МАТЕМАТИКА

УДК 517.928

ДЕКОМПОЗИЦИЯ РАЗНОТЕМПОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СО СЛАБОЙ ДИССИПАЦИЕЙ[1]

© 2013 Н.В. Воропаева[2]

Рассматриваются сингулярно возмущенные дифференциальные системы, описывающие динамику манипулятора с упругими сочленениями в условиях слабой диссипации. Устанавливается существование расщепляющего преобразования, приводящего исходную разнотемповую систему к "блочно-треугольному" виду с независимой медленной подсистемой. Расщепляющее преобразование строится в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные системы, декомпозиция, асимптотические методы.

Введение

При решении задач анализа и управления сложными техническими объектами возникают проблемы, обусловленные высокой размерностью моделей и наличием разнотемповых переменных. В связи с этим актуальными становятся проблемы редукции и декомпозиции моделей.

Рассматривается класс многомерных сингулярно возмущенных квазиосциллирующих дифференциальных систем, возникающих при описании роботов с упругими сочленениями. Особенностью рассматриваемого класса систем является то, что для них не выполняются условия теоремы А.Н. Тихонова в части асимптотической устойчивости присоединенной системы, что делает невозможным применение традиционного для асимптотических методов подхода к редукции моделей, когда в качестве упрощенной модели рассматривается порождающая система.

Одним из подходов, позволяющих производить расщепление сложных разнотемповых динамических систем, является метод асимптотической декомпозиции [1; 3], использующий свойства интегральных многообразий медленных и быстрых движений и сочетающий в себе элементы геометрических и асимптотических методов анализа. Проблемы существования и свойств интегральных многообразий

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 13-01-97002-р_поволжье_а).

[2]Воропаева Наталия Владимировна (voropaevan61@mail.ru), кафедра дифференциальных уравнений и теории управления Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

медленных движений для других классов квазиосциллирующих систем рассматривались в работах [2; 3; 6].

1. Основные результаты

Рассмотрим динамическую модель n-звенного манипулятора с упругими сочленениями, приводимыми в действие роторами [4; 5]

$$\begin{aligned} &D(q_1)\ddot{q_1} + C(q_1,\dot{q_1}) + g(q_1) + K(q_1 - q_2) = 0,\\ &J\ddot{q_2} - K(q_1 - q_2) = u, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где координаты векторов $q_1 \in R^n$ и $q_2 \in R^n$ – углы, характеризующие положение звеньев манипулятора и роторов, $D(q_1)$ – матрица инерции звеньев, J — диагональная матрица инерции роторов, вектор $C(q_1,\dot{q_1})$ соответствует кориолисовой и центробежной силам, $g(q_1)$ соответствует гравитационной силе, K – диагональная матрица жесткости связей. Введем в рассмотрение переменную $\eta = K(q_1 - q_2)$ и предположим, что жесткость связи достаточно большая $K = K_1/\varepsilon^2$, где элементы матрицы K_1 имеют порядок $O(1)$.

В соответствии с идеями [4] рассматривается сложный закон управления $u = u_s(q_1,\dot{q_1},t,\varepsilon) + u_f(\dot{q_1},\dot{q_2})$, где u_s — медленная составляющая управления и u_f — быстрая составляющая, имеющая вид $u_f = K_2(\dot{q_1} - \dot{q_2})$, где K_2 — постоянная диагональная матрица. Заметим, что в работах [4; 5] вводится более жесткое ограничение на матрицу K_2, предполагается, что $K_2 = \widetilde{K}_2/\varepsilon$, т. е. фактически это означает наличие в системе достаточно большой диссипации.

Вводя переменные $x_1 = q_1,\ x_2 = \dot{q_1},\ y_1 = z,\ y_2 = \varepsilon\dot{y_1} = \varepsilon\dot{\eta}$, получим сингулярно возмущенную систему

$$\begin{aligned} &\dot{x_1} = x_2,\\ &\dot{x_2} = -D^{-1}(x_1)(y_1 + C(x_1,x_2) + g(x_1)),\\ &\varepsilon\dot{y_1} = y_2,\\ &\varepsilon\dot{y_2} = -J^{-1}[K_1(u_s + JD^{-1}(x_1)(y_1 + C(x_1,x_2) + g(x_1)) +\\ &+\varepsilon K_2 y_2 + K_1 y_1]. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Перепишем систему (1.2) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + F(x)y,\\ \varepsilon\dot{y} &= p(x) + P(x,\varepsilon)y + Bu_s(t,x,\varepsilon), \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ F(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -D^{-1}(x_1) & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -D^{-1}(x_1)(C(x_1,x_2) + g(x_1)) \end{pmatrix},$$

$$p(x) = -\begin{pmatrix} 0 \\ J^{-1}K_1JD^{-1}(x_1)[C(x_1,x_2) + g(x_1)] \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ -J^{-1}K_1 \end{pmatrix},$$

$$P(x,\varepsilon) = P^{(0)}(x) + \varepsilon P^{(1)},\ P^{(0)}(x) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ G(x) & 0 \end{pmatrix},\qquad P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

$$G(x) = -J^{-1}K_1(I + JD^{-1}(x_1)),\ Q = -J^{-1}K_2.$$

Система (1.3) — линейная по быстрым переменным, сингулярно возмущенная система, для которой не выполнены условия теоремы Тихонова об асимптотической устойчивости присоединенной системы. Тем не менее установлено существование замены переменных

$$x = v + \varepsilon H(t,v,z,\varepsilon),\quad y = z + h(t,x,\varepsilon), \tag{1.4}$$

приводящей рассматриваемую разнотемповую систему (1.3) к "блочно-треугольному" виду

$$\begin{aligned} \dot{v} &= V(t, v, u_s, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{z} &= Z(t, v, \varepsilon H, z, u_s, \varepsilon), \end{aligned} \qquad (1.5)$$

с независимой медленной подсистемой и быстрой подсистемой, описывающей гаснущие высокочастотные колебания. Здесь $h(t, x, \varepsilon)$ описывает интегральное многообразие медленных движений системы (1.3), а $H(t, v, z, \varepsilon)$ – интегральное многообразие быстрых движений расширенной вспомогательной системы.

Функция $h(t, x, \varepsilon)$ может быть построена с любой степенью точности в виде асимптотического разложения

$$h = h(t, x, \varepsilon) = h^{(0)}(t, x) + \varepsilon h^{(1)}(t, x) + \varepsilon^2 h^{(2)}(t, x) + \ldots$$

из уравнения

$$\begin{aligned} &\varepsilon\left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial u_s}\frac{\partial u_s}{\partial t}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial u_s}\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)(f(x) + F(x)h) = \\ &= p(x) + P(x, \varepsilon)h + Bu_s \end{aligned} \qquad (1.6)$$

Представляя u_s в виде $u_s(t, x, \varepsilon) = u^{(0)}(t, x) + \varepsilon u^{(1)}(t, x) + \ldots$, получаем

$$\begin{aligned} &h^{(0)}(t, x) = -(P^{(0)}(x))^{-1}(p(x) + Bu^{(0)}(t, x)), \\ &h^{(1)} = (P^{(0)})^{-1}\left(\frac{\partial h^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial h^{(0)}}{\partial x}(f + Fh^{(0)}) - P^{(1)}h^{(0)} - Bu^{(1)}\right), \\ &h^{(2)} = (P^{(0)})^{-1}\left(\frac{\partial h^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial h^{(0)}}{\partial x}Fh^{(1)} + \frac{\partial h^{(1)}}{\partial x}(f + Fh^{(0)}) - \right. \\ &\left. -P^{(1)}h^{(1)} - Bu^{(2)}\right). \end{aligned}$$

В частности, подобно тому как это делалось в [4], можно выбрать $u^{(1)}(t, x) = 0$ и $u^{(2)}(t, x)$ так, что $h^{(2)}(t, x) = 0$. В этом случае, исходя из вида системы (1.3), можно показать, что $h^{(i)}(t, x) = 0,\ i > 1$, при $u^{(i)}(t, x) = 0,\ i > 2$.

Система, описывающая движение на интегральном многообразии медленных движений, будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -D^{-1}(x_1)(h_1^{(0)}(t, x, u^{(0)}) + C(x_1, x_2)x_2 + g(x_1)). \end{aligned} \qquad (1.7)$$

С целью расщепления системы (1.3) в окрестности интегрального многообразия медленных движений введем новые переменные $w = x - v$, $z = y - h(t, x, \varepsilon)$ и рассмотрим расширенную вспомогательную систему

$$\begin{aligned} \dot{v} &= V(t, v, \varepsilon), \\ \dot{w} &= W(t, v, w, z, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{z} &= Z(t, v, w, z, \varepsilon), \end{aligned} \qquad (1.8)$$

$$\begin{aligned} &V(t, v, \varepsilon) = f(v) + F(v)h(t, v, \varepsilon), \\ &W(t, v, w, z, \varepsilon) = f(v + w) - f(v) + F(v + w)(z + h(t, v + w, \varepsilon)) - F(v)h(t, v, \varepsilon), \\ &Z(t, v, w, z, \varepsilon) = (P(v + w, \varepsilon)z - \varepsilon\tfrac{\partial h}{\partial x}(t, v + w, \varepsilon)F(v + w))z. \end{aligned}$$

Можно показать, что у системы (1.8) существует интегральное многообразие быстрых движений вида $w = \varepsilon H(t, v, z, \varepsilon)$, где функция H может быть найдена в виде асимптотического разложения $H(t,v,z,\varepsilon) = H^{(0)}(t,v,z) + \varepsilon H^{(1)}(t,v,z) + \ldots$ из уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial H}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial H}{\partial v} V(t,v,\varepsilon) + \frac{\partial H}{\partial z} Z(t,v,\varepsilon H,z,\varepsilon) = W(t,v,\varepsilon H,z,\varepsilon). \tag{1.9}$$

Разлагая входящие в уравнение (1.9) векторные и матричные функции в ряды по степеням ε и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial H^{(0)}}{\partial z} P^{(0)}(v)z = F^{(0)}(v)z,\\
&\frac{\partial H^{(1)}}{\partial z} P^{(0)}(v)z = \widetilde{W}^{(1)}(t,v,z,H^{(0)},u_s),\\
&\widetilde{W}^{(1)}(t,v,z,H^{(0)},u_s) = W^{(1)}(t,v,z,u_s) - \frac{\partial H^{(0)}}{\partial v} V^{(0)}(t,v,u_s) -\\
&-\frac{\partial H^{(0)}}{\partial z} Z^{(1)}(t,v,z,u_s),\\
&\frac{\partial H^{(i)}}{\partial z} P^{(0)}(v)z = \widetilde{W}^{(i)}(t,v,z,H^{(0)},H^{(1)},\ldots,H^{(i-1)},u_s), \quad i > 1.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Представим функции $H^{(i)}$, $\widetilde{W}^{(i)}$ при достаточно малых z в виде асимптотических разложений

$$H^{(i)}(t,v,z,u_s) = \sum_{j\geqslant 1} H^{(i,j)}(t,v,z,u_s), \tag{1.11}$$

$$\widetilde{W}^{(i)}(t,v,z,H^{(1)},\ldots,H^{(i-1)},u_s) = \sum_{j\geqslant 1} \widetilde{W}^{(i,j)}(t,v,z,u_s). \tag{1.12}$$

Здесь $H^{(i,j)}$, $\widetilde{W}^{(i,j)}$ — векторные функции, компонентами которых являются формы j-го порядка координат вектора z. Из соотношений (1.10) для определения коэффициентов форм $H^{(i,j)}$ получим линейные алгебраические системы.

В рассматриваемой задаче, если ограничиться линейными по z членами, получаем

$$H^{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D^{-1}(v_1)(I + JD^{-1}(v_1))^{-1}K_1^{-1}J \end{pmatrix} z.$$

Движение по интегральному многообразию описывается "блочно-треугольной" системой (1.5). При этом медленная подсистема, описывающая движение на интегральном многообразии $y = h(x,\varepsilon)$, имеет размерность вдвое меньшую по сравнению с исходной, не содержит разнотемповых переменных, но тем не менее наследует важнейшие свойства рассматриваемой системы и может рассматриваться как редуцированная модель при решении задач анализа и синтеза управляющих воздействий.

В качестве примера рассмотрим модель однозвенного манипулятора

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2,\\
\dot{x}_2 &= -\frac{MgL}{D} sinx_1 - \frac{1}{D} y_1,\\
\varepsilon \dot{y}_1 &= y_2,\\
\varepsilon \dot{y}_2 &= -\frac{MgL}{D} sinx_1 - (\frac{1}{D} + \frac{1}{J}) y_1 - \varepsilon K_2 y_2 - \frac{1}{J} u_s(t,x,\varepsilon),
\end{aligned} \tag{1.13}$$

где $u_s(t,x,\varepsilon) = u^{(0)}(t,x) + \varepsilon u^{(1)}(t,x) + \ldots$.

Замена переменных

$$
\begin{aligned}
&x_1 = v_1 + O(\varepsilon^2), \quad x_2 = v_2 + \varepsilon\frac{J}{K_1(J+D)}z_2 + O(\varepsilon^2),\\
&y_1 = z_1 + h_1^{(0)}(t,x), \quad y_2 = z_2 + \varepsilon h_2^{(1)}(t,x),
\end{aligned} \tag{1.14}
$$

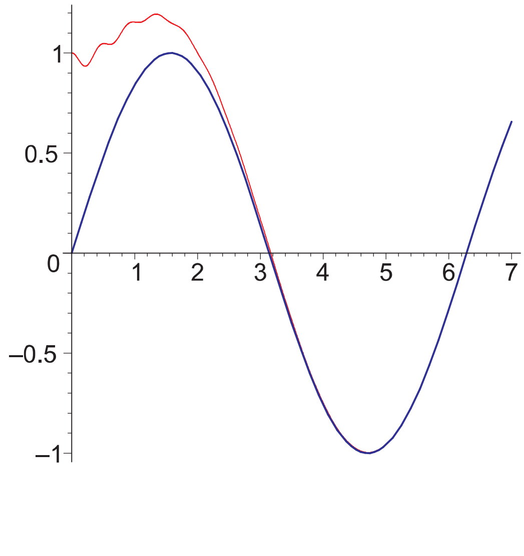
$$
\begin{aligned}
&h_1^{(0)}(t,x) = -\frac{D}{D+J}u^{(0)}(t,x) - \frac{J}{D+J}MgLsinx_1,\\
&h_2^{(1)}(t,x) = \frac{\partial h_1^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial h_1^{(0)}}{\partial x_1}x_2 - \frac{\partial h_1^{(0)}}{\partial x_2}\left(\frac{MgL}{D}sinx_1 + \frac{1}{D}h_1^{(0)}\right)
\end{aligned}
$$

приводит рассматриваемую разнотемповую систему (1.3) к "блочно-треугольному" виду

$$
\begin{aligned}
&\dot v_1 = v_2,\\
&\dot v_2 = -\frac{1}{D+J}(MgL\sin v_1 - u^{(0)}(t,v)),\\
&\varepsilon\dot z_1 = -\varepsilon\frac{1}{D+J}\frac{\partial u^{(0)}(t,v)}{\partial v_2}z_1 + z_2,\\
&\varepsilon\dot z_2 = -\frac{K_1(J+D)}{DJ}z_1 - \varepsilon\frac{K_2}{J}z_2.
\end{aligned} \tag{1.15}
$$

Рассмотрим задачу выбора управляющего воздействия таким образом, чтобы обобщенная координата q_1 отслеживала заданную гладкую и ограниченную траекторию $q_1^*(t)$ так, что $\lim_{t\to\infty}[q_1^*(t) - q_1(t)] = 0$. Отслеживаемая траектория для переменной v_1, с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2)$, имеет вид $v_1^* = q_1^*(t)$. Для системы (1.15) выберем следующий закон управления, обеспечивающий линеаризацию при помощи обратной связи $u_0 = (D+J)(\nu + \frac{MgL}{D+J}\sin v_1)$, где ν — линейная составляющая закона управления вида $\nu = \ddot q_1^* - a_1(v_1 - q_1^*) - a_2(v_2 - \dot q_1^*)$.

На рисунке изображены заданная траектория $q_1^*(t) = \sin t$ и траектория исходной системы, соответствующая выбранному управляющему воздействию для следующих значений параметров: $M = 1$, $L = 1$, $D = 1$, $J = 1$, $K_1 = 100$, $K_2 = 3$, $g = 9.8$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.



Литература

[1] Sobolev V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems // Syst. & Control Lett. 1984. № 5. P. 169–279.

[2] Стрыгин В.В., Соболев В.А. Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988.

[3] Воропаева Н.В., Соболев В.А. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. М.: Физматлит, 2009.

[4] Spong M.W. Modeling and control of elastic joint robots // Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. 1987. № 109. P. 310–319.

[5] Spong M.W., Khorasani K., Kokotovic P.V. An integral manifold approach to feedback control of flexible joint robots // IEEE Journal of Robotics and Automation. 1987. V. 3. № 4. P. 291–301

[6] Singular Perturbation and Hysteresis / M.P. Mortell [et al.]. Philadelphia: SIAM, 2005. 344 p.

Поступила в редакцию 25/IV/2013;
в окончательном варианте — 25/IV/2013.

DECOMPOSITION OF MULTIRATE DYNAMIC SYSTEMS WITH SMALL DISSIPATION

© 2013 N.V. Voropaeva[3]

We consider singularly perturbed differential systems which describe the dynamics of manipulator with flexible joints in conditions of small dissipation. The existence of decoupling transformation which converts original multirate system to "block triangular" form with independent slow subsystem. Decoupling transformation is constructed as asymptotic series.

Key words: singularly perturbed systems, decomposition, asymptotic methods.

Paper received 25/IV/2013.
Paper accepted 25/IV/2013.

[3]Voropaeva Natalya Vladimirovna (voropaevan61@mail.ru), the Dept. of Differential Equations and Management Theory, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.