УДК 517.9

О ЧИСЛЕННОЙ ОЦЕНКЕ ПРЕДЕЛОВ МАКСИМАЛЬНЫХ СРЕДНИХ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2013 А.Н. Лепилов[1]

Предложена схема определения погрешности численного метода вычисления предела максимального среднего для периодической функции. Рассмотрен пример вычисления предела максимального среднего.

Ключевые слова: предел максимального среднего, дифференциальное включение, периодическая функция.

Введение

Данная работа посвящена практической реализации численного метода вычисления пределов максимальных средних, предложенного в [1], и по существу является ее продолжением. Под практической реализацией имеется в виду как непосредственное вычисление значения численным методом, так и оценка погрешности этого вычисления.

1. Основные понятия

Будем говорить, что функция f содержится в классе функций $\mathcal{F}$, если $f : D \to \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, $(t, y) \to f(t, y)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$; T-периодическая по любой переменной $t, y_1, \ldots, y_m$; $f \in \mathrm{C}^4(D, \mathbb{R})$.

Для функции $f \in \mathcal{F}$ рассмотрим предел максимального среднего

$$M_f = \lim_{\Delta \to \infty} \sup_{\gamma} \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} f(t, \gamma(t))\, dt, \qquad (1)$$

где точная верхняя грань вычисляется по всем решениям дифференциального включения

$$\dot{\gamma} \in G, \qquad \gamma(t_0) = y_0, \qquad (2)$$

$G = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_m, b_m] \subset \mathbb{R}^m$ — параллелепипед, $0 < a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Множество решений задачи (2) в смысле Каратеодори, определенных на промежутке $[t_0, \infty)$, обозначим $\Gamma(t_0, y_0)$.

[1]Лепилов Александр Николаевич (lepilov_aleksand@mail.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Предел максимального среднего (1) существует и не зависит от начальных условий, то есть можно считать $t_0 = 0$, более того, существует и оптимальное решение задач (1), (2) [2, теорема 1].

Рассмотрим также максимальное среднее на отрезке $[0, \Delta]$

$$M_f^{\Delta} = \sup_{y_0 \in K} \sup_{\gamma \in \Gamma(0, y_0)} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} f(t, \gamma(t))\, dt, \tag{3}$$

где $K = K(0, T),\ K(y_0, T) = [y_{01}, y_{01} + T] \times \ldots \times [y_{0m}, y_{0m} + T] \subset \mathbb{R}^m$ — куб.

Задача вычисления предела максимального среднего (1) с заданной точностью может быть заменена задачей вычисления максимального среднего (3). При этом справедлива оценка предела максимального среднего (1) [2, теорема 2]

$$M_f^{\Delta} - \varepsilon_n \leqslant M_f \leqslant M_f^{\Delta}.$$

Здесь $\varepsilon(n) = 2\tau_0 C_f / \Delta,\ \Delta = nT,\ n \in \mathbb{Z}$, постоянная $C_f > 0$ такая, что $f(t, y) \leqslant C_f$ для любых $(t, y) \in D,\ n \geqslant \tau_0 / T,\ \tau_0 > 0$ такое, что $\tau_0 G$ содержит некоторый куб $K(z_0, T),\ z_0 \in \mathbb{R}^m$ зависит от $\tau_0,\ \tau_0 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \{T / (b_i - a_i)\}$.

Таким образом, сосредоточимся на определении максимального среднего (3), которое произведем численно.

2. Численный метод и нахождение погрешности

Зафиксируем $\Delta = nT$. Обозначим $\Gamma^{\Delta}(0, y_0)$ как сужение множества всех решений $\Gamma(0, y_0)$ на отрезок $[0, \Delta]$. Решение задачи (3) существует [2], то есть существует оптимальная пара $(y_0^{\max}, \gamma^{\max}(t)),\ y_0^{\max} \in K,\ \gamma^{\max}(t) \in \Gamma^{\Delta}(0, y_0^{\max})$, при которой достигается M_f^{Δ}.

Оптимальное решение задачи (3) будем находить по принципу максимума Понтрягина [3], решая следующую задачу Коши на отрезке $[0, \Delta]$:

$$\begin{aligned} &\dot{p}_j = -\frac{\partial}{\partial \gamma_j} f(t, \gamma), && p_j(\Delta) = 0, \\ &\dot{\gamma}_j = \begin{cases} a_j, & \text{если } p_j < 0, \\ b_j, & \text{если } p_j > 0, \end{cases} && \gamma_j(\Delta) = y_{j\Delta}, \quad j = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{4}$$

Для численного решения задач (3), (4) введем на отрезке $[0, \Delta]$ равномерную сетку $\Lambda_\tau = \{t_0, t_1, \ldots, t_Q\}$ с шагом $\tau = \Delta / Q,\ Q \in \mathbb{Z},\ \Delta = t_0 > t_1 > \ldots > t_Q = 0$. Начальное условие y_Δ в (4) в силу T-периодичности функции f будем брать из куба K, на котором также введем равномерную сетку $\Omega_h \subset K$ с шагом $h > 0$ по каждой из координат.

Приближенное решение задачи (3) будем искать методом перебора. Для каждого значения $y_\Delta \in \Omega_h$ находим решение задачи (4) и соответствующее значение среднего [1]. Выбирая среди всех полученных средних максимальное, принимаем его за приближенное значение максимального среднего (3). Обозначим его S_f^{Δ}.

Пусть $\delta > 0$ и множество $A_\delta = \{t \in [0, \Delta] : \exists j,\ 1 \leqslant j \leqslant m$, такое, что $|p_j(t, \gamma(t))| \leqslant \delta\}$.

Сформулируем условие, накладываемое на функцию f.

Условие 1. $\exists$ целое N, $\forall\ \delta > 0$ и $\forall\, \gamma(t) \in \Gamma^{\Delta}(0, y_0)$ $\exists\ \varkappa : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\varkappa(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ такая, что существует конечная система интервалов $(c_i, d_i),\ i = 1, \ldots, N_1$, $N_1 \leqslant N,\ \sum\limits_{i=1}^{N_1} (d_i - c_i) \leqslant \varkappa(\delta)$, покрывающая множество A_δ.

Приведем теорему об оценке погрешности приближенного вычисления предела максимального среднего M_f. Предполагаем, что $\gamma^{\max}(t)$ в момент времени $t=\Delta$ отстоит от численно найденного решения по каждой из координат по модулю не более, чем на h.

Теорема 1 [1]. Пусть функция $f \in \mathcal{F}$, и выполнено условие 1. Тогда имеет место следующая оценка:

$$|M_f - S_f^{\Delta}| \leqslant \varepsilon_1(n) + \varepsilon_2(\tau) + \varepsilon_3(\varkappa(\delta), h),$$

где $\varepsilon_1(n) = 2\tau_0 C_f/(nT)$ – теоретическая погрешность; $\varepsilon_2(\tau)$ – погрешность интегрирования (например, для метода Симпсона [4] $\varepsilon_2(\tau) = \tau^4 C_4/2880$, C_4 – постоянная, зависит от функции f); $\varepsilon_3(\varkappa, h) = L(h\sqrt{m} + U\varkappa(\delta))$ – погрешность, обусловленная введением сеток, $U = (\sum\limits_{i=1}^{m}(b_i-a_i)^2)^{1/2}$, $L = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \max\limits_{\gamma_i\in[0,T]} |f'_{\gamma_i}(t,\gamma)|$.

Пусть для заданных сеток Λ_τ и Ω_h методом перебора найдено численное решение задачи (4) $\gamma^s(t) = (\gamma_1^s(t),\ldots,\gamma_m^s(t))$, $\gamma^s(\Delta) = y_\Delta^s$), при котором достигается S_f^Δ, и $p^s(t,\gamma^s(t)) = (p_1^s(t,\gamma^s(t)),\ldots,p_m^s(t,\gamma^s(t)))$ и определены t_{ij}^s — точки переключения скорости изменения переменной $\gamma^s(t)$, $i=1,\ldots,N_{1j}$, $j=1,\ldots,m$.

Для вычисления $\varepsilon_3(\varkappa(\delta),h)$ из теоремы 1 необходимо определить промежутки (c_i,d_i), $i=1,\ldots,N_1$, на которых $|p_j^s(t,\gamma^s(t))| < \delta$, $j=1,\ldots,m$. Для нахождения промежутков (c_i,d_i), $i=1,\ldots,N_1$ нам нужно задать δ и по нему их определять. Естественно считать, что $\delta \geqslant \delta_0$, где

$$\delta_0 = \max_{1\leqslant j\leqslant m}\max_{t\in\Lambda_\tau}\left|p_j^{\max}(t,\gamma^{\max}(t)) - p_j^s(t,\gamma^s(t))\right|,$$

$p^{\max}(t,\gamma^{\max}(t)) = (p_1^{\max}(t,\gamma^{\max}(t)),\ldots,p_m^{\max}(t,\gamma^{\max}(t))$ – решение задачи (4), отвечающее оптимальной паре $(y_0^{\max},\gamma^{\max}(t))$, при которой достигается M_f^Δ.

Пусть множество $A_\delta^s = \{t\in\Lambda_\tau : \exists j,\ 1\leqslant j\leqslant m$, такое, что $|p_j^s(t,\gamma^s(t))| \leqslant \delta\}$, где $\delta > 0$.

На практике функцию $\varkappa(\delta)$ из условия 1 достаточно определить на отрезке $[\delta_0,\delta_1]$, где $0<\delta_0\leqslant\delta_1$. Поэтому сформулируем следующее условие, которое удобно проверять в процессе вычисления.

Условие 2. $\exists\ \delta_1 > \delta_0$, $\forall\ \delta\in[\delta_0,\delta_1]$, $\forall\ j\ (j=1,\ldots,m)$, для $\gamma^s(t)$ и заданного $v>0$ должно выполняться одно из условий при $t\in A_\delta^s$:
либо $\dot p = -\partial f(t,\gamma^s(t))/\partial\gamma_j \geqslant v$, либо $\dot p = -\partial f(t,\gamma^s(t))/\partial\gamma_j \leqslant -v$.

Обзначим $A_{\delta,v} = \bigcup\limits_{j=1}^{m}\bigcup\limits_{i=1}^{N_{1j}}[t_{ij}^s - 2\delta/v, t_{ij}^s + 2\delta/v]$, $\mu(A_{\delta,v})$ – мера Лебега множества $A_{\delta,v}$.

Теорема 2. Пусть $f\in\mathcal{F}$, и выполнено условие 2. Тогда в качестве сужения функции $\varkappa(\delta)$ из условия 1 на отрезок $[\delta_0,\delta_1]$ можно взять функцию

$$\varkappa(\delta) = \mu(A_{\delta,v}), \qquad \delta\in[\delta_0,\delta_1],$$

в частности, для одномерной задачи (при $m=1$)

$$\varkappa(\delta) = 2N_1\delta/v.$$

Доказательство. Рассмотрим в плоскости $0tp_j$ соответствующую j-ю составляющую $p_j^s(t,\gamma^s(t))$ (с N_{1j} точками переключений) решения $p^s(t,\gamma^s(t))$. Пусть выполняется условие 2, т. е. траектория $p_j^s(t,\gamma^s(t))$ пересекает ось времени $0t$ для $t\in A_\delta^s$ со скоростью, имеющей постоянный знак и по модулю больше или равной v_j. Оценим для этой составляющей из условия 1 промежутки (c_{ij},d_{ij}) и $\varkappa_j(\delta)$. Для этого рассмотрим i-ю точку переключения t_{ij}^s, $t_{ij}^s \in [c_{ij}, d_{ij}]$, решения $p_j^s(t, \gamma^s(t))$. Длина отрезков $[t_{ij}^s, d_{ij}]$ и $[c_{ij}, t_{ij}^s]$ оценивается сверху следующим образом:

$$d_{ij} - t_{ij}^s \leqslant \frac{\delta_{ij}}{v_{ij}}, \qquad t_{ij}^s - c_{ij} \leqslant \frac{\delta_{ij}}{v_{ij}}, \qquad v_{ij} \leqslant \min_{t \in [c_{ij}, d_{ij}]} \{\dot{p}_j(t, \gamma^s(t))\}.$$

Отсюда

$$d_{ij} - c_{ij} \leqslant 2\delta_{ij}/v_{ij}, \qquad [c_{ij}, d_{ij}] \subseteq [t_{ij}^s - 2\delta_{ij}/v_{ij}, t_{ij}^s + 2\delta_{ij}/v_{ij}].$$

Тогда $\varkappa_j(\delta)$ для j-той координаты

$$\sum_{i=1}^{N_{1j}} \frac{2\delta_{ij}}{v_{ij}} \leqslant 2N_{1j} \frac{\delta_j}{v_j} = \varkappa_j(\delta),$$

причем $\delta_j \geqslant \max_i \{\delta_{ij}\}$, $\min_i \{v_{ij}\} \geqslant v_j > 0$, $1 \leqslant i \leqslant N_{1j}$.

Объединяя все интервалы $[t_{ij}^s - 2\delta_{ij}/v_{ij}, t_{ij}^s + 2\delta_{ij}/v_{ij}]$ для всех j координат, получаем множество $A_{\delta,v}$.

Таким образом, если $\delta \geqslant \max_j \{\delta_j\}$, $v \leqslant \min_j \{v_j\}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, то можно взять $\varkappa(\delta) = \mu(A_{\delta,v})$. Для одномерного случая получается более простое выражение $\varkappa(\delta) = 2N_1\delta/v$. Теорема доказана.

Для использования результатов теоремы 2 необходимо численно проверять условие 2.

Оценим δ_1. Напомним, решается задача от момента времени $t = \Delta$ к $t = 0$.

На первом промежутке $[t_{1j}^s, \Delta]$ определяется величина δ_{1j} для решения $p_j^s(t)$ по формуле

$$\delta_{1j} = \max_{t \in [t_{1j}^s, \Delta] \cap \Lambda_\tau} \left| p_j^{\max}(t, \gamma^{\max}(t)) - p_j^s(t, \gamma^s(t)) \right|,$$

при условиях $|\gamma_j^s(\Delta) - \gamma_j^{\max}(\Delta)| \leqslant h$, $\dot{\gamma}_j^s(t) = \dot{\gamma}_j^{\max}(t)$ (т. е. она состоит из погрешности выбора начального условия и погрешности выбранного метода интегрирования в задаче (4)). При прохождении $p_j^s(t)$ через δ_{1j}-окрестность оси $p_j = 0$ в плоскости $0tp_j$ проверяется выполнение условия 2. Если оно выполняется, то определяем оценочный промежуток $[c_{1j}^s, d_{1j}^s]$, равный $[t_{1j}^s - 2\delta_{1j}/v_{1j}, t_{1j}^s + 2\delta_{1j}/v_{1j}]$, для которого выполняется $[c_{1j}, d_{1j}] \subseteq [c_{1j}^s, d_{1j}^s]$. Далее находим, насколько максимально разойдутся численное $\gamma_j^s(t)$ и оптимальное $\gamma_j^{\max}(t)$ при прохождении через отрезок $[c_{1j}^s, d_{1j}^s]$, учитывая, что на данном промежутке скорости будут максимально отличаться, и в момент $t = c_{1j}^s$ разница достигнет $h_1 = h + (a_j - b_j)(d_{1j}^s - c_{1j}^s)$ или $h_1 = h - (a_j - b_j)(d_{1j}^s - c_{1j}^s)$.

На следующем промежутке $[t_{2j}^s, c_{1j}^s]$ ищется величина δ_{2j}, исходя из того, что $|\gamma_j^s(c_{1j}^s) - \gamma_j^{\max}(c_{1j}^s)| \leqslant h_1$, и учитывается погрешность интегрирования. Проверяется условие 2. В случае его выполнения определяем оценочный отрезок $[c_{2j}^s, d_{2j}^s] = [t_{2j}^s - 2\delta_{2j}/v_{2j}, t_{2j}^s + 2\delta_{2j}/v_{2j}]$, содержащий $[c_{2j}, d_{2j}]$, и затем находим, насколько разойдутся решения задачи (2) при прохождении через $[c_{2j}^s, d_{2j}^s]$, учитывая, что на нем скорости будут максимально отличаться, разница при $t = c_{2j}^s$ достигнет h_2, равное $h_1 - (a_j - b_j)(d_{2j}^s - c_{2j}^s)$ или $h + (a_j - b_j)(d_{2j}^s - c_{2j}^s)$.

На промежутке $[t_{ij}^s, c_{i-1j}^s]$ определяем δ_{ij}, исходя из того, что $|\gamma_j^s(c_{i-1j}^s) - \gamma_j^{\max}(c_{i-1j}^s)| \leqslant h_{i-1}$, где $h_{i-1} = h_{i-2} + (a_j - b_j)(d_{i-1j}^s - c_{i-1j}^s)$ или $h_{i-1} = h_{i-2} - (a_j - b_j)(d_{i-1j}^s - c_{i-1j}^s)$, и плюс погрешность интегрирования. Проверяется условие 2. При его выполнении находится промежуток $[c_{ij}^s, d_{ij}^s] = [t_{ij}^s - 2\delta_{ij}/v_{ij}, t_{ij}^s + 2\delta_{ij}/v_{ij}]$. Потом определяем, насколько могут разойтись решения задачи (2) при прохождении через $[c_{ij}^s, d_{ij}^s]$.

Таким образом определяем все δ_{ij} до момента времени $t = 0$ для всех координат $j = 1, \dots, m$. Положим $\delta_1 = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N_{1j}} \{\delta_{ij}\}$. Очевидно, $\delta_1 \geqslant \delta_0$.

Теперь рассмотрим предложенный метод вычисления предела максимального среднего на конкретном примере. Пусть $f(t, \gamma(t)) = \sin \gamma(t)$. Требуется оценить предел максимального среднего

$$M_{\sin} = \lim_{\Delta \to \infty} \sup_{\gamma} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} \sin \gamma(t)\, dt, \quad \dot{\gamma} \in [\omega_1, \omega_2], \quad \gamma(0) = y_0. \tag{5}$$

Для решения строим максимальное среднее (3)

$$M^{\Delta}_{\sin} = \sup_{y_0 \in [0, 2\pi]} \sup_{\gamma} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} \sin \gamma(t)\, dt \tag{6}$$

и задачу Коши (4) на $[0, \Delta]$

$$\begin{array}{ll} \dot{p} = -\cos \gamma(t), & p(\Delta) = 0, \\ \dot{\gamma}_j = \begin{cases} \omega_1, & \text{при } p < 0, \\ \omega_2, & \text{при } p \geqslant 0, \end{cases} & \gamma(\Delta) = y_{\Delta}. \end{array} \tag{7}$$

В среде Delphi разработана программа по вычислению значения $S^{\Delta}_{\sin}$, реализующая предложенный численный метод решения задач (6) и (7). Приведем некоторые результаты вычисления $S^{\Delta}_{\sin}$ для $[\omega_1, \omega_2] = [0,5, 2]$, $T = 2\pi$: $h = T/10^4$, $\Delta = 2T$, $\tau = \Delta/(2 \cdot 10^5)$, $y_{\Delta} = 464 \cdot 2\pi/10^3$, $S^{\Delta}_{\sin} = 0,543076$; $h = T/10^3$, $\Delta = 20T$, $\tau = \Delta/(2 \times \times 10^6)$, $y_{\Delta} = 440 \cdot 2\pi/10^3$, $S^{\Delta}_{\sin} = 0,428766$; $h = T/10^3$, $\Delta = 200T$, $\tau = \Delta/(2 \cdot 10^7)$, $y_{\Delta} = 433 \cdot 2\pi/10^3$, $S^{\Delta}_{\sin} = 0,4168015$. Для сравнения, значение $M_{\sin}$, вычисленное итерационным методом [5], равно $0,4151$ с точностью 10^{-4}.

Приведем оценку погрешности ε_3 из теоремы 1 (для простоты только для случая $\Delta = 2T$), полученной по указанной схеме. Вычисления дают следующий результат: $\varepsilon_3(\varkappa(\delta), h) = 0,019983$, где (по теореме 2) $\delta = 0,0032$, $N_1 = 2$, $v = 0,99211$, $\varkappa(\delta) = 0,0128$.

Литература

[1] Лепилов А.Н. Численный метод вычисления пределов максимальных средних для периодических функций // Вестник СамГУ. 2011. № 8. С. 45–49.

[2] Филатов О.П. Вычисление пределов максимальных средних для периодических функций // Вестник СамГУ. 2011. № 2. С. 75–79.

[3] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2007. 408 с.

[4] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.

[5] Кайракбаев А.К., Филатов О.П. Итерационный метод вычисления пределов максимальных средних // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38. № 10. С. 1661–1664.

Поступила в редакцию 18/XI/2013;
в окончательном варианте — 18/XI/2013.

ON NUMERICAL ESTIMATE OF LIMITS OF MAXIMAL MEAN FOR PERIODIC FUNCTIONS

 A.N. Lepilov[2]

The scheme of definition of an error of numerical method of calculation of limit of maximal mean for periodic function is offered. The example of calculation of limit of maximal mean is considered.

Key words: limit of maximal mean, differential inclusion, periodic function.

Paper received 18/*XI*/2013.
Paper accepted 18/*XI*/2013.

[2]Lepilov Alexander Nikolaevich (`lepilov_aleksand@mail.ru`), the Dept. of Mathematics and Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.