

УДК 517.9

БИФУРКАЦИЯ ХОПФА В ТРЕХМЕРНОЙ SIRS-МОДЕЛИ С ДИФФУЗИЕЙ

© 2013 П.М. Кравец¹

В данной статье рассматривается модифицированная трехмерная эпидемиологическая SIRS-модель с так называемой насыщенной заболеваемостью. В ходе исследования предложенная модель была расширена с помощью добавления пространственной составляющей и процесса диффузии. Целью работы являются доказательство существования в системе пространственно-неоднородных периодических решений, то есть когда бифуркация периодических решений происходит не только вдоль временной, но и пространственной переменной, а также их численное моделирование.

Ключевые слова: эпидемиология, SIRS-модель, "насыщенная" заболеваемость, бифуркация Хопфа, диффузия.

Введение

Эпидемиологические SIRS-модели (Susceptible, Infected, Removed with immunity, Susceptible) модели являются частью общепринятой классификации моделей [2; 3]. Эта математическая модель описывает процесс развития эпидемии, в котором индивиды, переболевшие инфекцией, получают временный иммунитет от заболевания, который с течением времени ослабевает. Другими словами, SIRS-модели задают взаимосвязь между количеством индивидов X , подверженных заболеванию, количеством инфицированных индивидов Y и количеством индивидов Z , получивших временный иммунитет. Существует множество модификаций SIRS-моделей: с экспоненциальной рождаемостью и смертностью, с постоянной иммиграцией, а также с различными формами заболеваемости, которые также рассматриваются в [1]. Заболеваемостью в эпидемиологической модели называют скорость, с которой индивиды, подверженные заболеванию, становятся зараженными. При этом если за единицу времени принимать дни, тогда заболеваемость, как правило, выражается как прирост количества инфицированных особей за день. "Насыщенная" заболеваемость имеет вид $\lambda XY/(H + X)$, где H – константа. Очевидно, что, когда $X \gg H$, заболеваемость примерно равна λY . Такая ситуация возможна в случае протекания эпидемии редко встречающейся болезни (от которой в популяции не имеется иммунитета) в популяции с большим количеством индивидов, склонных к заболеванию. Таким образом, распространение инфекции зависит в основном от количества индивидов с инфекцией, а популяция как бы "насыщена" инфицированными особями.

¹Кравец Павел Михайлович (kravetspavel@yahoo.com), кафедра технической кибернетики Самарского государственного аэрокосмического университета (Национального исследовательского университета), 443001, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 151.

1. Нераспределенная модель

Нераспределенная модель, то есть модель без пространственной составляющей, хорошо изучена в [1] и может быть представлена в виде диаграммы (рис. 1):

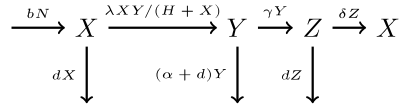


Рис. 1. Схема SIRS-модели с "насыщенной" заболеваемостью

Представленная модель описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 X'(t) &= bN - dX - \lambda XY/(H+X) + \delta Z, \\
 Y'(t) &= \lambda XY/(H+X) - (\gamma + \alpha + d)Y, \\
 Z'(t) &= \gamma Y - (\delta + d)Z, \\
 N'(t) &= (b-d)N - \alpha Y,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где α — коэффициент смертности от болезни; γ — коэффициент восстановления; δ — потеря иммунитета; d — естественная смертность, b — рождаемость, $\lambda XY/(H+X)$ — "насыщенная" заболеваемость, а N — общая популяция, равная сумме X, Y, Z .

В [1] приведено доказательство существования в системе периодических решений, а также были алгебраически выведены условия, при которых происходит бифуркации Хопфа [4]:

$$r > 0, \alpha > 0, \sigma > 1, \phi < 1, \Gamma > 0, L > 0, \tag{2}$$

$$a_2 a_1 - a_0 = AL^2 + BL + C = 0, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 A &= (\delta + d - r) + \gamma + \alpha, \\
 B &= (\delta + d - r)^2 + (\delta + d)\gamma - r\alpha, \\
 C &= -(\delta + d - r)(\delta + d)r, \\
 \Gamma &= \gamma + \alpha + d, \\
 L &= \frac{r}{\alpha} \frac{(\sigma-1)}{\sigma} \frac{\Gamma}{(1-\phi)}, \\
 \sigma &= \frac{\lambda}{\gamma + \alpha + d}, \\
 \phi &= \frac{r}{\alpha} \left(1 + \frac{\gamma}{\delta + d}\right).
 \end{aligned} \tag{4}$$

На рис. 2 и 3 представлены характерные фазовые портреты системы (1), на которых наблюдается устойчивый фокус и предельный цикл соответственно. В качестве бифуркационного параметра был выбран параметр λ . Точка бифуркации — $\lambda_0 = 4,173913$. При $\lambda > \lambda_0$ в системе присутствует устойчивый фокус, при $\lambda < \lambda_0$ — предельный цикл.

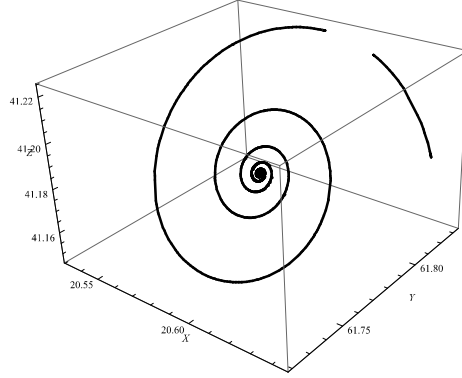


Рис. 2. Устойчивый фокус при $H = 1, \alpha = 2, d = 1, \delta = 0,5, b = 2, \lambda = 4,19426, X_e = 23, Y_e = 69, Z_e = 46$

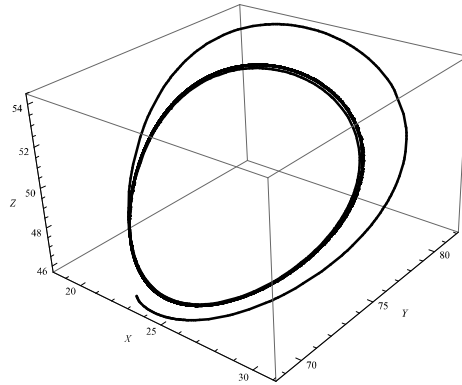


Рис. 3. Предельный цикл при $H = 1, \alpha = 2, d = 1, \delta = 0,5, b = 2, \lambda = 4,16574, X_e = 23, Y_e = 69, Z_e = 46$

2. Пространственно-распределенная модель

Система (1) имеет место, когда описываются средние количества особей (или плотности) в некотором пространстве. Для более полного соответствия изучаемому процессу базовая модель была усложнена с помощью добавления пространственной составляющей и процесса диффузии. Таким образом, преобразуем систему (1) в следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \partial_t X &= d_1 \Delta X + b(X + Y + Z) - dX - \lambda \frac{XY}{H+X} + \delta Z, \\ \partial_t Y &= d_2 \Delta Y + \lambda \frac{XY}{H+X} - (\gamma + \alpha + d) Y, \\ \partial_t Z &= d_3 \Delta Z + \gamma Y - (\delta + d) Z, \end{aligned} \quad (5)$$

где X, Y, Z — функции от времени t и пространственной переменной x ; Δ — оператор Лапласа; $d_i > 0$ — коэффициенты диффузии. Краевые условия для задачи Неймана:

$$\frac{\partial X}{\partial n} = \frac{\partial Y}{\partial n} = \frac{\partial Z}{\partial n} = 0, \quad (6)$$

где n – вектор нормали к граничной области $\partial\Omega$. Мы считаем, что пространственная составляющая x одномерная, то есть $x \in [0, \pi]$. Отметим, что допущение одномерности диффузионного процесса не ограничивает потенциал данной модели. Такая модель описывает процесс, в котором X, Y, Z задают средние популяции или плотности вдоль некоторой траектории, по которой перемещаются особи. При этом рассматриваемая в данной работе система легко обобщается на физические пространства большей размерности, в частности, на двумерное.

$$\begin{aligned}\partial_t X &= d_1 \Delta X + (r - L) X + (d + r - \Gamma) Y + (\delta + d + r) Z, \\ \partial_t Y &= d_2 \Delta Y + L X, \\ \partial_t Z &= d_3 \Delta Z + \gamma Y - (\delta + d) Z.\end{aligned}\tag{7}$$

Собственные функции оператора Лапласа: $u_k(x) = N_k \cos kx$, $k = 0, 1, \dots$

$$\begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k \cos kx \\ B_k \cos kx \\ C_k \cos kx \end{pmatrix},\tag{8}$$

где A_k, B_k, C_k – функции, зависящие от t . Подставляя собственные функции оператора Лапласа в уравнение (7), получим k схожих систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}A'_k &= -d_1 k^2 A_k + (r - L) A_k + (d - r - \Gamma) B_k + (\delta + d + r) C_k, \\ B'_k &= -d_2 k^2 B_k + L A_k, \\ C'_k &= -d_3 k^2 C_k + \gamma B_k - (\delta + d) C_k.\end{aligned}\tag{9}$$

Характеристический многочлен имеет вид:

$$P(\eta) = \eta^3 + a_2 \eta^2 + a_1 \eta + a_0,\tag{10}$$

$$\begin{aligned}a_{2k} &= (d_1 + d_2 + d_3) k^2 + d + \delta + L - r, \\ a_{1k} &= (d_1 d_2 + d_3 d_2 + d_1 d_3) k^4 + k^2 (\delta d_1 + \delta d_2 + d_2 L + d_3 L - d_2 r - d_3 r + d d_1 + d d_2) - \\ &\quad - d r + \Gamma L + \delta L - L r - \delta r, \\ a_{0k} &= -d^2 L + d_1 d_2 d_3 k^6 + k^4 (\delta d_1 d_2 + d_3 d_2 L - d_3 d_2 r + d d_1 d_2) + \\ &\quad + k^2 (\Gamma d_3 L + \delta d_2 L - d_3 L r + d d_2 L - d d_3 L - \delta d_2 r - d d_2 r) - \\ &\quad - \gamma d L + \Gamma d L - d \delta L - d L r - \gamma \delta L + \Gamma \delta L - \gamma L r - \delta L r = \\ &\quad = d_1 d_2 d_3 k^6 + k^4 (\delta d_1 d_2 + d_3 d_2 L - d_3 d_2 r + d d_1 d_2) + \\ &\quad + k^2 (\Gamma d_3 L + \delta d_2 L - d_3 L r + d d_2 L - d d_3 L - \delta d_2 r - d d_2 r) + r \Gamma (\delta + d) (1 - \frac{1}{\sigma})\end{aligned}$$

По предположению в системе присутствуют пространственно-неоднородные периодические решения. Такие решения имеют место, если найти такие значения параметров, при которых если $k = 0$, то $a_1 a_2 - a_0 > 0$, но при некотором $k > 0$ $a_1 a_2 - a_0 = 0$.

3. Пространственно-однородные периодические решения

Для начала рассмотрим тот случай, когда бифуркация Хопфа происходит при $k = 0$. Такое явление наблюдается при следующих значениях параметров и не представляет особого интереса для исследования, так как популяции с течением времени становятся одинаковыми вдоль всех значений x , и колебания наблюдаются только вдоль временной оси

$$d_1 = 0,07, d_2 = 0,07, d_3 = 0,07, \lambda = 4,17291, d = 1, b = 2, \delta = 0,5, \gamma = 1, \alpha = 2.$$

В качестве начальных условий возьмем следующие функции:

$$X(0, x) = 23 + \cos x, Y(0, x) = 69 + \cos x, Z(0, x) = 46 + \cos x.$$

На рис. 4 изображены графики функций $X(t, x), Y(t, x), Z(t, x)$ на промежутке $x \in [0, \pi], t \in [0, 100]$:

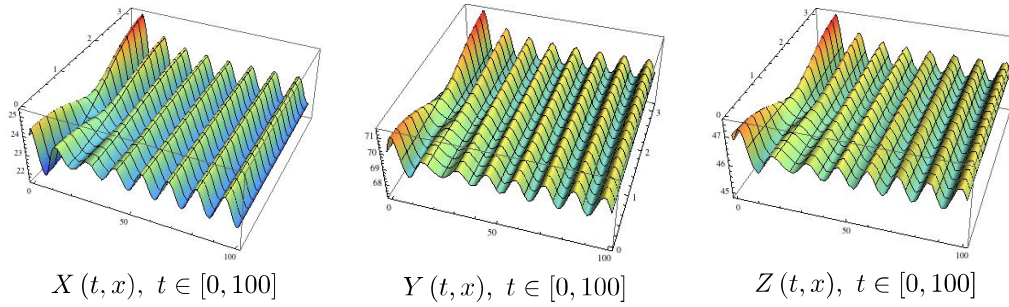


Рис. 4. Графики решения системы (5), сходящегося к пространственно-однородному периодическому решению

4. Пространственно-неоднородные решения

Куда более интересными для исследования представляются пространственно-неоднородные решения, то есть случай, когда в системе наблюдается предельный цикл не только по временной, но и по пространственной составляющей. В [2] были выписаны условия возникновения таких решений; ниже приведены параметры, удовлетворяющие этим условиям.

$$d_1 = 6,83594 \cdot 10^{-3}, d_2 = 2,92969 \cdot 10^{-3}, d_3 = 9,65918 \cdot 10^{-1}, d = 0,5 \\ b = 0,875, \delta = 1, \gamma = 1,75, \alpha = 1, \lambda = 3,37.$$

В качестве начальных условий возьмем функции:

$$X(0, x) = 26 + \cos x, Y(0, x) = 52 + \cos x, Z(0, x) = 182/3 + \cos x.$$

На рис. 5 изображены графики функций $X(t, x), Y(t, x), Z(t, x)$ на промежутке $x \in [0, \pi], t \in [0, 100]$:

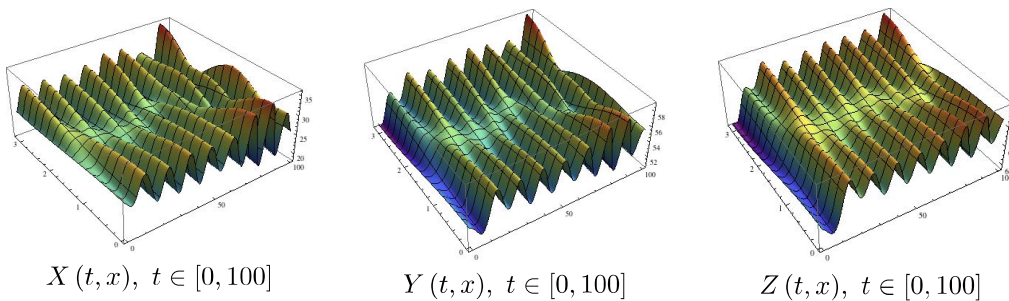


Рис. 5. Графики решения системы (5), сходящегося к пространственно-неоднородному периодическому решению

Автор благодарен доктору физико-математических наук, профессору Д.И. Рачинскому за обсуждение модели и результатов статьи.

Литература

- [1] Population biology of infectious diseases: Part I / Roy M. Anderson [et al.] // Nature. 1979. V. 280. № 5721. P. 361.
- [2] Population biology of infectious diseases: Part II / Robert M. May [et al.] // Nature. 1979. V. 280. № 5722. P. 455.
- [3] Mena-Lorcat Jaime, Hethcote Herbert W. Dynamic models of infectious diseases as regulators of population sizes // Journal of Mathematical Biology. 1992. V. 30. № 7. P. 693—716.
- [4] Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.

Поступила в редакцию 22/III/2013;
в окончательном варианте — 22/III/2013.

HOPF BIFURCATION IN THREE-DIMENSIONAL SIRS-MODEL WITH DIFFUSION

© 2013 P.M. Kravets²

In this paper, modified 3D epidemiologic SIRS model with the so-called saturation incidence is considered. In the course of research the considered model was enlarged by means of adding spatial constituent and diffusion process. The aim of the work is to prove the existence of spatial heterogeneous periodic solutions in the system that takes place when bifurcation of periodic solutions happens not only along temporal but spatial variable and to simulate them numerically.

Key words: epidemiology, SIRS-model, saturation incidence, Hopf bifurcation, diffusion.

Paper received 22/III/2013.
Paper accepted 22/III/2013.

²Kravets Pavel Mikhailovich (kravetspavel@yahoo.com), the Dept. of Technical Cybernetics, Samara State Aerospace University, Samara, 443001, Russian Federation.