УДК 539.375

ВЛИЯНИЕ ПОЛЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ НА ПОЛЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В НЕЛИНЕЙНОМ МАТЕРИАЛЕ

© 2013 М.Е. Федина[1]

Основываясь на экспериментальных данных, предполагается, что граница области, в которой происходит процесс накопления повреждений, есть полуэллипс и лучи, параллельные берегам трещины. Задавая этой гипотезой форму области процесса, определяются асимптотические разложения компонент тензора напряжений и поврежденности.

Ключевые слова: разрушение, поврежденность, область активного накопления повреждений.

Введение

В настоящее время исследование проблем прочности и разрушения твердых тел представляется важной задачей [1].

В соответствии с классической теорией Качанова – Работнова [2; 3] текущее состояние внутренней поврежденности образца может быть представлено с помощью скалярного параметра (параметра поврежденности) D. В процессе ползучести поврежденность с течением времени возрастает. Изменение сплошности $\psi = 1 - D$ можно описать некоторым кинетическим уравнением, которым дополняется система уравнений классической механики сплошной среды.

Одной из характерных черт, присущих этим задачам, является наличие либо области активного накопления повреждений, либо области полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль.

Основываясь на экспериментальных данных [4], предполагается, что граница области, в которой происходит процесс накопления повреждений, есть полуэллипс и лучи, параллельные берегам трещины. Задавая этой гипотезой форму области процесса, определяется асимптотика напряжений и параметра поврежденности у вершин растущих трещин нормального отрыва и поперечного сдвига.

[1]Федина Мария Ефимовна (phedina@samsu.ru), кафедра безопасности информационных систем Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

1. Основные результаты

1.1. Постановка задачи

Рассматриваются распространяющиеся с постоянной скоростью v трещины нормального отрыва и поперечного сдвига.

Определяющие соотношения исследуемого материала в случае связанной постановки задачи теории ползучести и механики поврежденности строятся на основе степенной связи между скоростями деформаций ползучести и напряжениями [6]:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2}\frac{A\sigma_{EQ}^{n-1}s_{ij}}{(1-D)^n} \quad (i,j=1,2,3), \tag{1.1}$$

где $s_{ij} = \sigma_{ij} - (\sigma_{kk}\delta_{ij})/3$ – компоненты девиатора тензора напряжений; $\sigma_{EQ} = (3s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$ – эквивалентные напряжения; n, A – константы материала; δ_{ij} – символ Кронекера; D – скалярный параметр поврежденности.

Компоненты тензора напряжений записываются через функцию напряжений Эри $\Phi = \Phi(r,\theta)$:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right). \tag{1.2}$$

Условие совместности деформаций имеет вид:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial(r\dot{\varepsilon}_{\theta\theta})}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\dot{\varepsilon}_{rr}}{\partial\theta^2} - r\frac{\partial\dot{\varepsilon}_{rr}}{\partial r} - 2\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\dot{\varepsilon}_{r\theta}}{\partial\theta}\right) = 0, \tag{1.3}$$

$$\dot{(\cdot)} = \frac{\partial}{\partial t} - \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)v,$$

где $\dot{(\cdot)}$ – материальная производная по времени t.

Кинетическое уравнение, описывающее степенной закон накопления повреждений, имеет следующую форму [6]:

$$\dot{D} = B\left(\frac{\sigma_{EQ}}{1-D}\right)^m, \tag{1.4}$$

где B – константа материала, а $m \quad (m>0)$ – показатель трещинообразования. В случае установившегося роста трещины $\frac{\partial D}{\partial t} \equiv 0$ тогда кинетическое уравнение (1.4) примет вид:

$$-\cos\theta\frac{\partial D}{\partial r} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial D}{\partial\theta} = \frac{B}{v}\left(\frac{\sigma_{EQ}}{1-D}\right)^m. \tag{1.5}$$

Условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины имеют форму

$$\sigma_{\theta\theta}(r,\theta=\pm\pi) = 0, \qquad \sigma_{r\theta}(r,\theta=\pm\pi=0) = 0. \tag{1.6}$$

1.2. Асимптотическое решение задачи

Решение сформулированной системы уравнений разыскивается в форме

$$\Phi(r,\theta) = Kr^s f(\theta), \tag{1.7}$$

где K и s – неопределенные константы, а $f(\theta)$ – неизвестная функция, зависящая от θ.

Неопределенная константа K в выражениях соответствует коэффициенту интенсивности напряжения нелинейного материала и зависит от показателя n, который входит в определяющие соотношения.

В работе [4], основываясь на экспериментальных данных [5] (для OFHC (медь) при 250^0C), предполагается, что граница области, в которой происходит процесс накопления повреждений, есть полуэллипс и лучи, параллельные берегам трещины. Задавая этой гипотезой форму области процесса, можно определить асимптотические разложения компонент тензора напряжений и поврежденности.

Предполагается, что область накопления повреждений описывается степенной функцией $h(\theta)r^l$.

Показатель степени l может быть определен из предположения, что поле повреждений и поле напряжений удовлетворяют кинетическому уравнению (1.5). Распределение повреждений описывается следующим образом:

$$1 - D = h(\theta)\left(\frac{r}{r_0}\right)^l \qquad (0 \leqslant l < 1); \tag{1.8}$$

$$h(\theta) = \begin{cases} \left[\left(\frac{\cos\theta}{k}\right)^2 + (\sin\theta)^2\right]^{l/2} & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2; \\ (\sin\theta)^l, & \pi/2 < \theta \leqslant \pi; \end{cases} \tag{1.9}$$

где l и r_0 — параметры, характеризующие распределение повреждений; $h(\theta)$ и k — угловое распределение поля повреждений и коэффициент пропорциональности соответственно. Так как на границе области поврежденного материала $D = 0$, то уравнение границы имеет вид: $r = r_0 h(\theta)^{(-1/l)}$.

С учетом всех преобразований условие совместности деформаций приводит к дифференциальным уравнениям:

в случае плоского напряженного состояния:

$$\begin{aligned} &\left[n(s-2-l) - \tfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]\left\{\left[h(\theta)\right]^{-n}\tilde{\sigma}_{EQ}^{n-1}\left[s(s-3)f(\theta) - 2f''(\theta)\right]\right\} + \\ &+\left[n(s-2-l)+1\right]n(s-2-l)\left[h(\theta)\right]^{-n}\tilde{\sigma}_{EQ}^{n-1}\left[s(2s-3)f(\theta) -\right. \\ &\left.-f''(\theta)\right] + 6\left[1+n(s-2-l)\right](s-1)\tfrac{\partial}{\partial\theta}\left\{\left[h(\theta)\right]^{-n}\tilde{\sigma}_{EQ}^{n-1}f'(\theta)\right\} = 0, \end{aligned} \tag{1.10}$$

в случае плоского деформированного состояния:

$$\begin{aligned} &\left\{\tfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} - n(s-2-l)\left[n(s-2-l)+2\right]\right\}\left[h(\theta)\right]^{-n}\tilde{\sigma}_{EQ}^{n-1}\left[s(2-s)f'(\theta) +\right. \\ &\left.+f''(\theta)\right] + 4(s-1)\left[n(s-2-l)+1\right]\tfrac{\partial}{\partial\theta}\left\{\left[h(\theta)\right]^{-n}\tilde{\sigma}_{EQ}^{n-1}f'(\theta)\right\} = 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Исследование кинетического уравнения (1.5) позволяет получить связь между показателями степеней r: l, n и p. Рассматривается область перед трещиной, так как накопление повреждений в этой области оказывает наибольшее влияние на изменение напряженно-деформированного состояния.

Кинетическое уравнение на продолжении трещины при $\theta = 0$ принимает форму

$$-\frac{\partial D}{\partial r} = \frac{B}{v}\left(\frac{\sigma_{EQ}}{1-D}\right)^m. \tag{1.12}$$

Выражая параметр поврежденности из уравнения (1.8) при $\theta = 0$, получается

$$D = 1 - \frac{1}{k}\frac{r^l}{r_0^l}. \tag{1.13}$$

$$\frac{B}{v}\frac{1}{l}(kr_0)^{l(m+1)}[K\tilde{\sigma}_{EQ}(0)]^m = r^{(m+1)l-pm-1}. \tag{1.14}$$

Для выполнения этого условия необходимо, чтобы

$$l = \frac{pm+1}{m+1}, \tag{1.15}$$

$$v = \frac{B}{l}(kr_0)^{l(m+1)}[k\tilde{\sigma}_{EQ}(0)]^m. \tag{1.16}$$

Последние выражения дают соотношения для параметра l, характеризующего распределение повреждений, и скорости роста трещины v. Учитывая ограничения $0 \leqslant l \leqslant 1$ (1.8) и уравнение (1.16), получается, что скорость $v \to \infty$ в случае $l = 0$.

Таким образом получается, что поле напряжений и поврежденность на продолжении растущей трещины в условиях установившегося роста трещины значительно зависят от уровня приложенной нагрузки.

Решение дифференциальных уравнений (1.10) и (1.11) должно удовлетворять граничным условиям, следующим из требования отсутствия поверхностных усилий на верхнем берегу трещины ($\theta = \pi$) и условия симметрии на продолжении трещины ($\theta = 0$):

для трещины нормального отрыва

$$f(\pi) = 0, \quad f'(\pi) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'''(0) = 0; \tag{1.17}$$

для трещины поперечного сдвига

$$f(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad f(\pi) = 0, \quad f'(\pi) = 0. \tag{1.18}$$

Уравнения (1.10), (1.11) являются нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями четвертого порядка, для нахождения численного решения которых удобно использовать, например, метод Рунге — Кутты — Фельберга в сочетании с методом пристрелки. Поэтому решение краевых задач (1.10), (1.11) с граничными условиями сводится к исследованию задачи Коши. Для этого граничные условия при $\theta = \pi$ заменяются начальными при $\theta = 0$. В силу однородности уравнений (1.10), (1.11) можно применить условие нормировки $f(0) = 1$ в случае трещины нормального отрыва и $f'(0) = 1$ в случае трещины поперечного сдвига. Таким образом, начальные условия имеют вид:

$$f'(0) = 0, \quad f'''(0) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f''(0) = \beta \tag{1.19}$$

для трещины нормального отрыва и

$$f'(0) = 1, \quad f'''(0) = \beta, \quad f(0) = 0, \quad f''(0) = 0 \tag{1.20}$$

для трещины поперечного сдвига.

Исследуя системы уравнений (1.10) и (1.11) с условиями (1.19), (1.20) как задачи на собственные значения методом Рунге — Кутты — Фельберга [7], можно найти численное решение задачи.

В ходе отыскания численного решения уравнений (1.10) и (1.11) определяются такие собственные значения s и постоянной β для разных n, чтобы выполнялись граничные условия на верхнем берегу трещины при $\theta = \pi$. При определении констант s и β проверяется выполнение условия:

$$[f(\pi)]^2 + [f'(\pi)]^2 \leqslant 10^{-6}. \tag{1.21}$$

Подбирается знаечение s, которое будет удовлетворять условию:

$$s > \frac{(2+l)n}{(n+1)}. \tag{1.22}$$

Удается получить аналитическое выражение для собственных значений задачи на собственные значения для дифференциальных уравнений (1.10), (1.11) с краевыми условиями (1.19):

$$p = \frac{n^{(1+c/n)} - (m+1)}{n + m[1 + n - n^{(1+c/n)}] + 1}, \tag{1.23}$$

где $c = 0,1$ – в случае плоского деформированного состояния, $c = 0,37$ – в случае плоского напряженного состояния.

Соотношение (1.23) хорошо согласуется с численным решением и, например, для случая $m = 1$ дает погрешность $0,01$ в случае плоского деформированного состояния и $0,02$ в случае плоского напряженного состояния.

Определена асимптотика напряжений для подвижной трещины нормального отрыва и поперечного сдвига в условиях плоского напряженного и плоского деформированного состояний. Решение разрешающей системы дифференциальных уравнений было получено с помощью полуобратного метода. Была определена аналитическая зависимость между собственными значениями задачи s, показателем n, входящим в определяющие соотношения, и m – показателем трещинообразования.

Литература

[1] Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Самара: Изд-во "Самарский университет", 2001. 632 с.

[2] Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. 1958. № 8. С. 26–31.

[3] Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения/прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.

[4] Myrakami S., Hirano T., Liu Y. Asymptotic fields of stress and damage of a mode I creep crack in steady-state growth // Int. J. Solids Struct. 2000. V. 183. P. 15–33.

[5] Observation and quantification of damage field for mode I creep cracks / Y. Liy [et al.] // Trans. Japan Soc. Mech. Eng. 2000. V. 64(A). P. 1183–1191.

[6] Kachanov L.M. Introduction to Continuum Damage Mechanics. Dordrecht. Boston: Martinus Nijhoff, 1986. 135 p.

[7] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

Поступила в редакцию $25/IV/2013$;
в окончательном варианте — $25/IV/2013$.

EFFECTS OF DAMAGE FIELD ON THE CRACK-TIP STRESS FIELD IN NON-LINEAR MATERIAL

 M.E. Fedina[2]

Based on experimental data it is supposed that the boundary of the area in which the process of accumulation of damages takes place, is semiellipse and beams that are parallel to the edges of the crack. Setting by this hypothesis the form of area of the process, asymptotic decompositions of component of tensor of strain and damage are defined.

Key words: damage mechanics, creep damage, damage field.

Paper received 25/IV/2013.
Paper accepted 25/IV/2013.

[2]Fedina Mariya Efimovna (`phedina@samsu.ru`), the Dept. of Security of Information Systems, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.