УДК 517.95

# ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© 2013 Т.К. Юлдашев[1]

В данной работе предлагается методика изучения обратной задачи для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка. Доказывается теорема о существовании и единственности решения данной обратной задачи.

**Ключевые слова:** обратная задача, нелинейное интегродифференциальное уравнение, суперпозиция дифференциальных операторов, нелинейный метод характеристик, существование и единственность решения.

## Введение

Выражение уравнений в частных производных высокого порядка через суперпозицию дифференциальных операторов в частных производных первого порядка позволяет применять методы решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Локальная теория дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, основанная на понятиях производной по направлению и характеристик, началась формироваться еще в XVIII веке. Характеристики замечательны тем, что выражения в левой части уравнений в частных производных первого порядка представляют собой производную неизвестной функции вдоль характеристики. Это позволяет, перейдя к новой переменной, представить уравнение в частных производных как обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее изменение неизвестной функции вдоль линии характеристик.

В области $D \equiv D_T \times \Re$ рассматривается нелинейное уравнение вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_1(s,y)u(s,y)dyds\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \times$$
$$\times \left(\frac{\partial}{\partial t} + a\left(t, x, \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_2(s,y)u(s,y)dyds\right)\frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) =$$
$$= p(t)u(t,x) + f(t,x,u(t,x)) \qquad (1)$$

[1]Юлдашев Турсун Камалдинович (tursunbay@rambler.ru), кафедра высшей математики Сибирского государственного аэрокосмического университета, 660014, Российская Федерация, г. Красноярск, пр. им. газеты "Красноярский рабочий", 31.

с начальными условиями

$$u(t,x)_{|t=0}=\varphi_1(x),\ \frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=\varphi_{k+1}(x),\ x\in\Re,\ k=1,2 \tag{2}$$

и дополнительным условием

$$u(t,x)_{|x=x_0}=\psi(t), \tag{3}$$

где $f(t,x,u)\in C(D\times\Re)$, $\varphi_i(x)\in C(\Re)$, $i=\overline{1,3}$, $\psi(t)\in C^3(D_T)$, $\psi(0)\neq 0$, $p(t)$, $u(t,x)$ — неизвестные функции, $a=a\left(t,x,\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_2(s,y)u(s,y)dyds\right)\in C^{2,2}(D\times$ $\times\Re)$, $0<\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_i(s,y)dyds<\infty$, $i=1,2$, $D_T\equiv[0,T]$, $0<T<\infty$.

**Определение 1.** Решением обратной задачи (1)–(3) называется пара функций $\big\{u(t,x)\in C^{3,3}(D),\, p(t)\in C(D)\big\}$, удовлетворяющая уравнению (1) и условиям (2) и (3).

Следует отметить, что изучению разного типа линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и их систем посвящены много работ, и при этом применены разные методы [1–6]. Изучению разрешимости обратных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных посвящено большое количество работ. Библиографию многих публикаций, посвященных теории линейных обратных задач, можно найти в [7–9]. В настоящей работе воспользуемся методом характеристик интегрирования нелинейных уравнений в частных производных [10; 11].

# 1. Задача Коши (1), (2)

Левую часть уравнения (1) запишем в виде суперпозиции трех дифференциальных операторов первого порядка

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left(\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_1(s,y)u(s,y)dyds\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\left(t,x,\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_2(s,y)u(s,y)dyds\right)\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x)=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_1(s,y)u(s,y)dyds\frac{\partial}{\partial x}\right)\times\left(\frac{\partial}{\partial t}+\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_1(s,y)u(s,y)dyds\frac{\partial}{\partial x}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\left(t,x,\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_2(s,y)u(s,y)dyds\right)\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x)=A\big[B\big[L[u]\big]\big],$$

где $A\big[B\big[L[u]\big]\big]\equiv\big(B\big[L[u]\big]\big)_t-\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_1(s,y)u(s,y)dyds\big(B\big[L[u]\big]\big)_x$, $B\big[L[u]\big]\equiv(L[u])_t+$ $+\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_1(s,y)u(s,y)dyds(L[u])_x$, $L[u]\equiv u_t+a\left(t,x,\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_2(s,y)udyds\right)u_x$.

Тогда уравнение (1) приобретает вид:

$$A\big[B\big[L[u]\big]\big] = p(t)u(t,x) + f(t,x,u(t,x)). \tag{4}$$

Из (4) видно, что уравнение (1) имеет три характеристики: 1) $x + t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_1(s,y)u(s,y)dyds = C_1$; 2) $x - t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_1(s,y)u(s,y)dyds = C_2$; 3) $x - \int\limits_0^t a\left(s,x,\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_2(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)ds = C_3$, где $C_i$ — произвольные постоянные, $i=\overline{1,3}$.

Тогда, интегрируя уравнения (4) вдоль линии первой характеристики, получаем

$$B\big[L[u(t,x)]\big] = \Phi_1\left(x + t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_1(s,y)u(s,y)dyds\right) + \\ + \int\limits_0^t \Big[p(s)u(s,x) + f(s,x,u(s,x))\Big]ds, \tag{5}$$

где $\Phi_1(x)$ — произвольная непрерывная функция. Из (5), в силу (2), имеем $\Phi_1(x) = \varphi_3(x)$.

Тогда интегродифференциальное уравнение (5) приобретает вид:

$$B\big[L[u(t,x)]\big] = \varphi_3\left(x + t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_1(s,y)u(s,y)dyds\right) + \\ + \int\limits_0^t \Big[p(s)u(s,x) + f(s,x,u(s,x))\Big]ds. \tag{6}$$

Интегрируя интегродифференциальное уравнение (6) вдоль линии второй характеристики, получаем

$$L[u(t,x)] = \Phi_2\left(x - t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_1(s,y)u(s,y)dyds\right) + \\ + \int\limits_0^t \varphi_3\left(x + s\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_1(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)ds + \\ + \int\limits_0^t (t-s)\Big[p(s)u(s,x) + f(s,x,u(s,x))\Big]ds, \tag{7}$$

где $\Phi_2(x)$ — произвольная непрерывная функция. Из (7), в силу (2), следует $\Phi_2(x) = \varphi_2(x)$. Тогда интегродифференциальное уравнение (7) приобретает вид:

$$L[u(t,x)] = \varphi_2\left(x - t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_1(s,y)u(s,y)dyds\right) +$$

$$+\int\limits_0^t \varphi_3\left(x+s\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_1(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)ds+$$

$$+\int\limits_0^t (t-s)\Big[p(s)u(s,x)+f(s,x,u(s,x))\Big]ds. \qquad (8)$$

Интегрируя интегродифференциальное уравнение (8) вдоль линии третьей характеристики, получаем

$$u(t,x)=\Phi_3\left(x-\int\limits_0^t a\left(s,x,\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_2(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)ds\right)+$$

$$+\int\limits_0^t \varphi_2\left(x-s\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_1(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)ds+$$

$$+\int\limits_0^t (t-s)\varphi_3\left(x+s\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_1(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)ds+$$

$$+\int\limits_0^t \frac{(t-s)^2}{2}\Big[p(s)u(s,x)+f(s,x,u(s,x))\Big]ds, \qquad (9)$$

где $\Phi_3(x)$ — произвольная непрерывная функция. Из (9), в силу (2), следует $\Phi_3(x)=\varphi_1(x)$. Тогда интегральное уравнение (9) приобретает вид:

$$u(t,x)=\varphi_1\left(x-\int\limits_0^t a\Big(s,x,\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_2(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\Big)ds\right)+$$

$$+\int\limits_0^t \varphi_2\left(x-s\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_1(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)ds+$$

$$+\int\limits_0^t (t-s)\varphi_3\left(x+s\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_1(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)ds+$$

$$+\int\limits_0^t \frac{(t-s)^2}{2}\Big[p(s)u(s,x)+f(s,x,u(s,x))\Big]ds. \qquad (10)$$

Интегральное уравнение (10) и задача Коши (1), (2) являются эквивалентными. Действительно, так как функция $\varphi_3\left(x+t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_1(s,y)u(s,y)dyds\right)$ является первым интегралом уравнения $\frac{\partial\, B\left[L[u]\right]}{\partial\, t}-\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_1(s,y)u(s,y)dyds\frac{\partial\, B\left[L[u]\right]}{\partial\, x}=0$, то она постоянно вдоль линии первой характеристики, и ее производные равны нулю. Так как функция $\varphi_2\left(x-t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_1(s,y)u(s,y)dyds\right)$ является первым интегралом уравнения $\frac{\partial L[u]}{\partial t}+\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_1(s,y)u(s,y)dyds\frac{\partial L[u]}{\partial x}=0$, то она постоянно вдоль линии второй характеристики, и ее производные равны нулю.

Также отметим, что функция $\varphi_1\left(x-\int\limits_0^t a\left(s,x,\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_2(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)ds\right)$ является первым интегралом уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}+a\left(t,x,\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_2(s,y)u(s,y)dyds\right)\frac{\partial u}{\partial x}=$ $=0$, она постоянно вдоль линии третьей характеристики, и ее производные равны нулю. Поэтому, дифференцируя уравнения (10) три раза вдоль линии соответствующих характеристик, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^3u}{dt^3}=f(t,x,u), \tag{11}$$

где $x$ играет роль параметра.

Если учтем, что вдоль линии характеристик уравнения (1) справедливо соотношение

$$\frac{d^3u}{dt^3}=\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\frac{du}{dt}=\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{dt}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{dt}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{dt}\Big)u=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_1(s,y)u(s,y)dyds\frac{\partial}{\partial x}\right)\times\left(\frac{\partial}{\partial t}+\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_1(s,y)u(s,y)dyds\frac{\partial}{\partial x}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\left(t,x,\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_2(s,y)u(s,y)dyds\right)\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x)=$$

$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left(\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_1(s,y)u(s,y)dyds\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\left(t,x,\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_2(s,y)u(s,y)dyds\right)\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x),$$

то из (11) следует, что интегральное уравнение (10) удовлетворяет уравнению в частных производных (1).

## 2. Восстановление функции $p(t)$

Используя условие (3), из (10) получаем

$$\psi(t)=\varphi_1\left(x_0-\int\limits_0^t a\Big(s,x_0,\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_2(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\Big)ds\right)+$$

$$+\int\limits_0^t\varphi_2\left(x_0-s\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_1(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)ds+$$

$$+\int\limits_0^t(t-s)\varphi_3\left(x_0+s\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_1(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)ds+$$

$$+\int_0^t \frac{(t-s)^2}{2}\Big[p(s)\psi(s)+f(s,x_0,\psi(s))\Big]ds$$

или

$$\int_0^t \frac{(t-s)^2}{2}\psi(s)p(s)ds = g(t), \tag{12}$$

где

$$g(t)=\psi(t)-\varphi_1\left(x_0-\int_0^t a\Big(s,x_0,\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}K_2(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\Big)ds\right)-$$

$$-\int_0^t \varphi_2\left(x_0-s\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}K_1(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)ds-$$

$$-\int_0^t (t-s)\varphi_3\left(x_0+s\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}K_1(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)ds-$$

$$-\int_0^t \frac{(t-s)^2}{2}f(s,x_0,\psi(s))ds.$$

Уравнение (12) является интегральным уравнением Вольтерра первого рода относительно восстанавливаемой функции $p(t)$. Дифференцируя обе части этого уравнения три раза по $t$, получаем $\psi(t)p(t)=g'''(t)$ или

$$p(t)=\frac{g'''(t)}{\psi(t)}, \tag{13}$$

где $g'''(t)=\psi'''(t)-f(t,x_0,\psi(t))$. Подставляя (13) в (10), окончательно имеем нелинейное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $u(t,x)$:

$$u(t,x)=\Theta(t,x;u)\equiv\varphi_1\left(x-\int_0^t a\left(s,x,\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}K_2(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)ds\right)+$$

$$+\int_0^t \varphi_2\left(x-s\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}K_1(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)ds+$$

$$+\int_0^t (t-s)\varphi_3\left(x+s\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}K_1(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)ds+$$

$$+\int_0^t \frac{(t-s)^2}{2}\left[\frac{g'''(s)}{\psi(s)}u(s,x)+f(s,x,u(s,x))\right]ds, \tag{14}$$

где $x$ играет роль параметра.

## 3. Теорема существования и единственности решения

Для произвольной функции $h(t,x)$ норму вводим следующим образом:

$$\|h(t,x)\| = \max_{(t,x)\in D} |h(t,x)|.$$

Аналогично определяется норма для функции одной переменной.

**Теорема 1.** Пусть выполняются следующие условия:

1) $\|\varphi_1(x)\| + \|\varphi_2(x)\|T + \|\varphi_3(x)\|\frac{T^2}{2} + \max_{t\in D_T} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^2}{2}\|f(s,x,0)\|ds \leqslant \Delta < \infty$;

2) $\varphi_i(x) \in Lip\{L_{i|x}\}$, $0 < L_i = const, i = \overline{1,3}$;

3) $a(t,x,u) \in Lip\{L_4(t)_{|u}\},\ 0 < \int\limits_0^t L_4(s)ds < \infty$;

4) $f(t,x,u) \in Lip\{L_5(t)_{|u}\},\ 0 < \int\limits_0^t L_5(s)ds < \infty$;

5) $\rho < 1,\ \rho = L_1 \max_{t\in D_T} \int\limits_0^t L_4(s) \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_2(\theta,y)dyd\theta ds +$

$+ \left(L_2T^2 + L_3\frac{T^3}{2}\right) \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_1(s,y)dyds + \max_{t\in D_T} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^2}{2} \left(\frac{\|g'''(s)\|}{\|\psi(s)\|} + L_5(s)\right) ds.$

Тогда существует единственное решение $\left\{u(t,x) \in C^{3,3}(D),\ p(t) \in C(D)\right\}$ обратной задачи (1)–(3).

**Доказательство.** Существование и единственность восстанавливаемой функции $p(t)$ следует из (13). Для нелинейного интегрального уравнения (14) рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\{\, u_0(t,x) = 0,\ (t,x) \in D, u_{k+1}(t,x) = \Theta(t,x;u_k),\ k = 0,1,2,\ \ldots\ . \tag{15}$$

Тогда, в силу условий теоремы 1, из (15) справедливы следующие оценки:

$$\|u_1(t,x) - u_0(t,x)\| \leqslant \left\|\varphi_1\left(x - \int\limits_0^t a(s,x,0)ds\right)\right\| + \Big\|\varphi_2(x)\Big\|T +$$

$$+\Big\|\varphi_3(x)\Big\|\frac{T^2}{2} + \max_{t\in D_T} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^2}{2}\|f(s,x,0)\|ds \leqslant \Delta;$$

$$\|u_{k+1}(t,x) - u_k(t,x)\| \leqslant L_1 \max_{t\in D_T} \int\limits_0^t L_4(s) \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_2(\theta,y)\|u_k(\theta,y) - u_{k-1}(\theta,y)\|dyd\theta ds +$$

$$+ \left(L_2T^2 + L_3\frac{T^3}{2}\right) \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_1(s,y)\|u_k(s,x) - u_{k-1}(s,x)\|dyds +$$

$$+ \max_{t\in D_T} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^2}{2} \left(\frac{\|g'''(s)\|}{\|\psi(s)\|} + L_5(s)\right) \|u_k(s,y) - u_{k-1}(s,y)\|ds \leqslant$$

$$\leqslant \rho \,\|u_k(t,x) - u_{k-1}(t,x)\|.$$

Из этих оценок в силу последнего условия теоремы следует, что оператор в правой части (14) является сжимающим и имеет единственную неподвижную точку. Следовательно, существует единственное решение $\{u(t,x) \in C^{3,3}(D),\ p(t) \in \in C(D)\}$ обратной задачи (1)–(3).

## Литература


[1] Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.

[2] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

[3] Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравннения 1982. Т. 18. № 1. С. 72–81.

[4] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник. Нелинейные уравнения математической физики. М.: Наука, 2002. 432 с.

[5] Похожаев С.И. Об априорных оценках и градиентных катастрофах гладких решений гиперболических систем законов сохранения // Труды МИ РАН. 2003. Т. 243. С. 257–288.

[6] Пулькина Л.С. Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения // Математические заметки. 2003. Т. 74. № 3. С. 435–445.

[7] Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ. 1994. 285 с.

[8] Романов В.Г. Обратные задачи для математической физики. М.: Наука, 1984. 264 с.

[9] Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Линейные операторы и некорректные задачи. М.: Наука, 1999. 330 с.

[10] Юлдашев Т.К. Об обратной задаче для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка // Вестник ТомГУ. Сер.: Математика и Механика. 2012. Т. 14. № 2. С. 56–62.

[11] Юлдашев Т.К. Об обратной задаче для системы квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка // Вестник Южно-УралГУ. Сер.: Математика. Механика. Физика. 2012. Вып. 6. № 11(270). С. 35–41.


Поступила в редакцию 10/*XII*/2012;
в окончательном варианте — 21/*XII*/2012.

# INVERSE PROBLEM FOR A NONLINEAR INTEGRAL AND DIFFERENTIAL EQUATION OF THE THIRD ORDER

 T.K. Yuldashev[2]

In this paper a method of study of inverse problem for a nonlinear partial integral and differential equation of the third order is proposed. A theorem on the existence and uniqueness of solution of this inverse problem is proved.

**Key words:** inverse problem, nonlinear integral and differential equation, superposition of differential operators, nonlinear method of characteristics, existence and uniqueness of solution.

Paper received 10/*XII*/2012.
Paper accepted 21/*XII*/2012.

[2]Yuldashev Tursun Kamaldinovich (tursunbay@rambler.ru), the Dept. of Higher Mathematics, Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, 660014, Russian Federation.