

# ОБ ОБОБЩЕННЫХ $\delta$ -ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯХ<sup>1</sup>

© 2013 И.Б. Кайгородов<sup>2</sup>

В этой работе рассматриваются вопросы, посвященные обобщению понятия  $\delta$ -дифференцирования в неассоциативных алгебрах. Кроме того, проведено построение новых примеров нетривиальных  $\delta$ -дифференцирований для алгебр Ли.

**Ключевые слова:**  $\delta$ -дифференцирование, алгебра Ли, альтернативная алгебра, йорданова супералгебра, супералгебра Ли.

## Введение

Понятие антидифференцирования алгебры, являющееся частным случаем  $\delta$ -дифференцирования, т. е.  $(-1)$ -дифференцированием, рассматривалось в работах [1; 2]. В дальнейшем в работе [3] появляется определение  $\delta$ -дифференцирования алгебры. Напомним, что при фиксированном  $\delta$  из основного поля  $F$ , под  $\delta$ -дифференцированием алгебры  $A$  понимают линейное отображение  $\phi$ , удовлетворяющее условию

$$\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + x\phi(y)) \quad (1)$$

для произвольных элементов  $x, y \in A$ . Описанию  $\delta$ -дифференцирований посвящены работы [3]-[15], где изучались  $\delta$ -дифференцирования алгебр и супералгебр Ли, йордановых алгебр и супералгебр, алгебр Филиппова и др. А в работах [16; 17] изучались обобщения  $\delta$ -дифференцирований  $n$ -арных алгебр.

## 1. Об обобщенных $\delta$ -дифференцированиях алгебр и супералгебр

Пусть  $F$  — поле характеристики отличной от 2. Напомним определение супералгебры. Алгебра  $G$  над полем  $F$  называется супералгеброй (или  $\mathbb{Z}_2$ -градуированной алгеброй), если она представима в виде  $G = G_0 \oplus G_1$ , при этом справедливы соотношения  $G_i G_j \subseteq G_{i+j(mod 2)}$ ,  $i, j = 0, 1$ .

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект МК-330.2013.1).

<sup>2</sup>Кайгородов Иван Борисович (kib@math.nsc.ru), лаборатория теории колец Института математики им. С.Л. Соболева, 630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, пр. Коптюга, 4.

При фиксированном элементе  $\delta \in F$ , для супералгебры  $A = A_0 \oplus A_1$ , однородное линейное отображение  $\phi : A \rightarrow A$  будем называть четным  $\delta$ -супердифференцированием, если  $\phi(A_i) \subseteq A_i$  и для однородных  $x, y \in A_0 \cup A_1$  выполнено

$$\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + x\phi(y)).$$

Под центроидом  $\Gamma(A)$  супералгебры  $A$  мы будем понимать множество линейных отображений  $\chi : A \rightarrow A$ , что для произвольных элементов  $a, b$  верно

$$\chi(ab) = \chi(a)b = a\chi(b).$$

Ясно, что 1-супердифференцирование является обычным супердифференцированием; 0-супердифференцированием является произвольный эндоморфизм  $\phi$  супералгебры  $A$  такой, что  $\phi(A^2) = 0$ . Ненулевое  $\delta$ -супердифференцирование будем считать нетривиальным, если  $\delta \neq 0, 1$  и  $\phi \notin \Gamma(A)$ . Легко видеть, что четное  $\delta$ -супердифференцирование будет являться  $\delta$ -дифференцированием.

Пусть  $A$  — алгебра над  $F$  с умножением  $ab$  и обладающая дополнительной билинейной операцией  $\{, \} : A \times A \rightarrow A$ . Через  $Ax$  обозначим изоморфную копию алгебры  $A$  и на прямой сумме векторных пространств  $A \oplus Ax$  зададим умножение  $\cdot$  по следующему правилу

$$a \cdot b = ab, a \cdot (bx) = (ab)x, (ax) \cdot b = (ab)x, (ax) \cdot (bx) = \{a, b\}, \text{ где } a, b \in A.$$

Мы получим структуру супералгебры на  $B : B_0 = A, B_1 = Ax$ . Примерами таких супералгебр являются супералгебры, построенные по процессу Кантора [10; 19]. Данный процесс мы будем называть обобщенным процессом Кантора.

При рассмотрении четных  $\delta$ -супердифференцирований супералгебры  $B$  мы приходим к понятию обобщенного  $\delta$ -дифференцирования алгебры  $A$ . Для этого достаточно заметить, что для  $\phi$  — четного  $\delta$ -супердифференцирования  $B$  верно

$$\delta\phi(ax)b + \delta(ax)\phi(b) = \phi((ax)b) = \phi(a(bx)) = \delta\phi(a)(bx) + \delta a\phi(bx). \quad (2)$$

В силу четности  $\delta$ -супердифференцирования  $\phi$ , мы можем положить, что  $\phi(bx) = \chi(b)x$ , где  $\chi \in \text{End}(A)$ . Таким образом, соотношение (2) преобразуется к выражению

$$\delta\chi(a)b + \delta a\phi(b) = \chi(ab) = \delta\phi(a)b + \delta a\chi(b). \quad (3)$$

Далее для алгебры  $A$  линейное отображение  $\chi$ , связанное с  $\delta$ -дифференцированием  $\phi$  посредством соотношения (3), мы будем называть *обобщенным  $\delta$ -дифференцированием*. Обобщенные  $\delta$ -дифференцирования неявно возникают в работе [10] при рассмотрении  $\delta$ -супердифференцирований обобщенного дубля Кантора, построенного на первичной ассоциативной алгебре.

Отметим, что обобщенное  $\delta$ -дифференцирование тесно связано с обобщенным дифференцированием, то есть таким линейным отображением  $\sigma$  алгебры  $A$ , которое связано с некоторым дифференцированием  $D$  алгебры  $A$  посредством соотношения

$$\sigma(ab) = \sigma(a)b + aD(b).$$

Примером обобщенного дифференцирования, не являющегося обыкновенным дифференцированием, может служить отображение вида  $D + \psi$ , где  $D \in \text{Der}(A)$ ,  $\psi \in \Gamma(A)$ . Обобщенные дифференцирования рассматривались, к примеру, в работе [20].

Далее, во всех леммах этого раздела мы будем подразумевать, что  $\chi$  — обобщенное  $\delta$ -дифференцирование, связанное с  $\delta$ -дифференцированием  $\phi$ , и  $\chi_\phi = \chi - \phi$ .

Все алгебры будут рассматриваться над кольцом характеристики, отличной от 2, а супералгебры над полем характеристики, отличной от 2.

**Лемма 1.** Пусть  $\chi$  — обобщенное  $\delta$ -дифференцирование (супер)алгебры  $A$ , тогда  $\chi_\phi$  является  $\frac{\delta}{2}$ -дифференцированием  $A$  и  $\chi_\phi(ab) = \delta a \chi_\phi(b) = \delta \chi_\phi(a)b$ .

**Доказательство.** Рассматривая разность между выражениями (3) и (1), мы получим

$$\chi_\phi(ab) = \delta a \chi_\phi(b) = \delta \chi_\phi(a)b.$$

Далее, воспользовавшись полученным равенством, легко имеем

$$\chi_\phi(ab) = \frac{1}{2}(\delta a \chi_\phi(b) + \delta \chi_\phi(a)b).$$

Данное означает, что  $\chi_\phi$  является  $\frac{\delta}{2}$ -дифференцированием алгебры  $A$ . Лемма доказана.

Ясно, что обобщенное 1-дифференцирование является отображением вида  $D + \psi$ , где  $D$  — дифференцирование, а  $\psi$  — элемент центроида. Обобщенным 0-дифференцированием является произвольный эндоморфизм  $\chi$  с условием  $\chi(A^2) = 0$ . Обобщенное  $\delta$ -дифференцирование  $\chi$  является нетривиальным, если  $\delta \neq 0, 1$  и  $\chi$  не является  $\delta$ -дифференцированием. Следует отметить, что условие  $\chi_\phi = 0$  непосредственно влечет тривиальность  $\chi$ .

Далее, в теоремах 2, 3 и 4 будут рассматриваться алгебры с тривиальным аннулятором, то есть с условием  $\text{Ann}(A) = \{x | xA = Ax = 0\} = 0$ . Примером таких алгебр являются первичные алгебры.

**Теорема 2.** Алгебра Ли  $A$  с тривиальным аннулятором не имеет нетривиальных обобщенных  $\delta$ -дифференцирований.

**Доказательство.** В силу показанного в лемме 1, мы можем заключить, что выполняется следующая цепочка соотношений

$$\begin{aligned} \delta(x\chi_\phi(z))y + \delta x(y\chi_\phi(z)) &= \delta(xy)\chi_\phi(z) = \chi_\phi((xy)z) = \\ &= \chi_\phi((xz)y + x(yz)) = \delta^2((x\chi_\phi(z))y + x(y\chi_\phi(z))). \end{aligned}$$

Откуда имеем  $0 = (x\chi_\phi(z))y + x(y\chi_\phi(z)) = \chi_\phi(xy)z$ . Таким образом,  $\chi_\phi(A^2) \subseteq \text{Ann}(A) = \{0\}$ . Отсюда получаем  $\chi_\phi(x)y = 0$  и  $\chi_\phi(A) \subseteq \text{Ann}(A) = \{0\}$ , что эквивалентно тривиальности  $\chi$ . Теорема доказана.

**Теорема 3.** Супералгебра Ли  $A$  с тривиальным аннулятором не имеет нетривиальных обобщенных  $\delta$ -дифференцирований.

**Доказательство.** Легко понять, что пространство  $\text{End}(A)$  является  $\mathbb{Z}_2$ -градуированным, то есть любое линейное отображение  $\psi \in \text{End}(A)$  мы можем представить в виде суммы четного и нечетного отображений  $\psi_0 + \psi_1$ , где  $\psi_0(A_i) \subseteq A_i$  и  $\psi_1(A_i) \subseteq A_{i+1}$ .

Будем считать, что  $\chi$  и  $\phi$  являются четными отображениями, то есть верно  $\chi(A_i) \subseteq A_i, \phi(A_i) \subseteq A_i$ . Тогда, в силу показанного в лемме 1, мы можем заключить, что для однородных элементов  $x, y, z \in A_0 \cup A_1$  выполняется следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} \delta(x\chi_\phi(z))y + (-1)^{p(x)p(z)}\delta x(y\chi_\phi(z)) &= \delta(xy)\chi_\phi(z) = \chi_\phi((xy)z) = \\ \chi_\phi((xz)y + (-1)^{p(x)p(z)}x(yz)) &= \delta^2((x\chi_\phi(z))y + (-1)^{p(x)p(z)}x(y\chi_\phi(z))). \end{aligned}$$

Откуда получаем

$$0 = (x\chi_\phi(z))y + (-1)^{p(x)p(z)}x(y\chi_\phi(z)) = (xy)\chi_\phi(z).$$

Понятно, что из законов дистрибутивности также следует, что равенство  $\chi_\phi(xy)z = 0$  выполняется для произвольных  $x, y, z \in A$ , где  $\chi_\phi$  — четное отображение, определенное выше.

Пусть  $\chi$  и  $\phi$  являются нечетными отображениями, то есть верно

$$\chi(A_i) \subseteq A_{i+1}, \phi(A_i) \subseteq A_{i+1}.$$

Положим  $x_i, y_i \in A_i$  и  $x, y, z \in A$ .

Легко заметить, что

$$\begin{aligned} \delta(x_0\chi_\phi(z))y + \delta x_0(y\chi_\phi(z)) &= \delta(x_0y)\chi_\phi(z) = \chi_\phi((x_0y)z) = \\ &= \chi_\phi((x_0z)y + x_0(yz)) = \delta^2((x_0\chi_\phi(z))y + x_0(y\chi_\phi(z))). \end{aligned}$$

Откуда имеем

$$0 = (x_0\chi_\phi(z))y + x_0(y\chi_\phi(z)) = (x_0y)\chi_\phi(z),$$

то есть  $\chi_\phi(x_0y)z = 0$ .

Отметим, что

$$\chi_\phi(x_1y_0) = \delta\chi_\phi(x_1)y_0 = -\delta y_0\chi_\phi(x_1) = -\delta\chi_\phi(y_0)x_1 = -\delta x_1\chi_\phi(y_0) = -\chi_\phi(x_1y_0),$$

то есть  $\chi_\phi(x_1y_0)z = 0$ .

Заметим, что

$$\chi_\phi(x_1y_1) = \delta\chi_\phi(x_1)y_1 = -\delta y_1\chi_\phi(x_1) = -\chi_\phi(y_1x_1) = -\chi_\phi(x_1y_1),$$

то есть  $\chi_\phi(x_1y_1)z = 0$  и  $\chi_\phi(x_1y)z = 0$ .

Теперь мы можем заключить, что  $\chi_\phi(xy)z = 0$ , где  $x, y, z$  — произвольные элементы  $A$  и  $\chi_\phi$  либо четное, либо нечетное отображение.

Таким образом,  $\chi_\phi(A^2) \subseteq \text{Ann}(A) = \{0\}$ . Откуда получаем  $\chi_\phi(x)y = 0$  и  $\chi_\phi(A) \subseteq \text{Ann}(A) = \{0\}$ , что эквивалентно тривиальности  $\chi$ . Теорема доказана.

**Теорема 4.** Альтернативная алгебра  $A$  с тривиальным аннулятором не имеет нетривиальных обобщенных  $\delta$ -дифференцирований.

**Доказательство.** В силу показанного в лемме 1, мы можем заключить, что выполняется следующая цепочка соотношений:

$$\delta\chi_\phi(y)x^2 = \chi_\phi(yx^2) = \chi_\phi((yx)x) = \delta^2((\chi_\phi(y)x)x) = \delta^2\chi_\phi(y)x^2.$$

Таким образом, мы получаем  $y\chi_\phi(x^2) = 0$ , то есть  $\chi_\phi(x^2) \subseteq \text{Ann}(A) = \{0\}$ . Откуда, посредством линеаризации, легко вытекает, что  $\chi_\phi(xy + yx) = 0$  и  $\chi_\phi(z)(xy + yx) = 0$ .

Повторяя дословно доказательство из [21, лемма 2, с. 160], получаем  $\chi_\phi(((ab)c)d) = 0$ . Таким образом,  $\chi_\phi(a) = 0$  и  $\chi$  тривиально. Теорема доказана.

**Теорема 5.** Унитарная (супер)алгебра  $A$  не имеет нетривиальных обобщенных  $\delta$ -дифференцирований.

**Доказательство.** Заметим, что если  $e$  — единица (супер)алгебры  $A$ , то

$$\chi_\phi(e) = \chi_\phi(ee) = \delta\chi_\phi(e) \text{ и } \chi_\phi(e) = 0.$$

Таким образом, легко видеть, что

$$\chi_\phi(x) = \chi_\phi(ex) = 2\chi_\phi(e)x = 0.$$

Откуда мы получаем тривиальность  $\chi$ . Теорема доказана.

В частности, теорема 5 дает отсутствие нетривиальных обобщенных  $\delta$ -дифференцирований для полупростых конечномерных йордановых алгебр и всего класса структуризуемых алгебр над произвольным полем характеристики, отличной от 2.

**Теорема 6.** Полупростая конечномерная йорданова супералгебра  $A$  над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 2, не имеет нетривиальных обобщенных  $\delta$ -дифференцирований.

**Доказательство.** Согласно работе [22], если  $A$  полупростая конечномерная йорданова супералгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 2, то  $A = \bigoplus_{i=1}^s T_i \oplus J_1 \oplus \dots \oplus J_t$ , где  $J_1, \dots, J_t$  — простые йордановы супералгебры и  $T_i = J_{i1} \oplus \dots \oplus J_{ir_i} + K_i \cdot 1$ ,  $K_1, \dots, K_s$  — расширения поля  $F$  и  $J_{i1}, \dots, J_{ir_i}$  — простые неунитальные йордановы супералгебры над полем  $K_i$ . Пусть некоторая супералгебра  $J$  представима в виде прямой суммы супералгебр  $B \oplus C$  и  $b$  — элемент супералгебры  $B$ , который не является делителем нуля, а  $c$  — произвольный элемент  $C$ . Тогда

$$0 = \chi_\phi(bc) = \delta b \chi_\phi(c),$$

откуда получаем, что  $\chi_\phi(c) \in C$ , благодаря чему можем заключить, что  $\chi_\phi(J_i) \subseteq J_i$  и  $\chi_\phi(T_i) \subseteq T_i$ . Также легко заметить, что  $\phi(J_i) \subseteq J_i$  и  $\phi(T_i) \subseteq T_i$ . Исходя из теоремы 5, мы заключаем, что ограничение  $\chi$  на унитальные супералгебры  $T_i$  и  $J_i$  тривиально.

Следовательно, нам достаточно показать тривиальность ограничения  $\chi$  на  $J_i$  в случае, когда  $J_i$  является неунитальной простой конечномерной йордановой супералгеброй. Данные супералгебры исчерпываются супералгебрами  $K_3, V_{1/2}(Z, D)$  и супералгеброй  $K_9$  в случае характеристики поля  $p = 3$ . Их определения можно найти, к примеру, в работах [6; 12; 22]. В частности, известно, что четные части супералгебр  $K_3, K_9, V_{1/2}(Z, D)$  являются унитарными алгебрами. Согласно [12, теорема 10], в этом случае  $J_i$  не имеет нетривиальных  $\delta$ -дифференцирований при  $\delta \neq \frac{1}{2}$ . Таким образом, по лемме 1 и определению нетривиального обобщенного  $\delta$ -дифференцирования  $\chi_\phi = 0$  при  $\delta \neq 2$ . Случай  $\delta = 2$  рассмотрим подробнее. Легко понять, что если  $e$  — единица  $(J_i)_0$ , то  $\chi_\phi(e) \in (J_i)_1$ . Из определения супералгебр  $K_3, V_{1/2}(Z, D)$  известно, что  $2ez = z$ , при  $z \in (J_i)_1$ . Следовательно, если  $J_i = K_3, V_{1/2}(Z, D)$ , то для  $z \in (J_i)_1$  верно  $\chi_\phi(z) = 2\chi_\phi(ez) = 4e\chi_\phi(z)$ , то есть  $\chi_\phi(z) = 0$  (при  $p \neq 3$ ) и  $\chi_\phi(z) \in (J_i)_0$  (при  $p = 3$ ). Если  $J_i = K_3$ , то известно, что для нее существуют такие  $w, t \in (J_i)_1$ , что  $e = wt$ , откуда, если  $p \neq 3$ , вытекает  $\chi_\phi(e) = 0$ . Пусть теперь  $p \neq 3, J_i = V_{1/2}(Z, D)$ , тогда

$$0 = \chi_\phi(ax) = 4(\chi_\phi(a) \cdot x) \text{ и } \chi_\phi(a) = a_{\chi_\phi} x,$$

то есть  $D(a_{\chi_\phi}) = 0$ , что дает  $a_{\chi_\phi} = \alpha^{a_{\chi_\phi}} e, \alpha^{a_{\chi_\phi}}$  — элемент основного поля супералгебры  $J_i$ . Заметим, что

$$\alpha^{a_{\chi_\phi}} ex = \chi_\phi(a) = 2\chi_\phi(e)a = \alpha^{e_{\chi_\phi}} ax$$

и, учитывая, что  $e$  и  $a$  мы можем взять линейно независимые, получаем  $\chi_\phi = 0$ .

Если  $p = 3$  и  $J_i = V_{1/2}(Z, D)$ , то при  $z, y \in (J_i)_0$  мы получаем  $\chi_\phi(e) = bx$  и

$$\chi_\phi(z) = 2\chi_\phi(e) \cdot z = (zb)x,$$

$$\chi_\phi(zx) = \chi_\phi(e) \cdot zx = D(b)z - bD(z).$$

Таким образом, имеем, что

$$\chi_\phi(zx \cdot yx) = 2\chi_\phi(zx) \cdot yx,$$

$$((D(z)y - zD(y))b)x = ((D(b)z - bD(z))y)x,$$

то есть  $D(zyb) = 0$ , что влечет  $D(b) = 0$  и  $b = \beta e$ , где  $\beta$  — элемент основного поля супералгебры  $J_i$ . Следовательно,  $D(\beta z) = 0$ . Замечая, что  $z$  может быть линейно независимо с  $e$ , и в силу того, что  $D$  обнуляет только элементы вида  $\gamma e$ , где  $\gamma$  — элемент основного поля супералгебры  $J_i$ , получаем  $\beta = 0$ . Полученное дает тривиальность  $\chi$ .

Если  $p = 3$  и  $J_i = K_9, K_3$ , то при  $z, t \in (J_i)_1$  имеем

$$\chi_\phi(zt) = 2\chi_\phi(z) \cdot t = 2t \cdot \chi_\phi(z) = \chi_\phi(tz) = -\chi_\phi(zt).$$

Отметим, что здесь мы воспользовались тем, что  $\chi_\phi(z) \in (J_i)_0$ . Таким образом,  $\chi_\phi((J_i)_1^2) = 0$ , что влечет  $\chi_\phi(e) = 0$  и тривиальность  $\chi$ .

Исходя из вышеприведенных рассуждений, теорема доказана.

## 2. О $\delta$ -дифференцированиях обобщенного дубля Кантора

Напомним, что в работе [10] было введено и рассматривалось понятие обобщенного дубля Кантора. Как следует из результатов работы [11], особый интерес представляет рассмотрение  $\delta$ -дифференцирований обобщенного дубля Кантора, построенного на супералгебре с тривиальной нечетной компонентой. Данное заключение вытекает из того факта, что простые унитарные супералгебры йордановой скобки имеют нетривиальные  $\delta$ -дифференцирования только тогда, когда они построены на супералгебрах с тривиальной нечетной частью [11].

Пусть  $A$  — алгебра с операцией  $\{ , \} : A \times A \rightarrow A$  и  $K(A)$  — супералгебра, полученная с помощью обобщенного процесса Кантора, описанного в параграфе 2. Через  $\Delta_\delta(A)$  и  $\Gamma(A)$  обозначим, соответственно, множество  $\delta$ -дифференцирований  $A$  и центроид алгебры  $A$ , а через  $\Delta_\delta(A, \{ , \})$  — множество  $\delta$ -дифференцирований  $A$  по операции  $\{ , \}$ . Для  $\phi$  — линейного отображения супералгебры  $K(A)$  под  $\phi|_A$  будем подразумевать ограничение отображения  $\phi$  на подалгебру  $A$ .

**Теорема 7.** Пусть  $\phi$  — нетривиальное четное  $\delta$ -дифференцирование супералгебры  $K(A)$ , где  $A$  — первичная альтернативная алгебра над полем характеристики, отличной от 2, 3. Тогда

$$\delta = \frac{1}{2} \text{ и } \phi(ax) = \phi|_A(a)x, \text{ где } \phi|_A \in \Gamma(A) \cap \Delta_{\frac{1}{2}}(A, \{ , \}).$$

**Доказательство.** Пользуясь предварительными рассуждениями из параграфа 2 и теоремой 4, легко понять, что при  $\phi$  — четном  $\delta$ -дифференцировании супералгебры  $K(A)$  мы имеем  $\phi(ax) = \phi(a)x$  для любого  $a \in A$ . С другой стороны, мы видим, что

$$\phi(ax \cdot bx) = \delta\phi(ax)bx + \delta ax \cdot \phi(bx),$$

то есть

$$\phi\{a, b\} = \delta\{\phi(a), b\} + \delta\{a, \phi(b)\}.$$

Таким образом, четные  $\delta$ -дифференцирования супералгебры  $K(A)$  определяются множеством отображений  $\Delta_\delta(A) \cap \Delta_\delta(A, \{ , \})$ , где каждое отображение  $\psi \in \Delta_\delta(A) \cap \Delta_\delta(A, \{ , \})$  продолжается на нечетную компоненту супералгебры  $K(A)$  по принципу  $\psi(ax) = \psi(a)x$ .

Напомним, что в силу [5], первичные альтернативные алгебры (над полем характеристики, отличной от 2, 3) не имеют нетривиальных  $\delta$ -дифференцирований, то есть супералгебра  $K(A)$ , построенная на первичной альтернативной алгебре  $A$ , не имеет нетривиальных четных  $\delta$ -дифференцирований при  $\delta \neq \frac{1}{2}$ .

Исходя из вышесказанного, множество четных  $\frac{1}{2}$ -дифференцирований супералгебры  $K(A)$  определяются посредством множества  $\Gamma(A) \cap \Delta_{\frac{1}{2}}(A, \{ , \})$  и условия  $\phi(ax) = \phi|_A(a)x$ , где  $\phi|_A \in \Gamma(A) \cap \Delta_{\frac{1}{2}}(A, \{ , \})$ . Теорема доказана.

**Теорема 8.** Пусть  $\phi$  — нетривиальное четное  $\delta$ -дифференцирование супералгебры  $K(A)$ , где  $A$  — первичная лиева алгебра (либо первичная супералгебра Ли, рассматриваемая как алгебра). Тогда  $\delta = \frac{1}{2}, -1$ ; множество четных  $(-1)$ -дифференцирований (соответственно, четных  $\frac{1}{2}$ -дифференцирований) супералгебры  $K(A)$  определяется посредством множества отображений  $\Delta_{-1}(A) \cap \Delta_{-1}(A, \{ , \})$  (соответственно,  $\Delta_{\frac{1}{2}}(A) \cap \Delta_{\frac{1}{2}}(A, \{ , \})$ ) и условия  $\phi(ax) = \phi(a)x$ .

**Доказательство.** Пользуясь предварительными рассуждениями из параграфа 2 и теоремой 2 (в случае супералгебры теоремой 3), легко понять, что при  $\phi$  — четном  $\delta$ -дифференцировании супералгебры  $K(A)$  мы имеем  $\phi(ax) = \phi(a)x$  для любого  $a \in A$ . С другой стороны, мы видим, что

$$\phi(ax \cdot bx) = \delta\phi(ax)bx + \delta ax \cdot \phi(bx),$$

то есть

$$\phi\{a, b\} = \delta\{\phi(a), b\} + \delta\{a, \phi(b)\}.$$

Таким образом, четные  $\delta$ -дифференцирования супералгебры  $K(A)$  определяются множеством отображений  $\Delta_\delta(A) \cap \Delta_\delta(A, \{ , \})$ , где каждое отображение  $\psi \in \Delta_\delta(A) \cap \Delta_\delta(A, \{ , \})$  продолжается на нечетную компоненту супералгебры  $K(A)$  по принципу  $\psi(ax) = \psi(a)x$ .

Согласно результатам [1; 3; 4] (в случае супералгебры [9]), первичные лиевые алгебры (соответственно, первичные лиевы супералгебры, рассматриваемые как алгебры) не имеют нетривиальных  $\delta$ -дифференцирований при  $\delta \neq -1, \frac{1}{2}$ . Таким образом, множество четных  $\delta$ -дифференцирований супералгебры  $K(A)$ , построенной на первичной лиевой алгебре  $A$  (либо первичной лиевой супералгебре  $A$ , рассматриваемой как алгебра), исчерпывается случаями  $(-1)$ -дифференцирований и  $\frac{1}{2}$ -дифференцирований. Множество  $(-1)$ -дифференцирований (соответственно,  $\frac{1}{2}$ -дифференцирований) супералгебры  $K(A)$  определяется посредством множества отображений  $\Delta_{-1}(A) \cap \Delta_{-1}(A, \{ , \})$  (соответственно,  $\Delta_{\frac{1}{2}}(A) \cap \Delta_{\frac{1}{2}}(A, \{ , \})$ ) и условия  $\phi(ax) = \phi(a)x$ . Теорема доказана.

**Теорема 9.** Пусть  $\phi$  — нетривиальное четное  $\delta$ -дифференцирование супералгебры  $K(A)$ , где  $A$  — унитарная алгебра или полупростая йорданова супералгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 2. Тогда

$$\delta = \frac{1}{2} \text{ и } \phi(ax) = \phi|_A(a)x, \text{ где } \phi|_A \in \Delta_{\frac{1}{2}}(A) \cap \Delta_{\frac{1}{2}}(A, \{ , \}).$$

**Доказательство.** Утверждение вытекает из результатов об описании  $\delta$ -дифференцирований полупростой йордановой алгебры над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 2 [12] и  $\delta$ -дифференцирований унитарной алгебры [6, теорема 2.1]. Согласно этим результатам, на данных классах алгебр и супералгебр возможны только нетривиальные  $\frac{1}{2}$ -дифференцирования. Таким образом, пользуясь схемой доказательств теорем 7 и 8, мы получаем требуемое. Теорема доказана.

Рассмотрим супералгебру  $K(A)$ , построенную по обобщенному процессу Кантора (см. предыдущий раздел), где  $A$  — простая алгебра Ли с умножением  $[ , ]$ . Умножение  $\cdot$  супералгебры  $K(A)$  будет задаваться следующим правилом:

$$a \cdot b = [a, b], \quad a \cdot bx = [a, b]x, \quad ax \cdot b = [a, b]x, \quad ax \cdot bx = [a, b].$$

Легко заметить, что полученная алгебра  $K(A) = A \oplus Ax$  будет алгеброй Ли. В данном случае множество четных  $(-1)$ -дифференцирований (соответственно,  $\frac{1}{2}$ -дифференцирований) супералгебры  $K(A)$  определяется множеством  $\Delta_{-1}(A)$  (соответственно,  $\Delta_{\frac{1}{2}}(A)$ ) и условием  $\phi(ax) = \phi(a)x$  для  $\phi \in \Delta_{\delta}(A)$ ,  $\delta = -1, \frac{1}{2}$ .

Исходя из вышеизложенного, теоремы 8 и известных примеров нетривиальных  $(-1)$ -дифференцирований для простой алгебры  $sl_2$  [1] и нетривиальных  $\frac{1}{2}$ -дифференцирований для простой алгебры Витта  $W_1$  [4], мы получаем новые примеры нетривиальных  $(-1)$ -дифференцирований и  $\frac{1}{2}$ -дифференцирований для алгебр Ли, построенных из простых лиевых алгебр по обобщенному процессу Кантора.

Как заметил П. Зусманович во время проведения «AGMP-7», построенные примеры алгебр Ли изоморфны алгебрам вида  $A \otimes B$ , где  $A$  — алгебра Ли, а  $B$  — подходящая ассоциативно-коммутативная алгебра. Отметим, что  $\delta$ -дифференцирования алгебр типа  $A \otimes B$  рассматривались в работе [9].

В заключение автор выражает благодарность проф. П.С. Колесникову и проф. А.П. Пожидаеву за внимание к работе и конструктивные замечания.

## Литература

- [1] Hopkins N.C. Generalizes Derivations of Nonassociative Algebras // Nova J. Math. Game Theory Algebra. 1996. Т. 5. № 3. Р. 215–224.
- [2] Филиппов В.Т. Об алгебрах Ли, удовлетворяющих тождеству 5-й степени // Алгебра и логика. 1995. Т. 34. № 6. С. 681–705.
- [3] Филиппов В.Т. О  $\delta$ -дифференцированиях алгебр Ли // Сиб. матем. ж. 1998. Т. 39. № 6. С. 1409–1422.
- [4] Филиппов В.Т. О  $\delta$ -дифференцированиях первичных алгебр Ли // Сиб. матем. ж. 1999. Т. 40. № 1. С. 201–213.
- [5] Филиппов В.Т. О  $\delta$ -дифференцированиях первичных альтернативных и мальцевских алгебр // Алгебра и логика. 2000. Т. 39. № 5. С. 618–625.
- [6] Кайгородов И.Б. О  $\delta$ -дифференцированиях простых конечномерных йордановых супералгебр // Алгебра и логика. 2007. Т. 47. № 5. С. 585–605.

- [7] Кайгородов И.Б. О  $\delta$ -дифференцированиях классических супералгебр Ли // Сиб. матем. ж. 2009. Т. 50. № 3. С. 547–565.
- [8] Кайгородов И.Б. О  $\delta$ -супердифференцированиях простых конечномерных йордановых и лиевых супералгебр // Алгебра и логика. 2010. Т. 49. № 2. С. 195–215.
- [9] Zusmanovich P. On  $\delta$ -derivations of Lie algebras and superalgebras // J. of Algebra. 2010. Т. 324. № 12. Р. 3470–3486.
- [10] Кайгородов И.Б. Об обобщенном дубле Кантора // Вестник Самарского гос. университета. 2010. Т. 78. № 4. С. 42–50.
- [11] Желябин В.Н., Кайгородов И.Б. О  $\delta$ -супердифференцированиях простых супералгебр йордановой скобки // Алгебра и анализ. 2011. Т. 23. № 4. С. 40–58.
- [12] Кайгородов И.Б. О  $\delta$ -супердифференцированиях полупростых конечномерных йордановых супералгебр // Математические заметки. 2012. Т. 91. № 2. С. 200–213.
- [13] Кайгородов И.Б. О  $\delta$ -дифференцированиях  $n$ -арных алгебр // Известия РАН. Серия математическая. 2012. Т. 76. № 6. С. 81–94.
- [14] Kaygorodov I., Okhapkina E.  $\delta$ -derivations of semisimple structurable algebras // J. of Algebra and its Applications. 2014. Т. 13. № 4. 1350130 (12 pages).
- [15] Kaygorodov I., Popov Yu. Alternative algebras admitting derivations with invertible values and invertible derivations // Известие РАН (в печати).
- [16] Кайгородов И.Б.  $(n + 1)$ -арные дифференцирования простых  $n$ -арных алгебр // Алгебра и логика. 2011. Т. 50. № 5. С. 689–691.
- [17] Кайгородов И.Б. Об  $(n + 1)$ -арных дифференцированиях простых  $n$ -арных алгебр Мальцева // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25. № 4. С. 86–100.
- [18] Кайгородов И.Б. О  $(n + 1)$ -арных дифференцированиях полупростых алгебр Филиппова // Математические заметки (в печати).
- [19] Кантор И.Л. Йордановы и лиевы супералгебры, определяемые алгеброй Пуассона // Алгебра и анализ. Томск: Изд-во ТГУ. 1990. С. 89–126.
- [20] Hvala B. Generalized derivations in rings // Comm. Algebra. 1998. Т. 26. № 4. Р. 1147–1166.
- [21] Кольца, близкие к ассоциативным / К.А. Жевлаков [и др.]. М: Наука, 1978.
- [22] Zelmanov E. Semisimple finite dimensional Jordan superalgebras // Lie algebras, rings and related topics. Papers of the 2nd Tainan-Moscow international algebra workshop '97, Tainan, Taiwan, January 11–17, 1997. Hong Kong: Springer, 2000. Р. 227–243.

Поступила в редакцию 14/VI/2013;  
в окончательном варианте — 14/VI/2013.

## GENERALIZED $\delta$ -DERIVATIONS

© 2013 I.B. Kaygorodov<sup>3</sup>

In the paper the questions devoted to generalization of notion of  $\delta$ -derivation on non-associative algebras. Apart from that new examples of non-trivial  $\delta$ -derivations for Lie algebras were constructed.

**Key words:**  $\delta$ -derivation, Lie algebra, alternative algebra, Jordan superalgebra, Lie superalgebra.

Paper received 14/VI/2013.

Paper accepted 14/VI/2013.

---

<sup>3</sup>Kaygorodov Ivan Borisovich ([kib@math.nsc.ru](mailto:kib@math.nsc.ru)), Laboratory of Ring Theory, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090, Russian Federation.