 = \max\limits_{s\in[-\tau,0]} \|x(s)\|_1$, $\|x(s)\|_1 = (x(s), x(s))^{\frac{1}{2}}$— евклидова норма в n-мерном пространстве; H_τ — гильбертово пространство n-мерных функций $x(s)$ с нормой $\|x(s)\|_3 = (\|x(0)\|_1^2 + \int\limits_{-\tau}^{0} \|x(s)\|_1^2 ds)^{\frac{1}{2}}$, $\tau > 0$ [5].

[1]Пасиков Владимир Леонидович (pasikov_fmf@mail.ru), кафедра математического анализа и информатики Орского гуманитарно-технологического института (филиал Оренбургского государственного университета), 462403, Российская Федерация, г. Орск, ул. Школьная, 18.

Функционал $f(t, x(s), u, v)$ удовлетворяет для любого ограниченного множества $\Omega \subset C_{[-\tau,0]}$ условию Липшица по $x(s)$ и следующему условию роста: $\|f(t, x(s)u, v)\|_1 \leqslant \xi_1(t) + \xi_2(t)\|x(s)\|_2$, где $\xi_1(t), \xi_2(t)$ неотрицательные суммируемые на $[t_0, \theta]$ функции. Каковы бы ни были начальные значения $t_* \in [t, 0]$, $x_{t_*}[s] \in C_{[-\tau,0]}$ и измеримые реализации $u[t], v[t]$, удовлетворяющие (1.2), указанные выше ограничения на правую часть системы (1.1) гарантируют существование и продолжимость на $[t_*, \theta]$ абсолютно непрерывных решений задачи Коши в смысле Каратеодори [5; 8; 11].

Отрезок $x_t[s] = x[t+s]$, $s \in [-\tau, 0]$, траектории системы (1.1) называется состоянием системы в момент t, $t \in [-t_0, \theta]$. Пару $p = \{t, x_t[s]\}$ будем называть позицией игры в момент t, $p_0 = \{t_0, x_0[s]\}$ — начальная позиция.

Ниже рассматриваются достаточные условия разрешимости задачи сближения с целевым множеством М. Все рассуждения проводятся по плану соответствующих доказательств из [1; 6–11], а также [13; 14]. Отметим что для случая пространства $C_{[-\tau,0]}$ задача исследована в [13; 14], поэтому здесь рассматриваются вопросы, относящиеся к пространству H_τ.

Рассматриваемая задача сближения состоит в следующем. В фазовом пространстве системы (1.1) задано некоторое замкнутое множество $M \subset H_\tau$, а также начальная позиция $p_0 = \{t_0, x_0(s)\}$. В задаче о сближении, стоящей перед первым игроком, требуется обеспечить попадание движения $x[t]$ системы (1.1) в момент θ на замкнутое множество М. Решение задачи о сближении получено в классе позиционных процедур управления первого игрока, разработанных в [1–12], а также [13; 14]. В данной статье эти процедуры распространены на дифференциальные системы с последействием, вообще говоря нелинейные, с использованием нормы гильбертова пространства.

Введем обозначения

$$\rho(t, x_t[s], l) = \max_{u\in P} \min_{v\in Q}(l, f(t, x_t[s], u, v)), \tag{1.3}$$

$$F(t, x_t[s]) = co\{f : f = f(t, x_t[s], u, v), u \in P, v \in Q\}, \tag{1.4}$$

$$F_l(t, x_t[s]) = \{f : (l, f) \leqslant \rho(t, x_t[s], l), f \in F(t, x_t[s])\}, \tag{1.5}$$

$$S = \{l : l \in R^n, \|l\|_1 = 1\}, \tag{1.6}$$

где символ $co\{f\}$ означает выпуклую оболочку множества векторов $\{f\}$.

Для любых двух моментов t_*, $t^* \in [t_0, \theta]$, $t_* < t^*$, символом $Y_l(t^*, t_*, y_*[s])$ обозначим множество всех отрезков $y_{t^*}[s] = y[t^*+s]$, $y_{t^*}[s] \in H_\tau$, в которые переходят в момент t^* решения y[t], $t \in [t_*, t^*]$, включения

$$\frac{dy(t)}{dt} \in F_l(t, y[t+s]) \tag{1.7}$$

с начальным условием $y_{t_*}[s] = y[t_* + s]$.

Пусть каждому $t \in [t_0, \theta]$ поставлено в соответствие непустое множество $W_t = \{y[t+s]\} = \{y_t[s]\}$, $y_t[s] \in H_\tau$. Зафиксируем число $\xi \in [-\tau, 0]$. Множество $W_{t\xi} = \{y_t[\xi] : y_t[s] \in W_t\}$ назовем ξ-сечением множества W_t. Последовательность $\{y_t^{(k)}[\xi]\}$, где $y_t^{(k)}[s] \in H_\tau$ будем называть ξ-сечением последовательности $\{y_t^{(k)}[s]\}$. Заметим, что элементами W_t, $t \in [t_0, \theta]$, могут быть и измеримые селекторы множества решений включения (1.7) согласно [4, с. 55].

Определение 1. Система множеств W_t, $t \in [t_0, \theta]$, называется минимаксно u-стабильной, если для любых двух моментов t_*, $t \in [t_0, \theta]$, $t_* < t^*$, любого отрезка $y_{t_*}[s] \in W_{t_*}$ и любого вектора l, $l \in S$, имеет место соотношение

$$W_{t^*} \bigcap Y_l(t^*, t_* y_{t_*}[s]) \neq \emptyset. \tag{1.8}$$

В [13; 14] доказано следующее утверждение.

Лемма 1. Если $\{W_t\}$, $t \in [t_0, \theta]$, минимаксно u-стабильная система множеств W_t, то ее замыкание $\overline{\{W_t\}}$ в $C[t_0, \theta]$ так же минимаксно u-стабильно.

Обозначим символом $U_l = U_l(t, x_t[s])$ множество всех значений $u_l = u_l(t, x_t[s]) \in \in P$, удовлетворяющих равенству

$$\min_{v \in Q}(l, f(t, x_t[s], u_l, v)) = \rho(t, x_t[s], l). \tag{1.9}$$

Положим

$$r(x_t\,[s]\,, W_t) = \inf_{y_t[s] \in W_t} \|y_t\,[s] - x_t\,[s]\|_3\,. \tag{1.10}$$

Пусть для данного $x_t[s]$ последовательность $\{y_t^{(k)}[s]\}$ является минимизирующей для (1.10). Составим множество предельных точек последовательности $\{y^{(k)}\,[0]\}$, являющейся 0-сечением последовательности $\{y_t^{(k)}[s]\}$. $Z(x_t\,[0])$ — совокупность элементов этого множества, ближайших к $x_t(0)$ в R^n;Γ_j — некоторое разбиение промежутка $[t_0, \theta]$ моментами $\tau_i (i = \overline{0, n_0}; \tau_0 = t_0, \tau_{n_0} = \theta)$, δ_{j} — диаметр разбиения Γ_{j}.

Определение 2. Аппроксимационным движением системы (1.1), порожденным позиционной процедурой управления первого игрока с начальным состоянием $p_0 = \{t_0, x_0(s)\}$, назовем всякую абсолютно непрерывную вектор-функцию $x[t]_\Delta = x[t, p_0, \Gamma_j]$, удовлетворяющую на каждом полуинтервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ разбиения Γ_j, $j \in N$, почти всюду включению

$$\frac{dx(t)_\Delta}{dt} \in F(t, x_t[s]_\Delta, u_{l_{[\tau_i]}}), \tag{1.11}$$

$F(t, x, u_{l_{[\tau_i]}}) = co\{f : f = f(t, x, u_{l_{[\tau_i]}}, v), v \in Q\}$ с начальным условием $x_{\tau_i}[s]_\Delta = x[\tau_i + s]_\Delta$, $u_{l_{[\tau_i]}} \in U_{l_{[\tau_i]}}(\tau_i, x_{\tau_i}[s])$, $l_{[\tau_i]} = = \begin{cases} \frac{s_{\tau_i}}{\|s_{\tau_i}\|_1}, \text{ если } s_{\tau_i} \neq 0\,, \\ \text{произвольному } l \in S, \text{ если } s_{\tau_i} = 0\,, \end{cases}$ $s_{\tau_i} = y_{\tau_l}(0)_\Delta - x_{\tau_i}(0)$, $y_{\tau_i}(0)$ — элемент множества $\mathrm{Z}(x_{\tau_i}(0)_{\Delta j})$.

Определение 3. Движением системы (1.1) с начальным условием $x_0[s] = = x[t_0 + s]$, порожденным позиционной процедурой управления первого игрока, назовем абсолютно непрерывную вектор-функцию $x[t] = x[t, p_0]$, $t \in [t_0, \theta]$, для которой найдется последовательность аппроксимационных движений $x[t]_{\Delta j} = = x[t, p_0, \Gamma_j]$, $t \in [t_0, \theta]$, равномерно по t на отрезке $[t_0, \theta]$, удовлетворяющая соотношению $x[t] = \lim\limits_{j \to \infty} x[t]_{\Delta j}$; здесь $\{\delta_j\}$ — последовательность диаметров разбиений Γ_j, для которой $\lim\limits_{j \to \infty} \delta_j = 0$.

Известно [6; 8], что множество движений системы (1.1), определенное таким образом, не пусто; как и в случае отсутствия эффекта последействия [1], существование движений $x[t]$ непосредственно проверяется предельным переходом от соответствующих аппроксимационных движений [6–8].

Уточним постановку задачи. Пусть $r(x, M)$ — расстояние в H_τ от отрезка $x[\theta + + s]$ до множества M.

Определение 4. При заданной начальной позиции игры p_0 позиционная процедура управления первого игрока гарантирует встречу движений $x[t] = x[t, p_0]$ с целью M в момент θ, если $r(x[\theta + s], M) = 0$, где $x[t]$ — любое движение $x[t, p_0]$.

Ниже рассматриваются достаточные условия разрешимости задач сближения с целевым множеством M. Все рассуждения проводятся по плану соответствующих доказательств из [1; 7–10], а также [13; 14].

Теорема 1. Пусть на промежутке $[t_0, \theta]$ задана минимаксно u-стабильная система $\{W_t\}$ множеств $W_t,\ t \in [t_0, \theta]$, причем $M \supset W_\theta$.

Если начальная позиция игры $p_0 = \{t_0, x_0\,[s]\}$ удовлетворяет условию $r(x_0\,[s]\,, W_{t_0}) = 0$, то позиционная процедура управления первого игрока гарантирует встречу движений $x[t] = x[t, p_0]$ системы (1.1) с целью M в момент θ.

Сформированная теорема вытекает из следующий леммы, доказательство которой проводится, как и в [13; 14] по плану доказательства леммы 2.1 работы [7].

Лемма 2. Пусть начальная позиция игры $p_0 = \{t_0, x_0\,[s]\}$ такова, что $r(x_0\,[s]\,, W_{t_0}) = 0$.

Если система множеств $W_t,\ t \in [t_0, \theta]$, минимаксно u-стабильна, то позиционная процедура управления первого игрока удовлетворяет условию

$$r(x_t[s], W_t) = 0, t \in [t_0, \theta], \tag{1.12}$$

где $x[t]$ — любое движение $x[t, p_0]$.

Доказательство. Пусть система множеств $W_t,\ t \in [t_0, \theta]$, минимаксно u-стабильна и пусть $r(x_0\,[s]\,, W_{t_0}) = 0$. Рассмотрим произвольно выбранное движение $x[t] = x[t, p_0]$ на $[t_0, \theta]$, порожденное позиционной процедурой управления первого игрока. По определению этого движения существует последовательность функций $\{x[t]_{\Delta j}\} = \{x[t, p_0, \Gamma_j]\}$, равномерно сходящаяся на $[t_0, \theta]$ к $x[t]$. Справедливость соотношения (1.12) будет, очевидно, показана, если установлено, что для любого $\varepsilon > 0$ отрезок $x_t[s]_{\Delta j}$ любой функции $x[t]_{\Delta j}$ с достаточно большим номером j содержится в ε-окрестности W_t^ε множества W_t в смысле нормы H_τ какое бы ни было $t \in (t_0, \theta]$. Для этого выберем из последовательности $\{x[t]_{\Delta j}\}$ произвольным образом функцию $x[t]_{\Delta j}$ и построим вдоль нее оценку величин $\varepsilon^2_\Delta[\tau_{i+1}]$ через величины $\varepsilon^2_\Delta[\tau_i]$ и δ. Здесь и далее $\varepsilon_\Delta[t] = \inf\limits_{x[t]} r(x[t], W_t)$ в смысле нормы H_τ.

Пусть $y_{\tau_i}(0)_{\Delta j}$ — элемент множества $Z(x_{\tau_i}(0)_{\Delta j})$, определяющий при $t = \tau_i$, согласно (1.9), управление $u_{l_{[\tau_i]}}$. Не нарушая общности считаем, что сечение $\{y^{(k)}_{\tau_i}(0)_{\Delta j}\}$, порождающее вектор $y_{\tau_i}(0)_{\Delta j}$ для некоторого j, сходится к $y_{\tau_i}(0)_{\Delta j}$. Здесь $\{y^{(:)}_{\tau_i}[s]_{\Delta j}\}$ — это минимизирующая для (1.10) последовательность.

Рассмотрим позицию $p(k,i) = \{\tau_i, y^{(k)}_{\tau_i}[s]_{\Delta j}\}$. В силу минимаксной u-стабильности системы множеств $W_t,\ t \in [t_0, \theta]$ среди движений $y^{(k)}[t]_{\Delta j} = y[t, p(k,i), \Gamma]$ есть движение со свойством [8]

$$y^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_\Delta \in W_{\tau_{i+1}}. \tag{1.13}$$

По определению величины $\varepsilon_\Delta[t]$ с учетом (1.13) имеет оценку

$$\varepsilon^2_\Delta[\tau_{i+1}] \leqslant \left\| y^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta j} - x_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta j} \right\|^2_3 = \left\| y^{(k)}_{\tau_{i+1}}(0)_{\Delta j} - x_{\tau_{i+1}}(0)_{\Delta j} \right\|^2_1 +$$
$$+ \int\limits_{-\tau}^{0} \left\| y^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta j} - x_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta j} \right\|^2_1 ds. \tag{1.14}$$

Отрезки $x_{\tau_{i+1}}[s]_\Delta$,$y^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_\Delta$ траекторий $x[t]_\Delta,\ y^{(k)}[t]_\Delta$ могут быть представлены [5; 6] в следующем виде (считаем что $\tau_{i+1} - \tau_i \leqslant \tau,\ \alpha_i(t) = t - \tau_i,\ \alpha_i = \tau_{i+1} - \tau_i$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$):

$$x_t[s]_\Delta = \begin{cases} x_{\tau_i}(0)_{\Delta j} + \int_{\tau_i}^{t+s} f[\xi] d\xi, & -\alpha_i(t) \leqslant s \leqslant 0, \\ x_{\tau_i}[s + \alpha_i(t)], & -\tau \leqslant s \leqslant -\alpha_i(t), \end{cases} \tag{1.15}$$

$$y^{(k)}_t[s] = \begin{cases} y^{(k)}_{\tau_i}(0)_{\Delta j} + \int_{\tau_i}^{t+s} f_{l_{[\tau_i]}}[\xi] d\xi & -\alpha_i(t) \leqslant s \leqslant 0, \\ y^{(k)}_{\tau_i}[s + \alpha_i(t)], & -\tau \leqslant s \leqslant -\alpha_i(t), \end{cases} \tag{1.16}$$

здесь $f[t]$, $f_{l_{[\tau_i]}}[t]$ — суммируемые функции, удовлетворяющие при почти всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ включениям $f[t] \in F(t, x_t[s], u_{l_{[\tau_i]}})$,

$$u_{l_{[\tau_i]}} \in U_{l[\tau_i]}(\tau_i, x_{t_i}[s]_\Delta), f_{l_{[\tau_i]}}[t] \in F_{l_{[\tau_i]}}(t, y_t^{(k)}[s]_\Delta).$$

Подставляем (1.15), (1.16) в (1.14)

$$\left\| y_{\tau_{i+1}}^{(k)}(0)_{\Delta j} - x_{\tau_{i+1}}(0)_{\Delta j} \right\|_1^2 + \int_{-\tau}^{0} \left\| y_{\tau_{i+1}}^{(k)}[s] - x_{\tau_{i+1}}[s]_\Delta \right\|_1^2 ds =$$

$$= \left\| y_{\tau_i}^{(k)}(0)_{\Delta j} - x_{\tau_i}(0)_{\Delta j} + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_{l[\tau_i]}[\xi] d\xi - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi] d\xi \right\|_1^2 +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} \left\| y_{\tau_i}^{(k)}(0)_{\Delta j} - x_{\tau_i}(0)_{\Delta j} - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} f_{l_{[\tau_i]}}[\xi] d\xi + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} f[\xi] d\xi \right\|_1^2 ds. \tag{1.17}$$

Будем оценивать первое слагаемое в правой части (1.17)

$$\left\| y_{\tau_i}^{(k)}(0)_{\Delta j} - x_{\tau_i}(0)_{\Delta j} + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_{l_{[\tau_i]}}[\xi] d\xi - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi] d\xi \right\|_1^2 =$$

$$= \left\| y_{\tau_i}^{(k)}(0)_{\Delta j} - x_{\tau_i}(0)_{\Delta j} \right\|_1^2 + 2(y_{\tau_i}^{(k)}(0)_{\Delta j} - x_i(0)_{\Delta j})(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_{[\tau_i]}[\xi] d\xi -$$

$$- \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi] d\xi) + \left\| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_{l_{[\tau_i]}}[\xi] d\xi - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi] d\xi \right\|^2. \tag{1.18}$$

Согласно теореме Каратеодори [1], вектор $f(t)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, записывается в виде

$$f[t] = \sum_{\mu=1}^{n+1} \alpha_t^{(\mu)} f(t, x_t[s]_\Delta, u_{l_{[\tau_i]}}, v_t^{(\mu)}), \tag{1.19}$$

$$0 \leqslant \alpha_t^{(\mu)}, \quad \textstyle\sum_{\mu=1}^{n+1} \alpha_t^{(\mu)} = 1, \quad u_{l[\tau_i]} \in U(\tau_i, x_{\tau_i}[s]_\Delta), \quad v_t^{(\mu)} \in Q \ .$$

Обозначим $s_{\tau_i}^{(k)} = y_{\tau_i}^{(k)}(0)_{\Delta j} - x_{\tau_i}(0)_{\Delta j}$, $l_{[\tau_i]}^{(k)} = \frac{s_{\tau_i}^{(k)}}{\left\| s_{\tau_i}^{(k)} \right\|_1}$, отсюда имеем:

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sum_{\mu=1}^{n+1} \alpha_\xi^{(\mu)} (l_{[\tau_i]}^{(k)}, f(\xi, x_\xi(0)_{\Delta j} u_{l_{[\tau_i]}}, v_\xi^{(\mu)})) d\xi =$$

$$= \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\xi^{(\mu)} (l_{[\tau_i]}^{(k)}, f(\tau_i, x_{\tau_i}(0)_{\Delta j} u_{l_{[\tau_i]}}, v_\xi^{(\mu)})) d\xi +$$

$$+ \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sum_{\mu=1}^{n+1} \alpha_\xi^{(\mu)} (l_{[\tau_i]}^{(k)}, f(\xi, x_\xi(0)_{\Delta j} u_{l_{[\tau_i]}}, v_\xi^{(\mu)}) - f(\tau_i, x_\xi(0)_{\Delta j}, u_{l_{[\tau_i]}}, v_\xi^{(\mu)})) d\xi +$$

$$+ \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sum_{\mu=1}^{n+1} \alpha_\xi^{(\mu)} (l_{[\tau_i]}^{(k)}, f(\tau_i, x_\xi(0)_{\Delta j} u_{l_{[\tau_i]}}, v_\xi^{(\mu)}) -$$

$$- f(\tau_i, x_{\tau_i}(0)_{\Delta j}, u_{l_{[\tau_i]}}, v_\xi^{(\mu)})) d\xi.$$

Учитывая непрерывность множества $F(t, x\,[s]\,, u_l)$ по t, $x\,[s]$, условие Липшица и условия (1.3)–(1.6), как и в [7–9], можно утверждать, что

$$\Big|(l^{(k)}_{[\tau_i]}, f(\xi, x_\xi(0)_{\Delta j}, u_{l_{[\tau_i]}}, v^{(\mu)}_\xi) - f(\tau_i, x_\xi(0)_{\Delta j}, u_{l_{[\tau_i]}}, v^{(\mu)}_\xi))\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \omega_1(\xi - \tau_i), \tag{1.20}$$
$$\Big|(l^{(k)}_{[\tau_i]}, f(\tau_i, x_\xi(0)_{\Delta j}, u_{l_{[\tau_i]}}, v^{(\mu)}_\xi) - f(\tau_i, x_{\tau_i}(0)_{\Delta j}, u_{l_{[\tau_i]}}, v^{(\mu)}_\xi))\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \omega_2(\xi - \tau_i). \tag{1.21}$$

Из (1.19)–(1.21) следует представление

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sum_{\mu=1}^{n+1} \alpha^{(\mu)}_\xi (l^{(k)}_{[\tau_i]}, f(\xi, x_\xi(0)_{\Delta j}, u_{l_{[\tau_i]}}, v^{(\mu)}_\xi)) d\xi =$$
$$= \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sum_{\mu=1}^{n+1} \alpha^{(\mu)}_\xi (l^{(k)}_{[\tau_i]}, f(\tau_i, x_{\tau_i}(0)_{\Delta j}, u_{l_{[\tau_i]}}, v^{(\mu)}_\xi) + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \varphi_1(\xi) d\xi +$$
$$+ \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \varphi_2(\xi) d\xi. \tag{1.22}$$

Здесь $\omega_1(t-\tau_i)$, $\omega_2(t-\tau_i)$ — непрерывные положительные монотонно убывающие при $t-\tau_i \to 0$ функции, причем $\omega_1(t-\tau_i) \to 0$, $\omega_2(t-\tau_i) \to 0$ при $t-\tau_i \to 0$ равномерно относительно моментов τ_i, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$; $\varphi_1(t)$; $\varphi_2(t)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие соотношениям $|\varphi_1(t)| \leqslant \omega_1(t-\tau_i)$, $|\varphi_2(t)| \leqslant \omega_2(t-\tau_i)$, аналогично [9].

Из (1.9) получаем, что для достаточно больших k

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^{(\mu)}_\xi (l^{(k)}_{[\tau_i]}, f(\tau_i, x_{\tau_i}(0)_{\Delta j}, u_{l_{[\tau_i]}}, v^{(\mu)}_\xi)) d\xi \geqslant$$
$$\geqslant \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^{(\mu)}_\xi \rho(\tau_i, x_{\tau_i}(0)_{\Delta j}, l_{[\tau_i]}) d\xi = (\tau_{i+1} - \tau_i) \rho(\tau_i, x_{\tau_i}(0)_{\Delta j}, l_{[\tau_i]}). \tag{1.23}$$

Кроме того, аналогично предыдущему получаем:

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \rho(\xi, y^{(k)}_\xi(0)_{\Delta j}, l_{[\tau_i]}) d\xi = (\tau_{i+1} - \tau_i) \rho(\tau_i, y^{(k)}_{\tau_i}(0)_{\Delta j}, l_{[\tau_i]}) +$$
$$+ \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \varphi_3(\xi) d\xi + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \varphi_4(\xi) d\xi. \tag{1.24}$$

Из (1.5) для достаточно больших k имеем оценку для $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ $(l^{(k)}_{[\tau_i]}, f_{l[\tau_i]}[t]) - \rho(t, y^{(k)}_t(0)_{\Delta j}, l[\tau_i]) \leqslant 0$ и, следовательно,

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{(l^{(k)}_{[\tau_i]}, f_{l_{[\tau_i]}}[\xi]) - \rho(\xi, y^{(k)}_\xi(0)_{\Delta j}, l_{[\tau_i]})\} d\xi \leqslant 0. \tag{1.25}$$

Так как $\rho(t, x, l)$ также удовлетворяет условию Липшица по x [12], то из соотношений (1.19)–(1.25) выводим для достаточно больших k

$$\Big\| y^{(k)}_{\tau_i}(0)_{\Delta j} - x_{\tau_i}(0)_{\Delta j} \Big\|^2 + 2(y^{(k)}_{\tau_i}(0)_{\Delta j} - x_{\tau_i}(0)_{\Delta j})(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_{l_{[\tau_i]}}[\xi] d\xi -$$
$$- \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi] d\xi) + \Big\| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_{l_{[\tau_i]}}[\xi] d\xi - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi] d\xi) \Big\|^2 \leqslant \Big\| s^{(k)}_{\tau_i} \Big\|_1^2 +$$

$$+2\left\|s_{\tau_i}^{(k)}\right\|_1\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(l_{[\tau_i]},f_{l_{[\tau_i]}}[\xi])d\xi-2(\tau_{i+1}-\tau_i)\left\|s_{\tau_i}^{(k)}\right\|_1\rho(\tau_i,x_{\tau_i}(0)_{\Delta j},l[\tau_i])+$$

$$+(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}f_{l_{[\tau_i]}}[\xi]d\xi-\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}f[\xi]d\xi)^2+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\omega_1(\xi-\tau_i)d\xi+$$

$$+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\omega_2(\xi-\tau_i)d\xi=\left\|s_{\tau_i}^{(k)}\right\|_1^2+2\left\|s_{\tau_i}^{(k)}\right\|_1\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\rho(\xi,y_\xi^{(k)}(0)_{\Delta j},l_{[\tau_i]}[\xi])d\xi-$$

$$-2\alpha_i\left\|s_{\tau_i}^{(k)}\right\|_1\rho(\tau_i,x_{\tau_i}(0)_{\Delta j},l_{[\tau_i]})++2\left\|s_{\tau_i}^{(k)}\right\|_1\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\{(l_{[\tau_i]}^{(k)},f_{l_{[\tau_i]}}^{(k)})-\rho(\xi,y_\xi^{(k)}(0)_{\Delta j},l_{[\tau_i]})\}d\xi+$$

$$+\textstyle\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\omega_1(\xi-\tau_i)d\xi+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\omega_2(\xi-\tau_i)d\xi+(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}f[\xi]d\xi-\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}f_{l_{[\tau_i]}}[\xi]d\xi)^2\leqslant$$

$$\leqslant\left\|s_{\tau_i}^{(k)}\right\|_1^2+2\left\|s_{\tau_i}^{(k)}\right\|_1\alpha_i\rho(\tau_i,y_{\tau_i}(0)_{\Delta j},l_{[\tau_i]})-$$

$$-2\alpha_i\left\|s_{\tau_i}^{(k)}\right\|_1\rho(\tau_i,x_{\tau_i}(0)_{\Delta j},l_{[\tau_i]})+$$

$$+2\left\|s_{\tau_i}^{(k)}\right\|_1\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\{(l_{[\tau_i]}^{(k)},f_{l_{[\tau_i]}}[\xi]-\rho(\xi,y_\xi^{(k)}(0)_{\Delta j}l_{[\tau_i]})\}d\xi+(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}f[\xi]d\xi-$$

$$-\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}f_{l_{[\tau_i]}}[\xi]d\xi)^2+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(\omega_1(\xi-\tau_i)+\omega_2(\xi-\tau_i)+\omega_3(\xi-\tau_i)+$$

$$+\omega_4(\xi-\tau_i))d\xi\leqslant\left\|s_{\tau_i}^{(k)}\right\|_1^2+2L\delta_j\alpha_i\left\|s_{\tau_i}^{(k)}\right\|_1\left\|y_{\tau_i}^{(k)}(0)_{\Delta j}-x_{\tau_i}(0)_{\Delta j}\right\|_1+$$

$$+(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}f[\xi]d\xi-\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}f_{l_{[\tau_i]}}[\xi]d\xi)^2+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\omega(\xi-\tau_i)d\xi,\tag{1.26}$$

где $\omega(\xi-\tau_i)=\sum\limits_{m=1}^{4}\omega_m(\xi-\tau_i)$.

Из (1.17), (1.25), (1.26) получаем

$$\left\|y_{\tau_{i+1}}^{(k)}(0)_{\Delta j}-x_{\tau_{i+1}}(0)_{\Delta j}\right\|_1^2\leqslant\left\|y_{\tau_i}^{(k)}(0)_{\Delta j}-x_{\tau_i}(0)_{\Delta j}\right\|_1^2+$$

$$+2L\delta_j\|y_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta j}-x_{\tau_i}[0]_{\Delta j}\|_1^2+o(\delta_j),$$

здесь $o(\delta_j)$ равномерно по k и $\tau_i\in[t_0,\theta]$ имеет более высокий порядок малости, чем δ_j, тогда получаем оценку

$$\left\|y_{\tau_i}^{(k)}(0)_{\Delta j}-x_{\tau_i}(0)_{\Delta j}\right\|_1^2\leqslant(1+2L\delta_j)\left\|y_{\tau}^{(k)}(0)_{\Delta j}-x_{\tau}(0)_{\Delta j}\right\|_1^2+o(\delta_j).\tag{1.27}$$

Теперь из (1.18)–(1.27) по плану доказательства [8–9] аналогично [14–15] имеем оценку второго слагаемого в правой части (1.18). Для любого $s\in[-\tau,0]$.

$$\left\|y_{\tau_i}^{(k)}(0)_{\Delta j}-x_{\tau_i}(0)_{\Delta j}+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s}f_{l_{[\tau_i]}}[\xi]d\xi-\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s}f[\xi]d\xi\right\|_1^2\leqslant$$

$$\leqslant\left\|y_{\tau_i}^{(k)}(0)_{\Delta j}-x_{\tau_i}^{(k)}(0)_{\Delta j}\right\|+2\delta_jL\left\|y_{\tau_i}^{(k)}[s]-x_{\tau_i}[s]_{\Delta}\right\|_1^2o(\delta_j).\tag{1.28}$$

Интегрируем неравенство (1.28) по Лебегу

$$\int_{-\tau}^{0}\left\|y_{\tau_i}^{(k)}(0)_{\Delta j}-x_{\tau_i}(0)_{\Delta j}+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s}f[\xi]d\xi-\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s}f[\xi]d\xi\right\|_1^2 ds\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-\tau}^{0}\left\|y_{\tau_i}^{(k)}(0)_{\Delta j}-x_{\tau_i}^{(k)}(0)_{\Delta j}\right\|_1 ds+2\delta_i L\int_{-\tau}^{0}\left\|y_{\tau_i}^{(k)}[s]-x_{\tau_i}[s]_{\Delta}\right\|_1^2 ds+o(\delta_j)\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-\tau}^{0}\left\|y_{\tau_i}^{(k)}[s]-x_{\tau_i}^{(k)}[s]_{\Delta}\right\|_1 ds+2\delta_i L\int_{-\tau}^{0}\left\|y_{\tau_i}^{(k)}[s]-x_{\tau_i}[s]_{\Delta}\right\|_1^2 ds+o(\delta_j),\qquad(1.29)$$

так как $\left\|y_{\tau_i}^{(k)}(0)_{\Delta j}-x_{\tau_i}^{(k)}(0)_{\Delta j}\right\|_1$ сколь угодно мала.

Из (1.17), (1.25)–(1.29) и условий леммы получаем:

$$\varepsilon_{\Delta}^2[\tau_{i+1}]\leqslant\left\|y_{\tau_{i+1}}^{(k)}(0)_{\Delta j}-x_{\tau_{i+1}}(0)_{\Delta j}\right\|_1^2+\int_{-\tau}^{0}\left\|y_{\tau_i}^{(k)}[s]_{\Delta}-x_{\tau_i}[s]_{\Delta}\right\|_1^2 ds+$$

$$+2\delta_j L\Big(\left\|y_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta}-x_{\tau_i}[0]_{\Delta}\right\|_1^2+\int_{-\tau}^{0}\left\|y_{\tau_i}^{(k)}[s]_{\Delta}-x_{\tau_i}^{(k)}[s]_{\Delta}\right\|_1^2 ds\Big)+o(\delta_j).$$

Отсюда

$$\varepsilon_{\Delta}^2[\tau_{i+1}]\leqslant(1+2\delta_j L)\varepsilon_{\Delta}^2[\tau_i]+o(\delta_j),$$

где $\delta_j^{-1}o(\delta_i)\to 0$ при $j\to\infty$ равномерно по $\tau_i\in[t_0,\theta]$.

Далее, аналогично работе [6; 7] получаем, что какое бы ни было положительное число β, все функции $x[t]_{\Delta_j}$ в разбиении Γ_j с достаточно большим номером j при всех $t\in[t_0,\theta]$ удовлетворяют неравенству

$$\varepsilon_{\Delta}^2[t]\leqslant\beta\exp[3L(t-t_0)],$$

что и доказывает лемму, а вместе с тем и теорему.

Литература

[1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

[2] Красовский Н.Н. К задаче унификации дифференциальных игр // ДАН СССР. 1976. Т. 226. № 6. С. 1260–1263.

[3] Красовский Н.Н., Субботин А.И., Ушаков В.Н. Минимаксная дифференциальная игра // ДАН СССР. 1972. Т. 206. № 2. С. 277–280.

[4] Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.

[5] Осипов Ю.С. Об одной дифференциальной игре сближения // Дифференциальные игры и задачи управления. Свердловск: АН СССР УНЦ, 1975. С. 157–166.

[6] Осипов Ю.С. Альтернатива в дифференциально-разностной игре // ДАН СССР. 1971. Т. 197. № 5. С. 1022–1026.

[7] Осипов Ю.С. Дифференциальная игра наведения для систем с последействием // ПММ. 1971. Т. 35. № 1. С. 123–131.

[8] Осипов Ю.С. К теории дифференциальных игр систем с последействием // ПММ. 1971. Т. 35. № 2. С. 300–314.

[9] Осипов Ю.С., Алесенко Л.П. О регуляризации управления в дифференциально-разностной игре сближения-уклонения // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12. № 6. С. 1000–1006.
[10] Ушаков В.Н. Минимаксное поглощение в дифференциальных играх // Экстремальные стратегии в позиционных дифференциальных играх. Свердловск: АН СССР УНЦ, 1977. С. 253–272.
[11] Ушаков В.Н. Минимаксная дифференциальная игра сближения-уклонения и локальные условия разрешимости задач сближения-уклонения // Дифференциальные системы управления. Свердловск: АН СССР УНЦ, 1979. С. 87–93.
[12] Максимов В.И. Альтернатива в дифференциально-разностной игре сближения уклонения с функциональной целью // ПММ. 1976. Т. 40. № 6. С. 987–994.
[13] Пасиков В.Л. Альтернатива в минимаксной дифференциальной игре для систем с последействием // Известия вузов. Сер.: Математика. 1983. № 8. С. 45–50.
[14] Пасиков В.Л. Минимаксная дифференциальная игра сближения-уклонения для систем с последействием // Деп. в ВИНИТИ. 1982. № 3582-83. С. 40.

Поступила в редакцию 23/*III*/2013;
в окончательном варианте — 23/*III*/2013.

DIFFERENCE-DIFFERENCIAL GAME OF APPROACH AND EVASION IN HILBERT SPACE, I

 V.L. Pasikov[2]

In this paper the dynamic guidance-to-the-functional set game for conflict controlled differential system with time delay is studied. Fulfillment of conditions of saddle point relative to the right side of the system is not supposed to be. The proof is based on Hilbert space norm.

Key words: differential game, aftereffect, norm, positional procedure, Hilbert space.

Paper received 23/*III*/2013.
Paper accepted 23/*III*/2013.

[2]Pasikov Vladimir Leonidovich (`pasikov_fmf@mail.ru`), the Dept. of Mathematical Analysis and Information Service, Orsk Humanitarian and Technological Institute (Branch of Orenburg State University), Orsk, 462403, Russian Federation.