

УДК 517.9

ТРАЕКТОРИИ-УТКИ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЧИСЛЕННОСТИ ПОПУЛЯЦИИ ВРЕДИТЕЛЕЙ ЛЕСА

© 2013 Е.В. Трошкина¹

Работа посвящена исследованию модели динамики популяции гусеницы листовёртки-почкоёда елового (*Choristoneura fumiferana*). Изучено поведение решений системы в зависимости от значений параметров, определены условия возникновения уточных решений.

Ключевые слова: популяционная модель, медленно-быстрая система, траектории-утки.

1. Математическая модель

Динамика популяции гусеницы листовёртки-почкоёда елового (*Choristoneura fumiferana*) и периоды наибольшей активности моделируются системой из трех обыкновенных дифференциальных уравнений, выведенных Д. Людвигом и др. в 1978 году [1]. Позже эта модель была упрощена Р.М. Мэйем [2]. Эта сокращенная модель имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{dB}{dT} &= rB\left(1 - \frac{B}{K'S}\right) - \beta \frac{B^2}{(\alpha'S)^2 + B^2}, \\ \frac{dS}{dT} &= \rho S\left(1 - \frac{S}{S_{max}}\right) - \xi B.\end{aligned}\quad (1.1)$$

Здесь:

B, S — плотность популяции вредителя и средняя площадь листы, приходящаяся на одно дерево соответственно;

r, ρ — удельная скорость роста популяции и листы соответственно;

K', S_{max} — пропускная способность численности популяции и средней площади листы соответственно (пропускная способность означает емкость среды или максимально возможное значение переменной среды);

$\alpha'S$ — продуктивность атак хищников, то есть значение, при котором начинается "хищничество" (чем меньше это значение, тем быстрее возрастает эффект "хищничества" при росте плотности популяции почкоёда);

β — уровень насыщенности для хищника;

ξ — коэффициент пропорциональности.

Изменение площади поверхности листы описывается вторым уравнением системы (1.1), где первое слагаемое отражает натуральный прирост листы, описанный логистическим соотношением, а второе — потери, которые линейно пропорциональны плотности популяции вредителя.

¹Трошкина Елена Вячеславовна (lena.troshkina@bk.ru), кафедра технической кибернетики Самарского государственного аэрокосмического университета (Национального исследовательского университета), 443001, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 151.

2. Уточные решения

2.1. Предварительные данные

Пока в системе (1.1) выполняется соотношение для ее параметров $\rho \ll r$, данная система будет являться медленно-быстрой или сингулярно возмущенной системой.

Систему (1.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{b} &= f(b, s), \\ \dot{s} &= g(b, s),\end{aligned}\tag{2.1}$$

где $\varepsilon = \frac{\rho}{r}$ — малый положительный параметр, s — быстрая переменная, b — медленная переменная системы.

При $\varepsilon \rightarrow 0$ система (2.1) принимает вид

$$0 = f(b, s),\tag{2.2}$$

$$\dot{s} = g(b, s).\tag{2.3}$$

На фазовом портрете (b, s) график (2.2) изображается кривой, которая называется медленной кривой Γ . Части кривой, для которых выполняется неравенство

$$\frac{\partial f}{\partial b}(b, s) < 0,\tag{2.4}$$

называются устойчивыми участками Γ , если же выполняется противоположное неравенство

$$\frac{\partial f}{\partial b}(b, s) > 0,\tag{2.5}$$

то такие участки называются неустойчивыми. Если положительный параметр ε мал, тогда траектория системы проходит вдоль устойчивого участка кривой, и когда она достигает ε -окрестности точки (b, s) , где

$$\frac{\partial f}{\partial b}(b, s) = 0,\tag{2.6}$$

то совершает скачок. Как следствие, формируется предельный цикл классических релаксационных колебаний (рис. 1, а).

Если же после достижения точки P траектория системы еще некоторое расстояние проходит вдоль неустойчивой медленной кривой и только потом срывается на устойчивую часть Γ , то такое решение называют уточным (рис. 1, б) [3].

Предположим, что обе правые части в (2.1) зависят от дополнительного параметра p . Тогда на параметрическом портрете (ε, p) можно отметить область существования уточного решения. Ширина этой области имеет порядок $O(e^{-1/\varepsilon})$.

2.2. Результаты численного исследования

Введем безразмерные переменные

$$b = \frac{B}{\alpha' S_{max}}, s = \frac{S}{S_{max}}, t = \rho T\tag{2.7}$$

и преобразуем систему (1.1) к виду

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{db}{dt} &= b \left(1 - \frac{b}{\alpha s}\right) - \frac{1}{\gamma} \frac{b^2}{s^2 + b^2} \equiv f(b, s, \alpha, \gamma), \\ \frac{ds}{dt} &= s(1 - s) - \frac{1}{\delta} b \equiv g(b, s, \delta).\end{aligned}\tag{2.8}$$

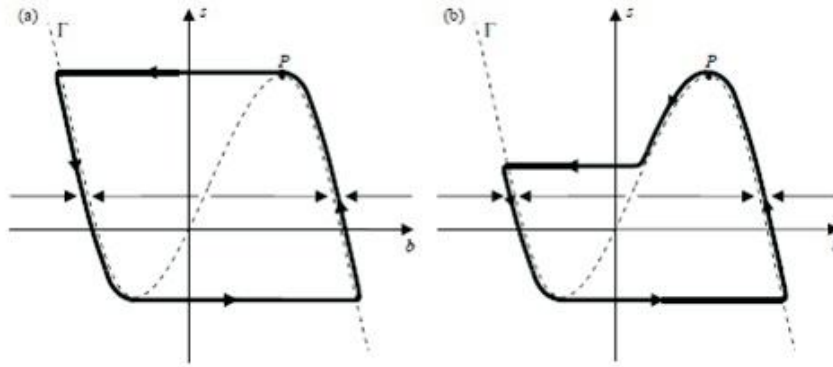


Рис. 1. Траектории системы: *a* — график релаксационного колебания; *b* — график уточного решения

Система (2.8) содержит четыре положительных безразмерных параметра:

$$\alpha = \frac{K'}{\alpha'}, \gamma = \frac{r\alpha' S_{max}}{\beta}, \delta = \frac{\rho}{\alpha'\xi}, \epsilon = \frac{\rho}{r}. \quad (2.9)$$

Для качественного исследования получившейся системы уравнений (2.8) определим особые точки. Наиболее интересным оказывается случай, когда особая точка является точкой экстремума медленной кривой Γ . Такая особая точка описывается набором из трех уравнений:

$$\begin{aligned} f(b, s, \alpha, \gamma) &= 0, \\ g(b, s, \delta) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial b} &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Заметим, что при изменении значения параметра α меняется положение особой точки на медленной кривой, а также при прохождении через бифуркационное значение меняется характер ее устойчивости и происходит бифуркация Андронова–Хопфа.

Эволюция решения в зависимости от значения параметра α представлена на рис. 2–4. Первый график в каждом отдельном случае представляет собой развертку решения по временной координате, второй же — медленная кривая и фазовый портрет системы, построенные при фиксированных значениях параметров.

При достижении параметром бифуркационного значения происходит бифуркация Андронова–Хопфа, то есть особая точка становится неустойчивым фокусом и от нее отделяется замкнутая траектория.

Медленная кривая Γ состоит из трех частей. Нижняя и верхняя дуги являются устойчивыми ((2.4) выполняется), а средняя дуга — неустойчивая ((2.5) выполняется). Таким образом, замкнутая траектория, изображенная на рис. 3, имеет одновременно устойчивые и неустойчивые участки медленного движения, то есть является траекторией-уткой.

При дальнейшем увеличении параметра формируется релаксационный цикл (рис. 4).

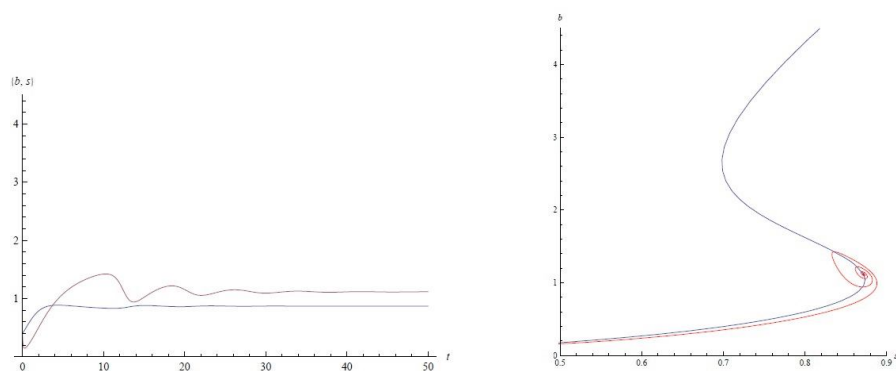


Рис. 2. График решения системы (2.8). Особая точка — устойчивый фокус: $\alpha = 8,1546$; $\delta = 10$; $\varepsilon = 0,1$; $\gamma = 0,66$

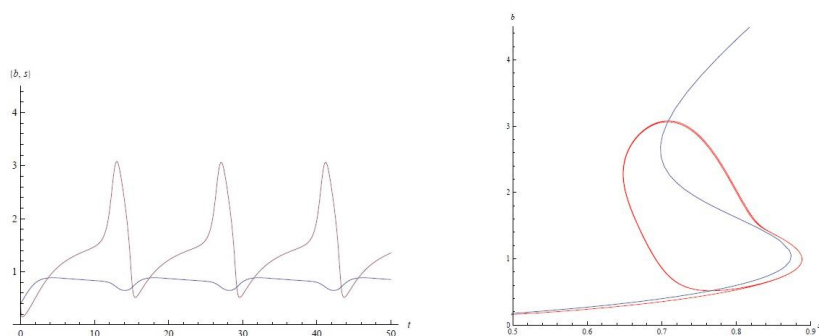


Рис. 3. График уточного решения системы (2.8). Особая точка — неустойчивый фокус: $\alpha = 8,1565$; $\delta = 10$; $\varepsilon = 0,1$; $\gamma = 0,66$

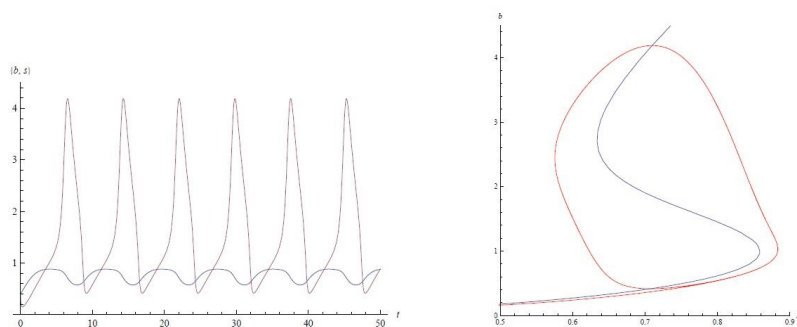


Рис. 4. График решения системы (2.8). Предельный цикл: $\alpha = 9,1$; $\delta = 10$; $\varepsilon = 0,1$; $\gamma = 0,66$

Заключение

Исследование показало, что модель динамики популяции гусеницы листовертки-почкоеда елового (*Choristoneura fumiferana*) обладает интересными харак-

теристиками. Главным образом, было исследовано существование уточного решения системы. Это явление объясняется тем, что особая точка, для которой происходит бифуркация Андронова–Хопфа, лежит на медленной кривой очень близко к точке срыва, разделяющей устойчивую и неустойчивую части кривой. Рождение замкнутой траектории делает возможным соединение устойчивого и неустойчивого интегральных многообразий в окрестности медленной кривой. Через такого рода точку и проходит уточное решение.

Литература

- [1] Ludwig D., Jones D.D., Holling C.S. Qualitative analysis of insect outbreak systems: the spruce budworm and forest // *Journal of Animal Ecology*. 1978. № 47. P. 315–332.
- [2] May R.M. Thresholds and breakpoints in ecosystems with a multiplicity of stable states // *Nature*. 1977. № 269. P. 471–477.
- [3] Соболев В.А., Щепаккина Е.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. М.: Физматлит, 2010. 319 с.
- [4] Методы анализа нелинейных динамических моделей / М. Холоднюк [и др.]. М.: Мир, 1991. 363 с.

Поступила в редакцию 18/XI/2013;
в окончательном варианте — 19/XII/2013.

CANARD CURVES IN THE DYNAMIC MODEL OF FOREST INSECT PESTS

© 2013 E.V. Troshkina²

The paper is concerned with the investigation of the model of dynamics of population of caterpillar budworm (*Choristoneura fumiferana*). The system solutions behavior depending on the parameters values has been investigated, conditions of origination of canard curves have been found.

Key words: population model, slow-fast system, canard curves.

Paper received 18/*XI*/2013.

Paper accepted 19/*XII*/2013.

²Troshkina Elena Vyacheslavovna (lena.troshkina@bk.ru), the Dept. of Technical Cybernetics, Samara State Aerospace University, Samara, 443001, Russian Federation.