УДК 330.101.54

*Н.А. Дубровина, А.Л. Сараев, Л.А. Сараев**

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ МНОГОФАКТОРНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В статье предложена математическая модель динамического нелинейного поведения многофакторной экономической системы. Уравнения баланса этой системы описываются связанными нелинейными дифференциальными уравнениями. Результаты численного решения этих уравнений и анализ модели выполнен для экономической системы, образованной тремя факторами производства.

Ключевые слова: экономическая система, факторы производства, производственная функция, выпуск продукции, ресурсы.

Результатом деятельности любой экономической системы (фирмы, холдинга, кластера, отрасли и т. д.) является производство определенной номенклатуры продукции. Объем выпуска этой продукции сопровождается использованием определенных ресурсов, которые в самом общем случае удобно представлять в виде n-мерного вектора пространства R^n объемов факторов производства [1; 2]

$\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$.

Компоненты этого вектора Q_i, выражаемые в денежной форме, могут представлять основной капитал (производственные фонды), привлекаемые в производство трудовые ресурсы, используемые в производстве материалы, технологии различного рода инновации, элементы маркетинга и т. д.

Сами компоненты вектора объемов факторов производства $\mathbf{Q}$ изменяются во времени и представляют собой некоторые функции $Q_i = Q_i(T)$. Переменная времени T предполагается непрерывной и заключенной в рассматриваемом интервале $T_0 \le T \le T_\infty$.

Значение переменной T_0 соответствует началу рассматриваемого процесса, значение переменной T_∞ – концу этого процесса. Единицей измерения переменной T служит, как правило, один год.

Для построения математической модели процесса развития экономической системы целесообразно ввести вспомогательную переменную $t = \dfrac{T - T_0}{T_\infty - T_0}$, изменяющуюся на единичном отрезке $(0 \le t \le 1)$. Функции $Q_i = Q_i(t)$ предполагаются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми нужное число раз.

Значения компонентов вектора $\mathbf{Q}$ в точке отсчета рассматриваемого процесса $(T = T_0, t = 0)$ считаются известными и равными $Q_i^0 = Q_i(0)$. Для математического моделирования конфигурацию используемых ресурсов удобно задавать в виде безразмерного вектора [1]

Дубровина Наталья Александровна (nadubrovina@yandex.ru), *Сараев Александр Леонидович* (alex.saraev@gmail.com), *Сараев Леонид Александрович* (saraev_leo@mail.ru), кафедра математики и бизнес-информатики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

$\mathbf{q}=(q_1,q_2,\ldots,q_n)$.

Здесь $q_i(t)=\dfrac{Q_i(t)}{Q_i^0}$ – относительные объемы факторов производства.

Радиус-вектор $\mathbf{q}=(q_1,q_2,\ldots,q_n)$ определяет положение некоторой точки $N=(q_1,q_2,\ldots,q_n)$ пространства R^n, а множество всех таких точек пространства образует некоторую область в декартовой системе координат $(q_1,q_2,\ldots,q_n)$. Таким образом, конфигурация факторов производства промышленного предприятия трактуется как математический континуум однопродуктового распределенного производства.

Выпуск продукции производства всей отрасли V обеспечивается многофакторной, производственной функцией Кобба–Дугласа:

$$V=P\cdot\prod_{s=1}^{n}Q_s^{a_s}\,. \tag{1}$$

Здесь степенные показатели производственной функции a_i представляют собой эластичности выпуска по соответствующему ресурсу; P – стоимость продукции произведенной на единичные объемы ресурсов.

Выпуск продукции производства всей отрасли V_0 в начальный момент времени равен:

$$V_0=P\cdot\prod_{s=1}^{n}\left(Q_s^0\right)^{a_s}\,. \tag{2}$$

Подставляя соотношение (2) в формулу (1), находим выражение производственной функции через относительные объемы факторов производства [3; 4]:

$$V=V_0\cdot\prod_{s=1}^{n}q_s^{a_s}\,. \tag{3}$$

Рассмотрим изменения объемов факторов производства $Q_i=Q_i(t),(i=1..n)$ за малый промежуток времени Δt. Часть этого объема может быть утрачена в процессе производства, другая его часть может быть восстановлена за счет внутренних эндогенных инвестиций. Кроме того, возможно дополнительное восстановление фактора Q_i за счет внешней экзогенной поддержки, в качестве которой может выступать часть государственных инвестиций в рассматриваемую экономическую систему. Уравнения такого баланса имеют вид

$$\Delta Q_i(t)=-\alpha_i\cdot Q_i(t)\cdot\Delta t+I_i(t)\cdot\Delta t+\eta_i\cdot G(t)\cdot\Delta t,(i=1..n). \tag{4}$$

Здесь $I_i(t)$ – внутренние эндогенные инвестиции; $G(t)$ – объем государственных инвестиций; α_i – доля выбывшего за год объема фактора производства Q_i, η_i – доля объема государственных инвестиций, приходящаяся на объем фактора производства Q_i. Очевидно, что эти величины не являются независимыми, а удовлетворяют условию $\sum_{s=1}^{n}\eta_s=1$.

Переходя в уравнении (4) к пределу при $(\Delta t\to 0)$ и учитывая связь внутренних инвестиций с функцией выпуска (3)

$$I_i = \beta_i \cdot V_0 \cdot \prod_{s=1}^{n} q_s^{a_s} \ , \tag{5}$$

находим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dQ_i}{dt} + \alpha_i \cdot Q_i = \beta_i \cdot V_0 \cdot \prod_{s=1}^{n} q_s^{a_s} + \eta_i \cdot G(t), (i = 1..n). \tag{6}$$

Здесь β_i – норма накопления объема фактора производства Q_i.

Разделив каждое из уравнений (6) на величину Q_i^0, получим систему нелинейных дифференциальных уравнений в безразмерной форме относительно величин q_i

$$\frac{dq_i}{dt} + \alpha_i \cdot q_i = \beta_i \cdot v_i \cdot \prod_{s=1}^{n} q_s^{a_s} + \eta_i \cdot g_i(t), (i = 1..n). \tag{7}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = -\alpha_1 \cdot q_1 + \beta_1 \cdot v_1 \cdot \prod\limits_{s=1}^{n} q_s^{a_s} + \eta_1 \cdot g_1(t), \\ \dfrac{dq_2}{dt} = -\alpha_2 \cdot q_2 + \beta_2 \cdot v_2 \cdot \prod\limits_{s=1}^{n} q_s^{a_s} + \eta_2 \cdot g_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dq_n}{dt} = -\alpha_n \cdot q_n + \beta_n \cdot v_n \cdot \prod\limits_{s=1}^{n} q_s^{a_s} + \eta_n \cdot g_n(t). \end{cases} . \tag{8}$$

Здесь $v_i = \dfrac{V_0}{Q_i^0}$, $g_i(t) = \dfrac{G(t)}{Q_i^0}$.

Уравнения (8) образуют систему нормальных нелинейных связанных уравнений первого порядка, а ее начальные условия имеют вид

$$q_1(0) = q_2(0) = \ldots = q_n(0) = 1. \tag{9}$$

Очевидно, что нелинейная задача Коши (8), (9) может быть решена в общем случае только численно.

Исследуем более подробно влияние объема государственных инвестиций $G(t)$ на относительные объемы факторов производства q_i.

Как правило, экономическая государственная поддержка многих субъектов экономики имеет свое некоторое стационарное значение G_∞. При любом временном конъюнктурном отклонении в сторону увеличения или в сторону уменьшения величины $G(t)$ от этого значения вышедшая из равновесного состояния экономическая система отрасли всегда стремится вернуться в стационарное положение. Это означает, что скорость изменений государственных инвестиций $\dot{G} = \dfrac{dG}{dt}$ пропорциональна величине их отклонений от равновесного значений G_∞. Такая динамика величины $G(t)$ может быть описана задачей Коши первого порядка

$$\begin{cases} \dot{G} = \dfrac{dG}{dt} = -\lambda \cdot (G - G_\infty), \\ G\big|_{t=0} = G(0) = G_0. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь $\lambda > 0$ – параметр, характеризующий скорость изменений государственных инвестиций в отрасль; G_0 – уровень начальных внешних инвестиций.

Решение задачи Коши (10) имеет вид

$$G(t) = G_\infty + (G_0 - G_\infty) \cdot e^{-\lambda \cdot t}. \tag{11}$$

Таким образом, функции $g_i(t)$ в правых частях системы уравнений (8) могут быть представлены в виде

$$g_i(t) = g_i^\infty + \left(g_i^0 - g_i^\infty\right) \cdot e^{-\lambda \cdot t}. \tag{12}$$

Здесь $g_i^0 = \dfrac{G_0}{Q_i^0}, g_i^\infty = \dfrac{G_\infty}{Q_i^0}$.

Применим полученные формулы для расчета параметров динамики развития экономической системы для случая $n = 3$. В этом случае объем выпуска продукции будет зависеть от объемов трех факторов производства, являющихся компонентами трехмерного вектора пространства R^3 и выражающихся в денежной форме

$\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3) = (K, L, M)$.

Здесь K – основной капитал (производственные фонды); L – привлекаемые в производство трудовые ресурсы; M – используемые в производстве материалы и технологии. Относительные объемы факторов производства $q_i(t) = \dfrac{Q_i(t)}{Q_i^0}$ тоже образуют трехмерный вектор

$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3) = (k, l, m)$.

Здесь – $k = \dfrac{K}{K_0}, l = \dfrac{L}{L_0}, m = \dfrac{M}{M_0}$. Система уравнений (8) принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{dk}{dt} = -\alpha_k \cdot k + \beta_k \cdot v_k \cdot k^{a_k} \cdot l^{a_l} \cdot m^{a_m} + \eta_k \cdot g_k(t), \\ \dfrac{dl}{dt} = -\alpha_l \cdot l + \beta_l \cdot v_l \cdot k^{a_k} \cdot l^{a_l} \cdot m^{a_m} + \eta_l \cdot g_l(t), \\ \dfrac{dm}{dt} = -\alpha_m \cdot m + \beta_m \cdot v_m \cdot k^{a_k} \cdot l^{a_l} \cdot m^{a_m} + \eta_m \cdot g_m(t). \end{cases} \tag{12}$$

Здесь $\alpha_k, \alpha_l, \alpha_m$ – доля выбывших за год объемов факторов производства K, L, M соответственно; $\beta_k, \beta_l, \beta_m$ – нормы накопления объемов этих факторов производства;

$$v_k = \frac{V_0}{K_0}, v_l = \frac{V_0}{L_0}, v_m = \frac{V_0}{M_0},\ g_k(t) = \frac{G(t)}{K_0}, g_l(t) = \frac{G(t)}{L_0}, g_m(t) = \frac{G(t)}{M_0},$$

$$g_k^0 = \frac{G_0}{K_0}, g_l^0 = \frac{G_0}{L_0}, g_m^0 = \frac{G_0}{M_0},\ g_k^\infty = \frac{G_\infty}{K_0}, g_l^\infty = \frac{G_\infty}{L_0}, g_m^\infty = \frac{G_\infty}{M_0}.$$

Следует отметить, что денежный объем фактора трудовых ресурсов L напрямую не связан с численностью персонала рассматриваемой экономической системы. Формирование штатного расписания не всегда является экономической задачей. Здесь возможны варианты, при которых увеличение фактора L может сопровождаться как уменьшением, так и увеличением числа работников и наоборот.

Начальные условия для системы уравнений (12) имеют вид

$$k(0) = l(0) = m(0) = 1. \tag{13}$$

Расчетные данные всех параметров задачи приведены в таблице 1.

Таблица

$\alpha_k = 0{,}100$	$\beta_k = 0{,}250$	$\eta_k = 0{,}900$
$\alpha_l = 0{,}150$	$\beta_l = 0{,}0003$	$\eta_l = 0{,}000$
$\alpha_m = 0{,}650$	$\beta_m = 0{,}150$	$\eta_m = 0{,}100$
$K_0 = 900\,000$	$V_0 = 1\,500\,000$	$a_k = 0{,}250$
$L_0 = 600$	$G_0 = 3\,000$	$a_l = 0{,}700$
$M_0 = 400\,000$	$G_\infty = 15\,000$	$a_m = 0{,}500$

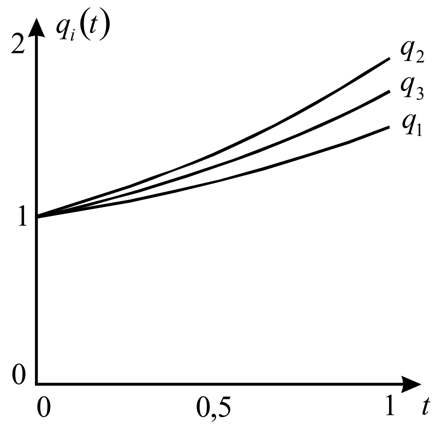

Рис. 1. Кривые динамики относительных факторов производства

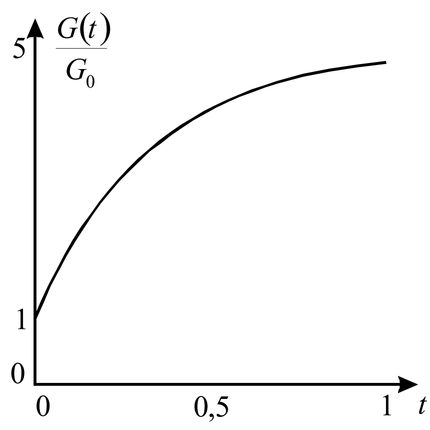

Рис. 2. График функции $\frac{G(t)}{G_0}$

На рис.1 представлены результаты численного решения задачи Коши (12), (13), описывающие динамическое развитие рассматриваемой экономической системы.

На рис.2 показана кривая зависимости отношения функции экзогенных воздействий к своему начальному значению $\frac{G(t)}{G_0}$.

Библиографический список

1. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Континуальная теория производственного процесса и производительности факторов производства промышленных предприятий // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 7 (98). С. 196–203.
2. Сараев А.Л., Сараев Л.А. К теории структурной модернизации производственных предприятий // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 10 (101). С. 160–169.
3. Сараев А.Л., Сараев Л.А. К оценке прибыли и затрат предприятий, модернизирующих структуру производства // Вестник Самарского государственного университета. 2013. № 1 (102). С. 186–196.
4. Мантуленко А. В., Сараев А. Л., Сараев Л. А. К теории оптимального распределения факторов производства, производственных и трансакционных издержек // Вестник Самарского государственного университета. 2013. № 7(108). С. 177–126.

References

1. Saraev A.L., Saraev L.A. Continuous theory of production process and factors productivity of industrial enterprises // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. 2012. № 7 (98). P. 196–203.
2. Saraev A.L., Saraev L.A. To the theory of structural modernization of industrial enterprises // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. 2012. № 10 (101). P. 160–169.
3. Saraev A.L., Saraev L.A. To the assessment of benefits and costs of an enterprise upgrading pattern of production // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. 2013. № 1 (102). P. 186–196.
4. Mantulenko A.V., Saraev A.L., Saraev L.A. On the theory of optimal allocation of production factors and transaction costs // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. 2013. № 7 (108). P. 117–126.

N.A. Dubrovina, A.L. Saraev, L.A. Saraev *

ON THE THEORY OF NONLINEAR DYNAMICS OF MULTIFACTORIAL ECONOMIC SYSTEMS

In the published article a mathematical model of dynamic nonlinear behavior of multifactorial economic system is suggested. Balance equations of this system are described by coupled nonlinear differential equations. Numerical solutions of these equations and analysis of the model is made for the economic system formed by three factors of production.

Key words: economic system, factors of production, production function, output, resources.

---

* *Dubrovina Natalya Alexandrovna* (nadubrovina@yandex.ru), *Saraev Alexander Leonidovich* (alex.saraev@gmail.com), *Saraev Leonid Alexandrovich* (saraev_leo@mail.ru), the Dept. of Mathematics and Business-Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.