УДК 517.95

ОБ ОЦЕНКЕ РАЗМЕРА ЗОНЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ НОСИТЕЛЯ РЕШЕНИЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1]

© 2013 С.В. Пикулин[2]

В данной работе уточняется оценка размера зоны локализации носителя решения задачи Дирихле для полулинейного эллиптического уравнения с измеримыми коэффициентами при росте константы, ограничивающей решение на границе области.

Ключевые слова: свободная граница, мертвая зона, локализация носителя решения, полулинейное эллиптическое уравнение, задача Дирихле, обобщенное решение.

Введение

Эффект "мертвой зоны" заключается в том, что решение дифференциального уравнения обращается в нуль на некотором непустом открытом подмножестве области определения. Например, для обыкновенного дифференциального уравнения $u'' - u^\sigma = 0$, $\sigma \in (0,1)$ "мертвая зона" его решения

$$u(t) = \begin{cases} C\, t^{\frac{2}{1-\sigma}}, & \text{если } t > 0, \qquad \text{где } C = \left(\frac{2\,(1+\sigma)}{(1-\sigma)^2}\right)^{-\frac{1}{1-\sigma}} > 0, \\ 0, & \text{если } t \leqslant 0 \end{cases}$$

есть луч $\{t \leqslant 0\}$. Решение полулинейного эллиптического уравнения вида

$$\Delta u - u^\sigma = 0 \tag{1}$$

может иметь "мертвую зону" при $\sigma \in (0,1)$, тогда как при $\sigma \geqslant 1$ выполняется так называемый сильный принцип максимума [1; 2]: решение, равное нулю на непустом открытом множестве, должно быть тождественно нулевым.

Вопрос о наличии "мертвых зон" у решений полулинейных эллиптических и параболических уравнений представляет не только теоретический интерес, но мотивирован также приложениями к химической технологии [3; 4], биологии, физике. Краткий обзор таких приложений со ссылками на литературу можно найти в книге [5]. Изучению условий возникновения "мертвых зон", описанию геометрических свойств их границ, оценкам размеров зоны локализации носителя решения посвящено немало литературы. Отметим монографии [5–7], работы [2; 8; 9], а также

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00923) и программы № 3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

[2]Пикулин Сергей Владимирович (spikulin@gmail.com), сектор аналитико-численных методов, ВЦ РАН, 119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Вавилова, 40.

статьи [10–13], в которых изучались полулинейные эллиптические уравнения и неравенства с измеримыми коэффициентами.

В данной работе расматривается задача Дирихле для полулинейного уравнения вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - a(x)\, |u|^{\sigma-1}\, u = 0 \tag{2}$$

в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Коэффициент $a(x)$ — измеримая функция в Ω, причем $a(x) \geqslant a_0 = \mathrm{const} > 0$, функции $a_{ij} \equiv a_{ji} \in L_\infty(\Omega)$ удовлетворяют условию равномерной эллиптичности: для некоторого $\lambda \geqslant 1$ (*константы эллиптичности*) и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\lambda^{-1}\, |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \leqslant \lambda\, |\xi|^2. \tag{3}$$

Известно [5], что если оператором в главной части уравнения (2) является лапласиан, то носитель решения сосредоточен в окрестности границы, размер R которой пропорционален степени константы M, ограничивающей по модулю решение на границе области

$$R \leqslant c\, M^{(1-\sigma)/2}. \tag{4}$$

В этом случае носитель решения, определенного во внешности компакта и ограниченного сверху, имеет конечные размеры в $\mathbb{R}^n$, то есть верен *принцип компактности носителя.* Выполнение этого принципа для определенного класса квазилинейных эллиптических уравнений показано в работе [2], в [13] рассмотрены условия выполнения принципа компактности для некоторых полулинейных эллиптических неравенств с измеримыми коэффициентами.

Теорема 1 настоящей работы утверждает справедливость оценки вида (4) размера носителя решения для общего случая дивергентного равномерно эллиптического оператора с измеримыми коэффициентами в главной части уравнения. Этот результат фактически был установлен, хотя и не сформулирован явно, в работе [14]. Основной результат настоящей работы (теорема 2) гласит, что показатель степени, с которой M входит в оценку размера носителя, может быть уменьшен до $(1-\sigma)/\big(n-(n-2)\,\sigma\big)$ при достаточно больших M и $n \geqslant 3$. Ключевую роль в рассуждениях играют результаты работ [14; 15]. Отметим, что применение аналогичных методов для уравнения (2) при $\sigma > 1$ позволило получить теоремы типа осреднения [16]. Результаты данной работы анонсированы в [17].

Основные обозначения:
Ω — область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$;
$\mathrm{mes}\, Q$ — мера Лебега множества $Q \subset \mathbb{R}^n$;
$L \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$ — линейный равномерно эллиптический оператор с измеримыми коэффициентами;
$B(x_0, R)$ — шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в x_0 радиуса R;
$W_2^1(\Omega)$ — пространство Соболева, состоящее из функций класса $L_2(\Omega)$, которые обладают обобщенными частными производными также из $L_2(\Omega)$, снабженное нормой $\|\cdot\,;\, W_2^1(\Omega)\|$:

$$\|u\,;\, W_2^1(\Omega)\|^2 \equiv \|u\,;\, L_2(\Omega)\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \|\partial u/\partial x_i\,;\, L_2(\Omega)\|^2. \tag{5}$$

$\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\,; W_2^1(\Omega)\|$;
$W_{2,loc}^1(\Omega)$ — пространство таких функций u в Ω, что $(u|_Q) \in W_2^1(Q)$ для любой ограниченной подобласти $Q \subset \Omega$.

1. Задача Дирихле в ограниченной области

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, — ограниченная область, удовлетворяющая следующему условию регулярности границы *(условие* **(A)**, *[18]): существуют числа* $r_0 > 0$, $\theta_0 \in (0,1)$ *такие, что для любой точки* $x_0 \in \partial\Omega$ *и* $r \in (0, r_0)$ *справедливо соотношение* $\operatorname{mes}\big(\Omega \cap B(x_0,r)\big) \leqslant \theta_0 \operatorname{mes} B(x_0,r)$. Данному условию удовлетворяют, в частности, все ограниченные липшицевы области.

Рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{cases} Lu - a(x)\,|u|^{\sigma-1}\,u = 0 & \text{в} \quad \Omega, \\ u = \varphi & \text{на} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

для уравнения вида (2), где $\varphi \in W_2^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, $\sigma \in (0,1)$, и выполняются указанные выше условия на коэффициенты $a(x), a_{ij}(x)$.

Определение 1. *Функция $u \in W_2^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ называется (обобщенным) решением задачи (6), если справедливо включение $(u-\varphi) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и для любой функции $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется равенство*

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\,dx + \int_\Omega a(x)\,|u|^{\sigma-1} u\,\psi\,dx = 0. \tag{7}$$

Известно [18], что обобщенное решение задачи (6) существует, единственно, непрерывно по Гельдеру внутри Ω и удовлетворяет (слабому) принципу максимума.

Пусть $\Gamma \subset \partial\Omega$ — такое замкнутое множество, что $\varphi = 0$ на $\partial\Omega \setminus \Gamma$ и $|\varphi| \leqslant M = \mathrm{const}$ на Γ. Это означает, что функция φ может быть аппроксимирована в норме пространства $W_2^1(\Omega)$ функциями из класса $C^\infty(\Omega)$, равными нулю в окрестности $\partial\Omega \setminus \Gamma$ и ограниченными по модулю числом M.

Теорема 1. *Существует константа $c_1 > 0$, зависящая только от n, σ, λ, a_0, такая, что $u = 0$ в Ω_0, где*

$$\Omega_0 := \left\{ x \in \Omega : \operatorname{dist}(x,\Gamma) > c_1\, M^{\frac{1-\sigma}{2}} \right\}. \tag{8}$$

Справедливость теоремы 1 вытекает из следующего результата.

Теорема 1′ ([14]). *Пусть $u \in W_2^1(Q) \cap L_\infty(Q)$ — обобщенное решение уравнения (2) в области $Q \subset B(x_0,r)$ при $\sigma \in (0,1)$, удовлетворяющее условию $u = 0$ на $\partial Q \cap B(x_0,r)$. Существует такое число $c_1' > 0$, зависящее только от n, σ, λ и a_0, что если $|u| \leqslant c_1'\, r^{\frac{2}{1-\sigma}}$ на ∂Q, то $u(x_0) = 0$.*

Замечание. *Доказательство [14] теоремы 1′ основано на аппроксимации обобщенного решения из класса $W_2^1(\Omega)$ решениями уравнений с гладкими коэффициентами. Выполнение условия (A) является достаточным для того, чтобы последовательность приближенных решений сходилась равномерно в Ω.*

Доказательство теоремы 1. В силу принципа максимума $|u(x)| \leqslant M$ при $x \in \Omega$. Положим

$$R := (M/c_1')^{\frac{1-\sigma}{2}} \equiv c_1 \, M^{\frac{1-\sigma}{2}},$$

где $c_1 = {c_1'}^{-\frac{2}{1-\sigma}}$, c_1' — то же, что в теореме $1'$.

Пусть $x_0 \in \Omega$ — такая точка, что $\operatorname{dist}(x_0, \Gamma) > R$. Тогда к компоненте связности Q множества $(B(x_0, R) \cap \Omega)$, содержащей x_0, применима теорема $1'$. Следовательно, $u(x_0) = 0$. Теорема доказана.

2. Принцип компактности и размер носителя

Рассмотрим область (возможно, неограниченную) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, удовлетворяющую условию (A). Решение $u \in W^1_{2,loc}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ задачи (6) в этом случае определяется так же, как и для ограниченной области (определение 1). Сохраним предположения предыдущего пункта: для замкнутого подмножества $\Gamma \subset \partial\Omega$ выполняются соотношения

$$|\varphi| \leqslant M \ \text{ на } \Gamma, \qquad \varphi = 0 \ \text{ на } \partial\Omega \setminus \Gamma. \tag{9}$$

Если участок Γ конечен, то из теоремы 1 следует, что носитель ограниченного решения компактен, и размер этого носителя есть величина порядка $\mathrm{O}\left(M^{(1-\sigma)/2}\right)$ при $M \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область (возможно, неограниченная), $n \geqslant 3$, $u \in W^1_{2,loc}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ — решение задачи (6), выполнены соотношения (9), причем $\Gamma \subset B(0, d)$, $d > 0$.*

Тогда существует такое число $c_2 > 0$, зависящее только от n, σ, λ, a_0, что $(\operatorname{supp} u) \subset B(0, R)$, где

$$R = \max\left\{\alpha \, d \, ; \, c_2 \, d^{1/\alpha} \, M^\gamma\right\},$$

$$\gamma = \frac{1-\sigma}{n-(n-2)\,\sigma} < \frac{1-\sigma}{2}, \qquad \alpha = \frac{1}{(n-2)\,\gamma} > 1.$$

Для доказательства теоремы потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Принцип максимума [15; 18]. *Пусть $u \in W^1_2(\Omega)$ удовлетворяет условиям $Lu \geqslant 0$ в Ω, $u \leqslant 0$ на $\partial\Omega$. Тогда $u \leqslant 0$ в Ω.*

Лемма 1. *В условиях теоремы 2 справедлива оценка*

$$|u(x)| \leqslant \beta \, M \, (|x|/d)^{2-n}, \quad x \in \Omega \setminus B(0, d),$$

где $\beta = \mathrm{const} \geqslant 1$ зависит только от n и λ.

Доказательство. Согласно [15], существует положительное фундаментальное решение $G(x; y)$ оператора L с особенностью в точке $y \in \Omega$, причем для некоторого $\beta_1 \geqslant 1$, зависящего только от n, λ, выполняются оценки

$$\beta_1^{-1} \, |x-y|^{2-n} \leqslant G(x; y) \leqslant \beta_1 \, |x-y|^{2-n}, \quad x \in \Omega.$$

Зафиксируем произвольное число $\rho \geqslant d$. Положим

$$\Omega(\rho) := \Omega \setminus \overline{B(0, \rho)}, \qquad \beta := \beta_1^2, \qquad M_1 = M_1(\rho) := \beta \, M \, (\rho/d)^{2-n}.$$

Покажем, что

$$|u(x)| \leqslant M_1 \ \text{ при } x \in \Omega(\rho). \tag{10}$$

Предположим противное: пусть $x_0 \in \Omega(\rho)$ — такая точка, что $|u(x_0)| > M_1$. Без ограничения общности можно считать, что

$$u(x_0) > M_1, \tag{11}$$

поскольку функция $(-u)$ является решением уравнения и удовлетворяет условиям (9).

Положим $g(x) := G(x;0)$. Пользуясь монотонным убыванием функции r^{2-n} при $r>0$, получим

$$g(x_0) \leqslant \beta_1\, \rho^{2-n}, \tag{12}$$
$$g(x) \geqslant \beta_1^{-1}\, d^{2-n}, \quad x \in \partial B(0,d). \tag{13}$$

Положим

$$h(x) := M_1 \frac{g(x)}{g(x_0)} > 0, \quad x \in \Omega(d). \tag{14}$$

Из (12), (13), с учетом (10) получаем

$$h(x) > M_1\, \beta_1^{-2}\, d^{2-n}/\rho^{2-n} = M \ \text{ при } \ x \in \partial B(0,d), \tag{15}$$
$$h(x_0) = M_1 > 0. \tag{16}$$

Положим $v(x) := u(x) - h(x)$. Из (14)—(16) и (9) следует, что

$$v < 0 \quad \text{ на } \partial\Omega(d), \tag{17}$$
$$v(x_0) = u(x_0) - M_1 > 0.$$

Пусть D — компонента связности множества $\{x \in \Omega : v(x) > 0\}$, содержащая x_0. Пользуясь тем, что $Lh = 0$ в D, $u(x) > h(x) > 0$ при $x \in D$, покажем, что $Lv > 0$ в D:

$$Lv = Lu = u^\sigma > 0 \ \text{ в } \ D. \tag{18}$$

Из (17) следует, что $v \leqslant 0$ на ∂D. С учетом (18) это противоречит принципу максимума для функции v в D. Следовательно, предположение (11) неверно, что доказывает (10). Лемма доказана.

Лемма 2. *Минимальное значение функции* $f(\rho) = \rho + \epsilon\,(\rho/d)^{-k}$ *на луче* $\{\rho : \rho \geqslant d > 0\}$, *где* $\epsilon, d, k > 0$ — *константы, равно*

$$f_{\min} = \begin{cases} \left(1 + k^{-1}\right)\, (\epsilon\, k)^{\frac{1}{k+1}}\, d^{\frac{k}{k+1}}, & \text{если } d \leqslant (\epsilon\, k), \\ d + \epsilon, & \text{если } d > (\epsilon\, k). \end{cases}$$

Доказательство. Вычислим и приравняем нулю производную $f(\rho)$:

$$f'(\rho) = 1 - \epsilon\, k\, (\rho/d)^{-k-1}/d, \qquad 1 = \epsilon\, k\, (\rho_0/d)^{-k-1}/d,$$
$$\rho_0/d = (d/\epsilon k)^{-\frac{1}{k+1}}\,. \tag{19}$$

Найдем значение $f(x)$ в точке экстремума:

$$f(\rho_0) = d\, (d/\epsilon k)^{-\frac{1}{k+1}} + \epsilon\, (d/\epsilon k)^{\frac{k}{k+1}} = \epsilon^{\frac{1}{k+1}}\, d^{\frac{k}{k+1}} \left(k^{\frac{1}{k+1}} + k^{-\frac{k}{k+1}}\right). \tag{20}$$

Если $\rho_0 \geqslant d$, то $f_{\min} = f(\rho_0)$, в противном случае $f_{\min} = f(d) = d + \epsilon$. Условие $\rho_0 \geqslant d$ в силу (19) эквивалентно $d \leqslant (\epsilon\, k)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\rho \geqslant d$. Согласно лемме 1, справедливо неравенство

$$|u(x)| \leqslant \beta\, M\, (\rho/d)^{2-n} \quad \text{при} \quad x \in \Omega(\rho).$$

Применяя теорему 1 к решению $u(x)$ в $\Omega(\rho)$, найдем, что $u = 0$ на множестве $\Omega\left(R(\rho)\right)$, где

$$R(\rho) = \rho + c_1 \left(\beta\, M\, \left(\frac{\rho}{d}\right)^{2-n}\right)^{\frac{1-\sigma}{2}}.$$

Минимизируем функцию $R = R(\rho)$ на луче $\{\rho : \rho \geqslant d\}$ с помощью леммы 2 при следующих значениях параметров:

$$k = \frac{(n-2)(1-\sigma)}{2}, \quad \epsilon = c_1\, (\beta\, M)^{\frac{1-\sigma}{2}}.$$

Предположим, $(\epsilon\, k) \geqslant d$. Минимум функции $R(\rho)$ достигается в этом случае при $\rho > d$:

$$R_{\min} = \left(1 + k^{-1}\right)\, (\epsilon\, k)^{\frac{1}{k+1}}\, d^{\frac{k}{k+1}} = \alpha\, (\epsilon\, k)^{\frac{2\gamma}{1-\sigma}}\, d^{1/\alpha} = c_2\, M^{\gamma}\, d^{1/\alpha},$$

где $c_2 = \alpha\, \beta^{\gamma}\, (c_1\, k)^{\frac{2\gamma}{1-\sigma}}$. При $(\epsilon\, k) < d$ имеем $R_{\min} = d + \epsilon < d\,(1 + k^{-1}) = \alpha\, d$. Теорема доказана.

Литература

[1] Vázquez J.L. A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations // Appl Math Optim. 1984. V. 12. № 3. P. 191–202.

[2] Pucci P., Serrin J. The strong maximum principle revisited // J. Differential Equations. 2004. V. 196. P. 1–66.

[3] Aris R. The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts. Oxford: Carledon Press, 1975.

[4] Bandle C., Sperb R. P., Stakgold I. Diffusion and reaction with monotone kinetics // Nonlinear Anal. 1984. V. 8. № 4. P. 321–333.

[5] Diaz J.I. Nonlinear partial differential equations and free boundaries. V. 1: Elliptic equations. Research Notes in Mathematics, V. 106. Boston: Pitman, 1985.

[6] Antontsev S.N., Diaz J.I., Shmarev S.I. Energy methods for free boundary problems. Applications to nonlinear PDEs and Fluid Mechanics // Series Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. V. 48. Boston: Birkhäuser, 2002.

[7] Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А.А. Самарский [и др.]. М.: Наука, 1987.

[8] Diaz J.I., Herrero M.A. Estimates on the support of the solutions of some nonlinear elliptic and a parabolic problems // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 89-A. 1981. P. 249–258.

[9] Антонцев С.Н., Шмарев С.И. О локализации решений эллиптических уравнений с неоднородным анизотропным вырождением // Сиб. матем. журн. 2005. Т. 46. № 5. С. 963–984.

[10] Landis E. M. Some properties of the solution of degenerating semilinear elliptic inequalities // Russian J. Math. Phys. 1993. V. 1. № 4. P. 483–494.

[11] Ландис Е.М. О "мертвой зоне" для полулинейных вырождающихся эллиптических неравенств // Дифф. уравнения. 1993. Т. 29. № 3. С. 414–423.

[12] Туваев М.В. Теорема о "мертвой зоне" для слабо вырожденного квазилинейного эллиптического уравнения // Диф. уравнения. 1993. Т. 29. № 2. С. 349–352.

[13] Kon'kov A.A. Positive Solutions of Nonlinear Second-Order Elliptic Inequalities in Unbounded Domains // Russian J. Math. Phys. 1997. V. 5. № 1. P. 119–122.

[14] Кондратьев В.А., Ландис Е.М. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Матем. сборник. 1988. Т. 135(177), № 3. С. 346–360.
[15] Littmann W., Stampacchia G., Weinberger H. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3). 1963. V. 17. № 1–2. P. 43–77.
[16] Матевосян О. А., Пикулин С. В. Об усреднении полулинейных эллиптических операторов в перфорированных областях // Матем. сб. 2002. Т. 193, № 3. С. 101–114.
[17] Pikulin S.V. Behavior of solutions of semilinear elliptic equations in domains with complicated boundary // Russian J. Math. Phys. 2012. V. 19. № 3. P. 401–404.
[18] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 30/*IX*/2013;
в окончательном варианте — 30/*IX*/2013.

ON ESTIMATE OF SIZE OF LOCALIZATION ZONE OF CARRIER OF SOLUTION TO A SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATION

 S.V. Pikulin[3]

In this paper an estimate of size of localization zone of carrier of solution to the Dirichlet problem for a semilinear elliptic equation with measurable coefficients when the constant which limits the boundary conditions grows is defined more exactly.

Key words: free boundary, dead space, localization of carrier of solution, semilinear elliptic equation, Dirichlet problem, generalized solution.

Paper received 30/*IX*/2013.
Paper accepted 30/*IX*/2013.

[3]Pikulin Sergey Vladimirovich (spikulin@gmail.com), the Dept. of Analytical and Numerical Methods, Institution of Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS, Moscow, 119333, Russian Federation.