

УДК 621.373.12

## ДИНАМИКА АВТОКОЛЕБАНИЙ В ДВУХКАСКАДНОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ ВАН ДЕР ПОЛЯ

© 2013 В.В. Зайцев, С.В. Линдт, И.В. Стулов<sup>1</sup>

Представлены результаты численного моделирования автоколебаний в двухкаскадном кольцевом генераторе с активными ячейкам Ван дер Поля. Показано, что при больших превышениях порога генерации в системе с идентичными ячейками наблюдается неоднородное пространственное распределение амплитуд автоколебаний.

**Ключевые слова:** нелинейная динамика, кольцевой генератор, осциллятор Ван дер Поля, амплитуда автоколебаний.

Модели в форме взаимосвязанных осцилляторов (активных и консервативных) находят достаточно широкое применение. При этом они используются как для исследования реально существующих объектов [1], так и для обнаружения и изучения новых физических эффектов [2; 3].

Одним из способов взаимосвязи осцилляторов является их кольцевое соединение. При этом в кольцевом генераторе (КГ) цепь положительной обратной связи, обеспечивающей генерацию, существует лишь при замыкании кольца активных ячеек, каждая из которых обратной связи не содержит и не является самогенерирующей. Ранее было показано [4], что КГ позволяет получить сигнал с повышенной долговременной стабильностью частоты по сравнению с автогенератором, реализованным на отдельно взятой ячейке. В настоящем сообщении рассмотрен вариант КГ – кольцо из двух резонансных ячеек (каскадов) с кубически нелинейными активными трехполосниками. Этот вариант КГ назван двухкаскадным осциллятором Ван дер Поля (ДО ВдП). Описан эффект конкуренции колебаний, возникающий в ДО ВдП в существенно нелинейном режиме генерации.

Структурные схемы генератора с одной активной ячейкой (классического осциллятора Ван дер Поля) и ДО ВдП приведены на рис. 1.

Если принять в качестве математической модели осциллятора Ван дер Поля уравнение движения вида

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{1}{Q} \frac{dy_1}{dt} + y_1 = \frac{\gamma}{Q} (1 - y_1^2) \frac{dy_1}{dt}, \quad (1)$$

<sup>1</sup>Зайцев Валерий Васильевич (zaitsev@ssu.samara.ru), Линдт Светлана Владимировна (comphysics@samsu.ru), Стулов Игорь Валерьевич (comphysics@samsu.ru), кафедра радиофизики и компьютерного моделирования радиосистем Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

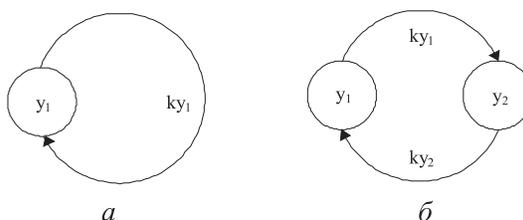


Рис. 1. Структурные схемы осцилляторов Ван дер Поля: классического (а) и двух-каскадного (б)

то моделью ДО ВдП будет система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{1}{Q} \frac{dy_1}{dt} + y_1 &= \frac{\gamma}{Q} (1 - y_2^2) \frac{dy_2}{dt}, \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} + \frac{1}{Q} \frac{dy_2}{dt} + y_2 &= \frac{\gamma}{Q} (1 - y_1^2) \frac{dy_1}{dt}. \end{aligned} \quad (2)$$

В уравнениях (1) и (2) осциллирующие переменные нормированы на характерный масштаб нелинейности, а нормировка времени такова, что собственные частоты резонаторов в ячейках ДО ВдП принимают единичные значения;  $Q$  – добротности резонаторов,  $\gamma$  – параметр превышения порога генерации.

Хорошо известно [5], что траектория движения осциллятора (1) при выполнении условия самовозбуждения выходит на единственный предельный цикл. Что касается ДО ВдП (2), то результаты численного моделирования указывают на существенные отличия его динамики от динамики классического осциллятора Ван дер Поля.

Проиллюстрируем процессы установления автоколебаний в ДО ВдП. На рис. 2 и 3 представлены временные зависимости  $A_1(t)$  и  $A_2(t)$  огибающих автоколебаний основной частоты в первом и втором каскадах генератора. В расчетах принято значение добротности  $Q = 10$ , а начальное возмущение  $y_1(0) = 0,1$  введено в первый каскад. График на рис. 2 отвечает значению параметра  $\gamma = 1,75$ . При этом зависимости  $A_1(t)$  и  $A_2(t)$  в целом соответствуют аналогичной зависимости в осцилляторе Ван дер Поля с эквивалентным начальным возмущением  $y(0) = 0,05$  (показана на рисунках пунктирной линией).

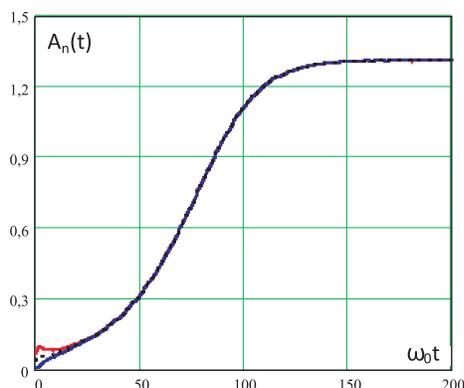


Рис. 2. Процесс установления огибающей автоколебаний в ДО ВдП при  $\gamma = 1,75$

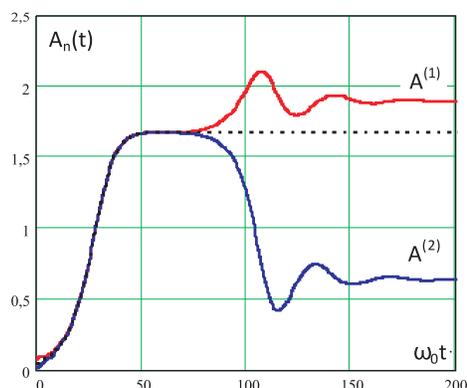


Рис. 3. Процесс установления огибающей автоколебаний в ДО ВдП при  $\gamma = 3,3$

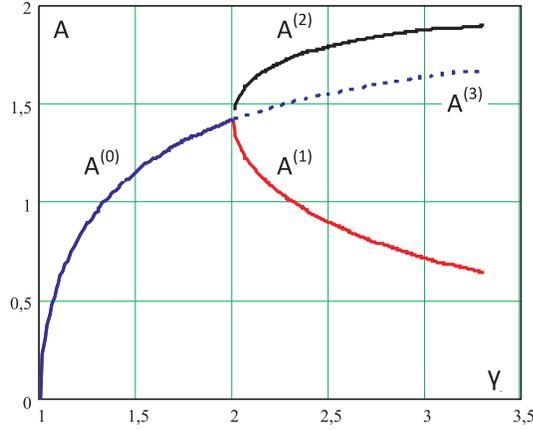


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма ДО ВдП

График на рис. 3, рассчитанный для  $\gamma = 3,3$ , демонстрирует реализацию режима автоколебаний с различными значениями  $A^{(1)}$  и  $A^{(2)}$  амплитуд в ячейках ДО ВдП. Этот режим с неоднородным распределением амплитуд – следствие конкуренции колебаний в кольце осцилляторов.

Результаты численного интегрирования уравнений движения (2) указывают на синфазность колебаний в ячейках ДО ВдП. Это позволяет, воспользовавшись приближением медленно меняющихся амплитуд, записать приближенное решение уравнений в виде квазигармонических функций

$$y_n(t) = A_n(t)\cos(t)$$

с амплитудами  $A_n(t)$ , удовлетворяющими системе укороченных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= -\frac{1}{2Q}A_1 + \frac{\gamma}{2Q}\left(1 - \frac{1}{4}A_2^2\right)A_2, \\ \frac{dA_2}{dt} &= -\frac{1}{2Q}A_2 + \frac{\gamma}{2Q}\left(1 - \frac{1}{4}A_1^2\right)A_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Численное интегрирование уравнений (3) дает результаты, совпадающие с графической точностью с результатами, представленными на рис. 2 и 3. Для режима установившихся автоколебаний путем численного решения системы нелинейных алгебраических уравнений

$$A_1 + \gamma\left(1 - \frac{1}{4}A_2^2\right)A_2 = 0, \quad A_2 + \gamma\left(1 - \frac{1}{4}A_1^2\right)A_1 = 0 \quad (4)$$

удаётся рассчитать показанную на рис. 4 бифуркационную диаграмму.

Ветвь диаграммы  $A^{(0)}$  соответствует режиму с однородным распределением амплитуд по ячейкам, а ветви  $A^{(1)}$  и  $A^{(2)}$  – режиму с неоднородным распределением. При этом из уравнений (4) следует, что неоднородный режим характеризуется постоянством суммарной мощности автоколебаний в ячейках ДО ВдП:

$$\frac{1}{2}\left(A^{(1)}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(A^{(2)}\right)^2 = 2. \quad (5)$$

Ветвь бифуркационной диаграммы  $A^{(3)}$  – это неустойчивый однородный режим автоколебаний. Такой вывод позволяет сделать линеаризованная в окрестностях ветвей  $A^{(i)}$  система укороченных уравнений (3). Распределение корней  $\lambda^{(i)}$  характеристического уравнения линеаризованной системы в зависимости от параметра

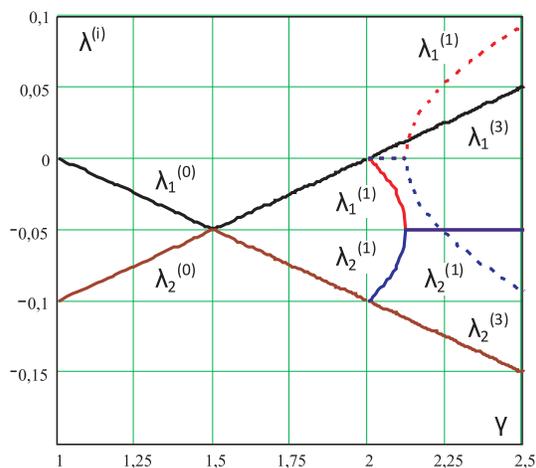
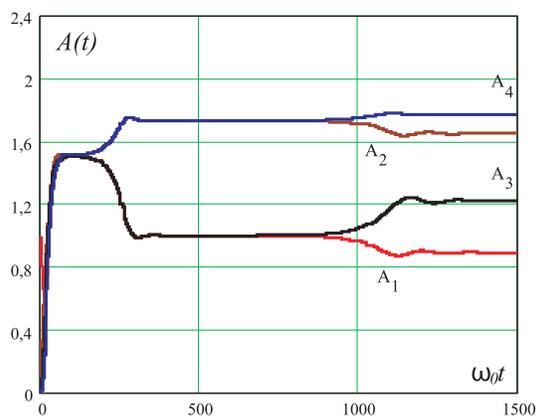


Рис. 5. Распределение корней характеристического уравнения

Рис. 6. Установление амплитуд автоколебаний в четырехкаскадном осцилляторе ВдП при  $\gamma = 2, 3$ 

$\gamma$  для ДО ВдП приведено на рис. 5. Сплошными линиями показаны действительные части корней, пунктирными – мнимые части.

Из картины корней  $\lambda^{(i)}$  следует, что ветвь  $A^{(0)}$  – это совокупность особых точек типа устойчивый узел, ветви  $A^{(1)}$  и  $A^{(2)}$  – устойчивые узлы, переходящие в устойчивые фокусы, а на ветви  $A^{(3)}$  расположены седловые точки.

Таким образом, результаты численного моделирования указывают на возможность реализации в кольцевых генераторах с дискретными активными ячейками режимов генерации с неоднородным распределением амплитуд автоколебаний по ячейкам кольца. Этот нелинейный эффект можно рассматривать как следствие конкуренции колебаний, приводящей к разделению амплитуд по дискретным уровням. Процесс разделения весьма инерционен, а итоговое пространственное распределение амплитуд существенным образом зависит от начальных возмущений в ячейках.

Увеличение числа каскадов в КГ приводит к соответствующему росту числа дискретных амплитудных (энергетических) уровней. Для примера на рис. 6 приведены графики процессов установления амплитуд автоколебаний в ячейках четырехкаскадного осциллятора ВдП с параметром превышения порога генерации  $\gamma = 2, 3$  и начальным возмущением амплитуды  $A_1(0) = 0,9$ . Как видно из рисунка, в осцилляторе происходит распределение амплитуд по четырем уровням. При этом сохраняется энергетическое соотношение вида (5):

$$\frac{1}{2}A_1^2 + \frac{1}{2}A_2^2 + \frac{1}{2}A_3^2 + \frac{1}{2}A_4^2 = 4.$$

Отметим также, что в многокаскадном осцилляторе ВдП дискретные энергетические уровни расположены близко друг к другу, следствием чего являются переходы между ними, приводящие к хаотизации автоколебаний.

## Литература

- [1] Уткин Г.М. Автоколебательные системы и волновые усилители. М.: Сов. радио, 1978. 272 с.
- [2] Спротт Дж.К. Элегантный хаос: алгебраически простые потоки. М.; Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2012. 328 с.
- [3] Корниенко В.Н., Привезенцев А.П. Возбуждение волн круглой мембраны ансамблем автогенераторов // Радиотехника и электроника. 2010. Т. 55. № 3. С. 362–368.
- [4] Зайцев В.В., Шепелевич Л.Г., Якимов А.В. К анализу флуктуаций в сложных автоколебательных системах при помощи ЭЦВМ // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25. № 5. С. 990–996.
- [5] Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2005. 292 с.

Поступила в редакцию 11/III/2013;  
в окончательном варианте — 11/III/2013.

## DYNAMICS OF SELF-OSCILLATIONS IN A TWO-STAGE VAN DER POL OSCILLATOR

© 2013 V.V. Zaitsev, S.V. Lindt, I.V. Stulov<sup>2</sup>

The results of numerical simulation of self-oscillations in a two-stage ring oscillator with active cells of Van der Pol are presented. It is shown that for large exceedances of generation threshold in a system with identical cells, non-uniform spatial distribution of amplitudes of self-oscillations is observed.

**Key words:** nonlinear dynamics, ring oscillator, Van der Pol oscillator, amplitude of self-oscillations.

Paper received 11/III/2013.

Paper accepted 11/III/2013.

---

<sup>2</sup>Zaitsev Valeriy Vasilievich ([zaitsev@ssu.samara.ru](mailto:zaitsev@ssu.samara.ru)), Lindt Svetlana Vladimirovna ([comphysics@samsu.ru](mailto:comphysics@samsu.ru)), Stulov Igor Valerievich ([comphysics@samsu.ru](mailto:comphysics@samsu.ru)), the Dept. of Radiophysics and Computer Modelling of Radiotechnical Systems, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.