КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОГО НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2013 А.В. Тарасенко[1]

Для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области изучены задачи с различными граничными условиями. Приведены критерий единственности и теорема существования решения задачи. Решение поставленных задач построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения.

Ключевые слова: нагруженное уравнение смешанного типа, спектральный метод, единственность, существование.

1. Постановка задач

Рассмотрим нагруженное уравнение смешанного типа

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + c_1(t)u(x,0) = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + c_2(t)u(x,0) = 0, & t < 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t) : 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$, где α, β – заданные положительные действительные числа, $c_1(t), c_2(t)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Задача 1. Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u\,(x,\,t) \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2\left(D_-\right) \cap C^{2,1}_{x,t}\left(D_+\right); \tag{1.2}$$

$$Lu\,(x,\,t) \equiv 0, \quad (x,\,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered} u\,(0,\,t) = \varphi_1(t), \quad u\,(1,\,t) = \varphi_2(t), \\ \varphi_1(0) = \varphi_1(-\alpha) = \varphi_2(0) = \varphi_2(-\alpha) = 0, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \end{gathered} \tag{1.4}$$

$$u\,(x,\,-\alpha) = \varphi\,(x)\,, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1.5}$$

где $\varphi(x) \in C^3[0,\,1]$, $\varphi_1(t) \in C^2[-\alpha,\,\beta]$, $\varphi_2(t) \in C^2[-\alpha,\,\beta]$,

$$D_+ = \{(x,t) : 0 < x < 1,\, 0 < t < \beta\}\,, \quad D_- = \{(x,t) : 0 < x < 1,\, -\alpha < t < 0\}\,.$$

[1]Тарасенко Анна Валерьевна (Tarasenko.A.V@mail.ru), кафедра прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета, 443001, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Задача 2. Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям (1.2), (1.3), (1.5) и

$$\begin{gathered} u\,(0,\,t)=\varphi_1(t), \quad u_x\,(1,\,t)=\varphi_2(t), \\ \varphi_1(0)=\varphi_1(-\alpha)=\varphi_2(0)=\varphi_2(-\alpha)=0, \quad -\alpha\leqslant t\leqslant\beta; \end{gathered} \tag{1.6}$$

где $\varphi(x)\in C^3[0,\,1]$, $\varphi_1(t)\in C^2[-\alpha,\,\beta]$, $\varphi_2(t)\in C^2[-\alpha,\,\beta]$.

Задача 3. Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям (1.2), (1.3), (1.5) и

$$\begin{gathered} u\,(1,\,t)=\varphi_1(t), \quad u_x\,(0,\,t)=\varphi_2(t), \\ \varphi_1(0)=\varphi_1(-\alpha)=\varphi_2(0)=\varphi_2(-\alpha)=0, \quad -\alpha\leqslant t\leqslant\beta; \end{gathered} \tag{1.7}$$

где $\varphi(x)\in C^3[0,\,1]$, $\varphi_1(t)\in C^2[-\alpha,\,\beta]$, $\varphi_2(t)\in C^2[-\alpha,\,\beta]$.

Необходимо отметить, что в последнее время подобные задачи для широкого класса уравнений были исследованы в работах К.Б. Сабитова и его учеников [1; 2]. Новизна постановок рассматриваемых задач заключается в граничных условиях (1.4), (1.6), (1.7).

2. Единственность и существование решения задач

Решение задачи (1.2)–(1.5) ищется в виде ряда Фурье

$$u(x,t)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{+\infty}u_k(t)\cos(\pi kx)=\sqrt{2}u_0(t)+\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)\cos(\pi kx),\ k\in N. \tag{2.1}$$

Проводя операции дифференцирования и интегрирования [3], в результате всех вычислений получим, что функция $u_k(t)$ имеет вид

$$u_k(t)=\begin{cases} \frac{\varphi_k-\psi_k(-\alpha)}{\Delta_\alpha(k)}e^{-\pi^2k^2t}\left[1-\int\limits_0^t c_1(s)e^{\pi^2k^2s}\,ds\right]-\int\limits_0^t f(s)e^{\pi^2k^2(s-t)}\,ds, \quad t>0, \\ \frac{\varphi_k-\psi_k(-\alpha)}{\Delta_\alpha(k)}\left[\cos(\pi kt)-\pi k\sin(\pi kt)-\omega_k(t)\right]+\psi_k(t), \quad t<0, \end{cases} \tag{2.2}$$

где

$$\varphi_k=\sqrt{2}\int\limits_0^1\varphi(x)\cos(\pi kx)\,dx, \quad \psi_k(t)=\frac{1}{\pi k}\int\limits_t^0 f(s)\sin[\pi k(s-t)]\,ds,$$

$$f(t)=\sqrt{2}\varphi_1(t)-\sqrt{2}\cos(\pi k)\varphi_2(t),$$

$$\omega_k(t)=\frac{c_1(0+0)}{\pi k}\sin(\pi kt)-\frac{1}{\pi k}\int\limits_t^0 c_2(s)\sin[\pi k(s-t)]\,ds,$$

$$\Delta_\alpha(k)=\cos(\pi k\alpha)+\pi k\sin(\pi k\alpha)-\omega_k(-\alpha)\neq 0. \tag{2.3}$$

Справедливы следуюшие теоремы для поставленной задачи (1.2)–(1.5).

Теорема 1. Если $u(x,t)$ является решением задачи (1.2)–(1.5), то оно единственно при выполнении условия (2.3) при любых $k\in N$.

Теорема 2. Если α является произвольным положительным рациональным числом, то существует $C_0=const>0$ такая, что при больших k справедлива оценка

$$|\Delta_\alpha(k)|\geqslant C_0>0. \tag{2.4}$$

Теорема 3. Если выполнено условие (2.4), то при больших k имеют место оценки

$$|u_k(t)| \leqslant \begin{cases} M_1|\varphi_k - \psi_k(-\alpha)| + M_2, & t > 0, \\ k\left(M_3|\varphi_k - \psi_k(-\alpha)| + M_4\right), & t < 0, \end{cases}$$

$$|u_k^{'}(t)| \leqslant \begin{cases} k^2\left(M_5|\varphi_k - \psi_k(-\alpha)| + M_6\right), & t > 0, \\ k^2\left(M_7|\varphi_k - \psi_k(-\alpha)| + M_8\right), & t < 0, \end{cases}$$

$$|u_k^{''}(t)| \leqslant k^3\left(M_9|\varphi_k - \psi_k(-\alpha)| + M_{10}\right), \quad t \leqslant 0,$$

где $M_i = const > 0, \quad i = \overline{1;5}$ и M_i зависит от $c_1(t)$, $c_2(t)$, α.

Теорема 4. Если $\varphi(x) \in C^3[0;1]$, на сегменте $[0;1]$ имеет кусочно-непрерывную производную четвертого порядка и $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi^{''}(0) = \varphi^{''}(1) = 0$, то $\varphi_k = \frac{1}{\pi^4 k^4}\varphi_k^{(IV)}$, где $\varphi_k^{(IV)} = \sqrt{2}\int\limits_0^1 \varphi^{(IV)}\sin(\pi k x)\,dx$.

Теорема 5. Если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 4, $c_1(t) \in C[0;\beta]$, $\quad c_2(t) \in C[-\alpha;0]$ и выполнено условие (2.4), то существует единственное решение задачи (1.2)–(1.5), и оно определяется рядом (2.1).

Решения задач (1.2), (1.3), (1.5), (1.6) и (1.2), (1.3), (1.5), (1.7) ищутся в виде рядов

$$u_k(t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\sin(\lambda x), \quad \lambda = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in N, \tag{2.5}$$

$$u_k(t) = \sqrt{2}u_0(t) + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\cos(\lambda x), \quad \lambda = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in N \tag{2.6}$$

соответственно. Проводя аналогичные рассуждения, как для задачи (1.2)–(1.5), получаем, что функция $u_k(t)$ в задаче 2 в результате вычислений принимает следующий вид:

$$u_k(t) = \begin{cases} \frac{\varphi_k - \psi_k(-\alpha)}{\Delta_\alpha(k)} e^{-\lambda^2 t}\left[1 - \int\limits_0^t c_1(s)e^{\lambda^2 s}\,ds\right] - \\ \qquad - \int\limits_0^t f(s)e^{\lambda^2(s-t)}\,ds, \quad t > 0, \\ \frac{\varphi_k - \psi_k(-\alpha)}{\Delta_\alpha(k)}\left[\cos(\lambda t) - \lambda\sin(\lambda t) - \omega_k(t)\right] + \psi_k(t), \quad t < 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

где

$$f(t) = -\sqrt{2}\sin(\lambda)\,\varphi_2(t) - \sqrt{2}\lambda\varphi_1(t), \quad \varphi_k = \sqrt{2}\int\limits_0^1 \varphi(x)\sin(\lambda x)\,dx,$$

$$\omega_k(t) = \frac{1}{\lambda}\left(c_1(0+0)\sin(\lambda t) - \int\limits_t^0 c_2(s)\sin\left[\lambda(s-t)\right]\,ds,\right), \tag{2.8}$$

$$\psi_k(t) = \frac{1}{\lambda}\int\limits_t^0 f(s)\sin\left[\lambda(s-t)\right]\,ds, \tag{2.9}$$

$$\Delta_\alpha(k) = \cos(\lambda\alpha) + \lambda\sin(\lambda\alpha) - \omega_k(-\alpha) \neq 0. \tag{2.10}$$

В задаче 3 функция $u_k(t)$ имеет также окончательный вид (2.7), где

$$f(t) = \sqrt{2}\lambda \sin(\lambda)\, \varphi_1(t) - \sqrt{2}\varphi_2(t),\; \varphi_k = \sqrt{2}\int\limits_0^1 \varphi(x)\cos(\lambda x)\, dx,$$

и $\omega_k(t)$, $\psi_k(t)$, $\Delta_\alpha(k)$ имеют вид (2.8), (2.9), (2.10) соответственно.

Для задач 2 и 3 также справедливы все вышеприведенные теоремы. Получаем, что в поставленных задачах функция $u(x,t)$, определенная рядом (2.1), (2.5) и (2.6) соответственно, является решением уравнения (1.1) на множестве $D_+ \cup D_-$.

Литература

[1] Сабитов К.Б. Начально-граничная задача для нагруженного уравнения парабола-гиперболического типа // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тезисы докладов международной конференции. Минск: Беларусь, 2009. С. 142.

[2] Сабитов К.Б., Рахманова Л.Х. Начально-граничная задача для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 9. С. 1175–1181.

[3] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1970. Т. 3. 656 с.

Поступила в редакцию 24/*VII*/2013;
в окончательном варианте — 24/*VII*/2013.

ON SOME PROBLEMS FOR A LOADED PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION

© 2013 A.V. Tarasenko[2]

Some problems with various boundary conditions for the loaded mixed type equation in rectangular area are studied. The criterion of uniqueness is established and theorems of an existence of solutions to the problems are proved. The solutions are constructed as Fourier series with respect to eigenfunctions of a corresponding one-dimensional problem.

Key words: loaded equation of mixed type, spectral method, uniqueness, existence.

Paper received 24/*VII*/2013.
Paper accepted 24/*VII*/2013.

[2]Tarasenko Anna Valerevna (Tarasenko.A.V@mail.ru), Department of Applied Mathematics and Computer Science, Samara State Technical University, Samara, 443001, Russian Federation.