

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ОБРАТНОГО ПЬЕЗОЭФФЕКТА ДЛЯ КРУГЛОЙ БИМОРФНОЙ ПЛАСТИНЫ СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ И ЖЕСТКОСТИ

© 2013 Д.А. Шляхин¹

Рассматривается нестационарная осесимметричная задача для тонкой круглой биморфной пластины при действии на торцевых поверхностях электрического потенциала, являющегося произвольной функцией времени. На основании теории Тимошенко методом конечных интегральных преобразований построено новое замкнутое решение для рассматриваемой электроупругой системы ступенчато-переменной жесткости и толщины. Полученные расчетные соотношения позволяют исследовать частотные характеристики и напряженно-деформированное состояние биморфных элементов.

Ключевые слова: задача обратного пьезоэффекта, тонкая биморфная пластина, осесимметричная динамическая нагрузка.

Введение

В различных акустических устройствах в качестве преобразователя энергии используются тонкие биморфные пластины. Наиболее эффективной конструкцией, обладающей высокой механической прочностью и чувствительностью, является круглая металлическая подложка с наклеенными с двух сторон пьезокерамическими пластинами меньшего диаметра. Изгибные колебания такой системы осуществляются за счет подведения к электродированным торцевым поверхностям пьезоэлементов электрического потенциала. Расчет рассматриваемых тел вращения, как правило, выполняется путем аппроксимации их набором кольцевой и сплошной пластин постоянной толщины. При этом для исследования напряженно-деформированного состояния каждого элемента используется техническая теория тонких пластин [1–3], которую можно применять только при низкочастотном внешнем воздействии. Вместе с тем в современных ультразвуковых резонансных преобразователях рабочая частота достигает 100 кГц.

В настоящей работе исследование тонкой биморфной пьезокерамической пластины проводится на основании гиперболической системы уравнений Тимошенко, которая существенно расширяет возможности исследования высокочастотных динамических волновых процессов [4]. Кроме того, ступенчато-переменная толщина

¹Шляхин Дмитрий Аверкиевич (d-612-mit2009@yandex.ru), кафедра сопротивления материалов и строительной механики Самарского государственного архитектурно-строительного университета, 443001, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

и жесткость, а также нестационарная электрическая нагрузка описываются с помощью обобщенных функций [5], что позволяет учесть влияние зоны нерегулярности структуры материала на напряженно-деформированное состояние рассматриваемой электроупругой системы.

1. Постановка задачи

Пусть биморфная круглая пластина состоит из металлической подложки, занимающей в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z) область $\Omega: \{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -h_1^*/2 \leq z \leq h_1^*/2\}$, и двух наклеенных на нее пьезокерамических элементов $\{0 \leq r_* \leq a, a < b\}$, имеющих толщину h_2^* (рис. 1). Изгибные осесимметричные колебания возбуждаются за счет подведения к электродам, которые располагаются на торцевых поверхностях пьезопластин, электрического напряжения $V^*(t_*)$, являющегося произвольной функцией времени t_* . Условия закрепления цилиндрической поверхности пластины могут быть произвольными. Для определенности считаем ее жесткозакрепленной.

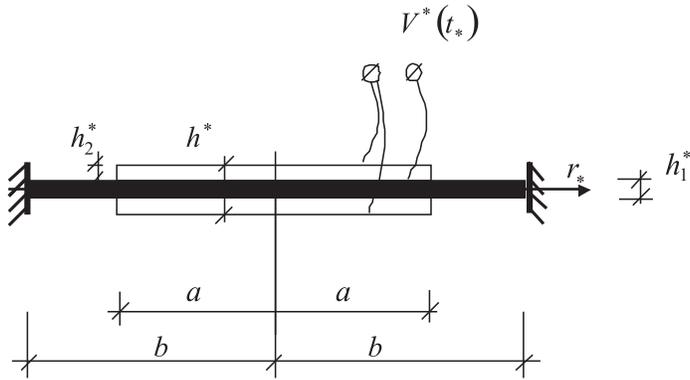


Рис. 1. Вид биморфной круглой пластины

Уравнения поступательного и вращательного движения для тонких пластин относительно поперечного Q_r усилия и изгибающих моментов M_r, M_θ имеют вид [4]:

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r_*} + \frac{Q_r}{r_*} - \rho(r_*)h^*(r_*) \frac{\partial^2 W^*}{\partial t_*^2} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial r_*} - Q_r + \frac{M_r - M_\theta}{r_*} + \rho(r_*) \frac{h^*(r_*)^3}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_*^2} = 0,$$

где $W^*(r_*, t_*)$, $\psi(r_*, t_*)$ — прогиб и угол поворота сечения в плоскости (r_*, z) , $\rho(r_*)$, $h^*(r_*)$ — плотность и толщина биморфной пластины.

С учетом кинематических гипотез для тонких пластин [4], а также линейного характера изменения электрического потенциала по высоте сечения и, следовательно, постоянного значения нормальной компоненты вектора напряженности

$$E_z(r_*, z, t_*) = \frac{V^*(t_*)}{h_2^*} \left[H\left(z - \frac{h_1^*}{2}\right) - H\left(-z - \frac{h_1^*}{2}\right) \right] H(a - r_*),$$

изгибающие моменты и поперечная сила определяются с помощью следующих равенств [6]:

$$\begin{aligned}
M_r(r_*, t_*) &= -C_{11}^{(1)} \frac{(h_1^*)^3}{12} \left[1 + H(a - r_*) \frac{C_{11}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{h^3}{h_1^3} - 1 \right) \right] \frac{\partial \psi}{\partial r_*} - \\
&- C_{12}^{(1)} \frac{(h_1^*)^3}{12} \left[1 + H(a - r_*) \frac{C_{12}^{(2)}}{C_{12}^{(1)}} \left(\frac{h^3}{h_1^3} - 1 \right) \right] \frac{\psi}{r_*} + e_{31} H(a - r_*) (h_1^* + h_2^*) V^*(t), \\
M_\theta(r_*, t_*) &= -C_{12}^{(1)} \frac{(h_1^*)^3}{12} \left[1 + H(a - r_*) \frac{C_{12}^{(2)}}{C_{12}^{(1)}} \left(\frac{h^3}{h_1^3} - 1 \right) \right] \frac{\partial \psi}{\partial r_*} - \\
&- C_{11}^{(1)} \frac{(h_1^*)^3}{12} \left[1 + H(a - r_*) \frac{C_{11}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \left(\frac{h^3}{h_1^3} - 1 \right) \right] \frac{\psi}{r_*} + e_{31} H(a - r_*) (h_1^* + h_2^*) V^*(t), \\
Q_r(r_*, t_*) &= k(r) C_{55}^{(1)} \left[h_1^* + 2h_2^* H(a - r_*) \frac{C_{55}^{(2)}}{C_{55}^{(1)}} \right] \left(\frac{\partial W^*}{\partial r_*} - \psi \right).
\end{aligned} \tag{2}$$

В соотношениях (2) приняты следующие обозначения: $\rho_1, \rho_2, C_{ms}^{(1)}, C_{ms}^{(2)}$ — объемная плотность, модули упругости соответственно металлической подложки и пьезокерамических пластин ($m, s = \overline{1, 5}$); e_{31} — пьезомодуль анизотропного электроупругого материала; $k(r)$ — коэффициент поперечного сдвига; $H(\dots)$ — единичная функция Хэвисайда; $\{r, p, h_1, h_2\} = \{r_*, a, h_1^*, h_2^*\}/b$.

Система дифференциальных уравнений осесимметричного движения (1), с учетом (2), начальные и граничные краевые условия рассматриваемой краевой задачи в безразмерной форме имеют вид:

$$\nabla_1^2 W - \nabla \psi - a_1(r) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -\delta(p - r) A_1(t), \tag{3}$$

$$\nabla_2^2 \psi + a_2(r) \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \psi \right) - a_3(r) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\delta(p - r) A_2(t),$$

$$r = 1: \quad W(1, t) = 0, \quad \psi(1, t) = 0, \tag{4}$$

$$r = 0: \quad W(0, t) < \infty, \quad \psi(0, t) < \infty,$$

$$t = 0 \quad W(r, 0) = W_0, \quad \psi(r, 0) = \psi_0, \quad \dot{W}(r, 0) = \dot{W}_0, \quad \dot{\psi}(r, 0) = \dot{\psi}_0, \tag{5}$$

$$\text{где } W(r, t) = \frac{W^*(r, t)}{b}, \quad a_1(r) = \frac{C_{11}^{(1)}}{k(r) C_{55}^{(1)}} a_4(r)^{-1} \left[1 + 2 \frac{h_2}{h_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} H(p - r) \right],$$

$$a_2(r) = \frac{12k(r) C_{55}^{(1)}}{C_{11}^{(1)} h_1^2} a_5(r)^{-1} a_4(r), \quad a_3(r) = a_5(r)^{-1} \left[1 + \left(\frac{h^3}{h_1^3} - 1 \right) \frac{\rho_2}{\rho_1} H(p - r) \right],$$

$$a_4(r) = 1 + 2 \frac{h_2}{h_1} \frac{C_{55}^{(2)}}{C_{55}^{(1)}} H(p - r), \quad a_5(r) = 1 + \left(\frac{h^3}{h_1^3} - 1 \right) \frac{C_{11}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} H(p - r),$$

$$A_1(t) = \frac{2h_2 C_{55}^{(2)}}{C_{55}^{(1)} h_1 + 2h_2 C_{55}^{(2)}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \psi \right) \Big|_{r=p}, \quad A_2(t) = a_5^{-1} [A_3(t) - N(t)],$$

$$A_3(t) = \left(\frac{h^3}{h_1^3} - 1 \right) \left(\frac{C_{11}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{C_{12}^{(2)}}{C_{11}^{(1)}} \frac{\psi}{r} \right) \Big|_{r=p}, \quad N(t) = \frac{12(h_1 + h_2) e_{31} V^*(t)}{b h_1^3 C_{11}^{(1)}},$$

$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, $\nabla_2^2 = \nabla_1^2 - \frac{1}{r^2}$, $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}$, $t = t_* b \sqrt{\frac{\rho_1}{C_{11}^{(1)}}}$, $W_0, \psi_0, \dot{W}_0, \dot{\psi}_0$ — известные в начальный момент времени перемещение, угол поворота и их скорости; $\delta(\dots)$ — единичная функция Дирака.

В равенстве (5) точка означает дифференцирование по времени.

Система дифференциальных уравнений (3) включает в себя ступенчато-переменные коэффициенты $a_1(r) \div a_5(r)$, поэтому $W(r, t)$, $\psi(r, t)$ являются непрерывными кусочно-гладкими функциями. При этом точки окружности радиусом p являются особыми, в которой наблюдается резкое изменение, в виде скачка, градиента изгибающих моментов и поперечной силы (нормальных и касательных напряжений). Данная особенность учитывается с помощью функций $A_1(t)$, $A_3(t)$. Кроме того, выражение $N(t)$ представляет собой безразмерный погонный изгибающий момент в точках радиусом p , который создается за счет радиальных колебаний пьезокерамических пластин.

Математическая формулировка рассматриваемой начально-краевой задачи (3)–(5) и, следовательно, общее решение повторяют аналогичные соотношения, приведенные в [9].

2. Численные результаты

В качестве примера рассматривается биморфная пластина имеющая следующие физические характеристики металлической стальной подложки и аксиально поляризованных пьезокерамических пластин состава РХЕ-5: $\rho_1 = 7800$ кг/м³, $\rho_2 = 7600$ кг/м³, $\{C_{11}^{(1)}, C_{12}^{(1)}, C_{55}^{(1)}\} = \{22, 35, 6, 26, 8, 05\} \cdot 10^{10}$ Н/м², $\{C_{11}^{(2)}, C_{12}^{(2)}, C_{55}^{(2)}\} = \{10, 33, 5, 8, 2, 5\} \cdot 10^{10}$ Н/м².

На рис. 2, 3 приведены графики изменения собственных значений λ_i от параметра p первых двух ($i = 1, 2$) резонансных частот, которые получены с помощью трансцендентного уравнения (19) теории Тимошенко (сплошные линии) и на основании аналогичных соотношений технической теории, основанной на гипотезах Кирхгоффа — Лява (пунктирные линии). Цифрами обозначены результаты для пластин, имеющие следующие толщины: 1 — $h_1 = h_2 = 0,02$; 2 — $h_1 = h_2 = 0,07$.

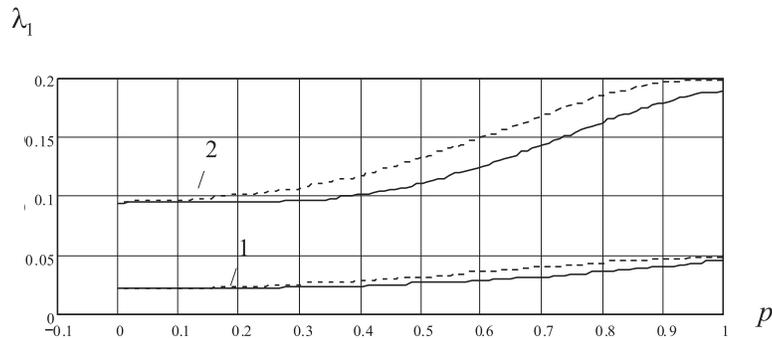


Рис. 2. Зависимость λ_1 от параметра p

Замечаем, что для достаточно тонких (кривые 1) сплошных ($p = 0,1$) пластин численные значения первых двух частот, вычисленные по обеим теориям,

практически одинаковы (наибольшее расхождение составляет 2 %). Однако, когда радиусы основной и вспомогательных пластин не совпадают, разница в численных значениях λ_i для первой и второй мод колебаний достигает 15 %. При исследовании более толстых пластин (кривые 2) данная разница становится более заметной, и в дальнейшем она возрастает с номером частоты и толщин h_1, h_2 .

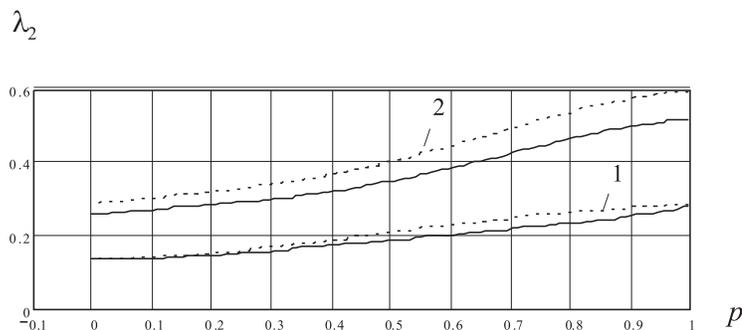


Рис. 3. Зависимость λ_2 от параметра p

Исследование напряженно-деформированного состояния круглой пластины, имеющей следующие размеры $b = 31$ мм, $a = 21$ мм ($p = 0,68$), $h_1^* = 1$ мм, $h_2^* = 0,35$ мм, проведем для случая действия электрической нагрузки в виде разности потенциалов:

$$V(t) = V_0 \sin \theta t,$$

где θ , V_0 — частота и амплитудное значение.

На рис. 4 показаны графики изменения вертикальных перемещений центра пластины $W(0, t)$ во времени t при различных частотных характеристиках внешнего воздействия. Цифрами 1, 2 обозначены результаты, когда θ соответственно равна $0,2\lambda_1$, $0,8\lambda_1$. Отмечаем, что увеличение частоты внешнего воздействия в рассматриваемом диапазоне приводит к росту перемещений, т. е. более полному проявлению инерционных свойств рассматриваемой системы.

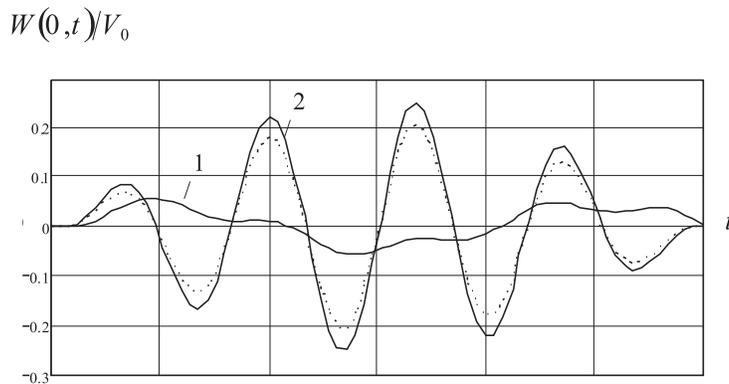


Рис. 4. Графики изменения перемещений $W(0, t)$ во времени для различных частотных характеристик внешнего воздействия

Кроме того, по-видимому, впервые в настоящей работе при решении динамических задач* с помощью функций $A_1(t)$, $A_3(t)$ учитывается особенность резкого изменения градиента изгибающего момента и поперечной силы (касательных и нормальных механических напряжений) в точках окружности радиусом p . Пунктирной линией показан результат без учета функций $A_1(t)$, $A_3(t)$, когда $\theta = 0,8\lambda_1$. Причем при низкочастотном внешнем воздействии данная особенность не оказывает влияния на перемещение пластины. Однако при $\theta = 0,8\lambda_1$ картина меняется существенно, и учет функций $A_1(t)$, $A_3(t)$ приводит к увеличению перемещений на 12 %.

На рис. 5 приведены графики, характеризующие изменение $W(0, t)$ во времени t при различных размерах пьезокерамических пластин при $\theta = 3\lambda_1$. Сплошной линией обозначены результаты, когда $p = 0,85$, пунктирной — $p = 0,7$. Расчеты подтверждают данные, приведенные в [9], а именно, когда основной вклад в напряженно-деформированное состояние вносит вторая частота собственных колебаний, наиболее эффективный размер пьезопластины $p = 0,85$.

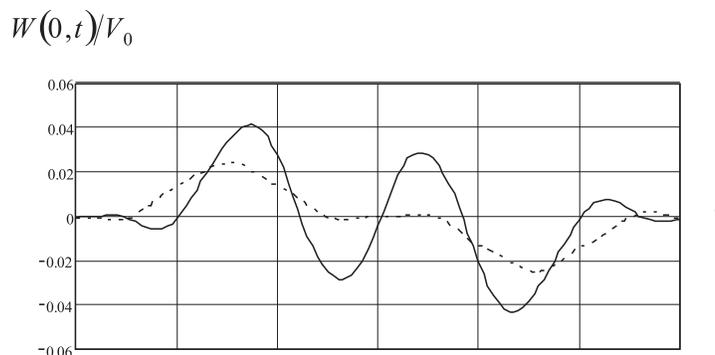


Рис. 5. Графики изменения перемещений $W(0, t)$ во времени для различных значений параметра p

Выводы

На основании проведенных в работе исследований можно сформулировать следующие выводы:

- новое представление исходных дифференциальных уравнений движения позволяет учесть особенности изменения градиента изгибающего момента и поперечной силы в зоне нерегулярности структуры пластины. Учет данного эффекта приводит к существенному увеличению деформаций при исследовании задачи обратного пьезоэффекта;

- численные результаты расчета, полученные при использовании уточненной теории Тимошенко и классической технической теории, показывают, что при расчете пластин ступенчато-переменной толщины и жесткости кинематическими гипотезами Кирхгоффа — Лява пользоваться нельзя.

*При исследовании задачи на собственные значения для тонких пластин ступенчато-переменной толщины данная особенность учитывалась в работе [8].

Литература

- [1] Чувствительность биморфного преобразователя типа металл-пьезокерамика / Ю.Б. Евсейчик [и др.] // Прикл. механика. 1990. Т. 26. № 12. С. 67–75.
- [2] Евсейчик Ю.Б., Медведев К.В. Чувствительность гидроакустического датчика давления // Гидравлика и гидротехника: науч.-техн. сб. Киев: НТУ, 2008. Вып. 62. С. 10–16.
- [3] Рудницкий С.Н., Шарапов В.М., Шульга Н.А. Колебания дискового биморфного преобразователя типа металл-пьезокерамика // Прикл. мех. 1990. Т. 26. № 10. С. 64–72.
- [4] Уфлянд Я.С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // Прикл. мат. и мех. 1948. Т. XII. С. 287–300.
- [5] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.
- [6] Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электроупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 470 с.
- [7] Сеницкий Ю.Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики // Изв. вузов. Сер.: Математика. 1991. № 4. С. 57–63.
- [8] Исследование зависимости геометрических размеров на характеристики излучателя в виде пластины / В.Н. Хмелев [и др.] // Измерение, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях: материалы 7 Всероссийской конференции ИАМП-2010. Бийск, 2010. С. 2000–2006.
- [9] Шляхин Д.А. Вынужденные осесимметричные колебания тонкой круглой биморфной пластины ступенчато-переменной толщины и жесткости // Инж. вестник Дона. 2013. № 1. URL: <http://ivdon.ru>.

Поступила в редакцию 29/V/2013;
в окончательном варианте — 29/V/2013.

**NON-STATIONARY AXISYMMETRIC PROBLEM
OF INVERSE PIEZOEFFECT FOR CIRCULAR
BIMORPHOUS PLATE OF STEPPED VARIABLE
THICKNESS AND RIGIDITY**

© 2013 D.A. Shlyakhin²

Non-stationary axisymmetric problem for a thin circular bimorphous plate under the action on the end surfaces of electric potential, which is an arbitrary function of time is viewed. On the basis of the theory of Tymoshenko by method of finite integral transformation a new closed solution for the viewed electricity and elastic system of stepped variable rigidity and thickness is built. The obtained calculated correlations allow to explore the frequency characteristics and stress-deformed state of bimorphous elements.

Key words: problem of inverse piezoeffect, thin bimorphous plate, axisymmetric dynamic loading.

Paper received 29/V/2013.
Paper accepted 29/V/2013.

²Shlyakhin Dmitriy Averkievich (d-612-mit2009@yandex.ru), the Dept. of Strength of Materials and Structural Mechanics, Samara State University of Architecture and Civil Engineering, Samara, 443001, Russian Federation.