УДК 519.999

ПОЛЕ ИНВАРИАНТОВ БОРЕЛЕВСКОЙ ГРУППЫ ПРИСОЕДИНЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ *GL(n,K)*[1]

© 2014 К.А. Вяткина[2]

В работе рассматриваются вопросы теории инвариантов, а именно проблема нахождения образующих полей инвариантов в явном виде. Приведен набор образующих поля инвариантов унитреугольной группы относительно присоединенного действия группы $GL(n, K)$. Проведено построение набора образующих поля инвариантов борелевской группы и доказана их алгебраическая независимость.

Ключевые слова: группы Ли, присоединенное действие, поле инвариантов, образующие поля инвариантов, борелевская группа.

1. Предварительные сведения

Основной задачей теории инвариантов алгебраических групп является задача описания структуры кольца и поля инвариантов. Для разрешимых групп имеет место следующая теорема.

Теорема 1.1 [1]. Пусть V — векторное пространство над полем K. Для любой приводимой к треугольному виду подгруппы в группе $GL(V)$ поле инвариантов рационально, т. е. существуют инварианты $Q_1, \dots Q_n \in K(V)$ такие, что поле инвариантов есть поле рациональных функций $K(Q_1, \dots, Q_n)$.

В 1989 году Э.Б. Винберг доказал более общую теорему.

Определение 1. Рациональное преобразование α векторного пространства K^n называется треугольным, если в подходящей системе координат все преобразования $\alpha(g), g \in G$, имеют вид

$$x_i \to a_i x_i + f_i(x_{i+1}, \dots, x_n),$$

где $a_i \in K^*, f_i \in k(x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Теорема 1.2 [2]. Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. Для любой подгруппы, состоящей из рациональных треугольных преобразований K^n, поле инвариантов рационально.

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 14–01–31052–мол_а и 14–01–97017–р_поволжье_а.

[2]Вяткина Ксения Анатольевна (vjatkina.k@gmail.com), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Введем обозначения. Пусть K — поле характеристики нуль, V — векторное пространство над K, $G = \mathrm{GL}(n,K)$ — группа невырожденных матриц, а B и U ее верхнетреугольная и верхнеунитреугольная подгруппы соответственно. Рассматривается присоединенное действие группы G в линейном пространстве $V = \mathrm{Mat}(n,K)$: $Ad_g X = gXg^{-1}$, $g \in G$, $X \in V$. Определим представление Ad_g в $K[V]$ (соответственно $\mathcal{F} = K(V)$) по формуле:

$$Ad_g f(x) = f(Ad_g^{-1}(x)).$$

Обозначим через $\mathcal{F}^U$ (соответственно $\mathcal{F}^B$) подполе U-инвариантов (соответственно B-инвариантов) в поле $\mathcal{F}$. Согласно теоремам 1.1 и 1.2, поля $\mathcal{F}^U$ и $\mathcal{F}^B$ рациональны.

Цель этой работы — найти в явном виде образующие поля B-инвариантов для присоединенного представления. В теореме 2.2. сформулирован основной результат.

2. Основные результаты

2.1. Образующие поля инвариантов унитреугольной группы

Обозначим через $x_{i,j}$ координатные формы на $V = \mathrm{Mat}(n,K)$. Рассмотрим систему из n миноров вида:

$$J_i = \begin{vmatrix} x_{n-i+1,1} & \cdots & x_{n-i+1,i} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{i,i} \end{vmatrix}, i = \overline{1,n}. \tag{2.1}$$

Расширим данный набор инвариантов до набора из $\frac{n(n+1)}{2}$ элементов следующим образом. С каждым минором J_i свяжем систему из i определителей $J_{i,j}$, где $0 \leqslant j \leqslant i-1$. Определитель $J_{i,0}$ совпадает с минором J_i. В определителе $J_{i,j}$, где $1 \leqslant j \leqslant i-1$, первые $i-j$ строк совпадают с последними $i-j$ строками из минора J_i; а последние j строк совпадают с аналогичными строками из минора $J_i(X^*)$ присоединенной матрицы $X^* = (x^*_{i,j})$, которая определяется следующим соотношением:

$$X \cdot X^* = X^* \cdot X = \det X \cdot E.$$

Пример 1. Случай $n=2$, $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, $X^* = \begin{pmatrix} x^*_{11} & x^*_{12} \\ x^*_{21} & x^*_{22} \end{pmatrix}$,

$J_{1,0} = x_{2,1}$,

$J_{2,0} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}$, $J_{2,1} = \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x^*_{21} & x^*_{22} \end{vmatrix}$.

Пример 2. Случай $n=3$, $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$, $X^* = \begin{pmatrix} x^*_{11} & x^*_{12} & x^*_{13} \\ x^*_{21} & x^*_{22} & x^*_{23} \\ x^*_{31} & x^*_{32} & x^*_{33} \end{pmatrix}$,

$J_{1,0} = x_{3,1}$,

$J_{2,0} = \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix}$, $J_{2,1} = \begin{vmatrix} x_{31} & x_{32} \\ x^*_{31} & x^*_{32} \end{vmatrix}$,

$$J_{3,0} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}, \quad J_{3,1} = \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x^*_{31} & x^*_{32} & x^*_{33} \end{vmatrix}, \quad J_{3,2} = \begin{vmatrix} x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x^*_{21} & x^*_{22} & x^*_{23} \\ x^*_{31} & x^*_{32} & x^*_{33} \end{vmatrix}.$$

Теорема 2.1 [3]. Поле U-инвариантов присоединенного представления группы $\mathrm{GL}(n,K)$ есть поле рациональных функций от $\{J_{i,j} : 1 \leqslant i \leqslant n,\ 0 \leqslant j \leqslant i-1\}$.

2.2. Образующие поля инвариантов борелевской группы

Обозначим через H подгруппу диагональных матриц в $\mathrm{GL}(n,K)$. Легко видеть, что присоединенное действие подгруппы H сохраняет поле $\mathcal{F}^U$, причем поле $\mathcal{F}^B$ совпадает с подполем H-инвариантов в $\mathcal{F}^U$.

Определение 2. Функция $f \in k[V]$ называется полуинвариантом, если

$$Ad_h f = \chi_h(f) f,$$

где $h \in H$ и $\chi_h(f) \in K^*$. Характер $\chi_h(f)$ подгруппы H называют весом полуинварианта f.

Пусть $h = \mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_n) \in H$. Тогда $Ad_h x_{i,j} = \dfrac{a_j}{a_i} x_{i,j}$, то есть

$$\chi_h(x_{i,j}) = \frac{a_j}{a_i}.$$

Заметим, что присоединенная матрица X^* изменяется точно так же. Действительно, из определения присоединенной матрицы

$$X \cdot X^* = X^* \cdot X = \det X \cdot E,$$

$$Ad_h(X) \cdot Ad_h(X^*) = \det(Ad_h(X))E.$$

Отсюда $Ad_h(X^*) = (Ad_h(X))^*$ и, следовательно, $Ad_h x^*_{i,j} = \dfrac{a_j}{a_i} x^*_{i,j}$. Тогда

$$\chi_h(x^*_{i,j}) = \chi_h(x_{i,j}) = \frac{a_j}{a_i}. \qquad (2.2)$$

Введем обозначения

1. $y_1 = J_{1,0}$, $y_i = \dfrac{J_{i,i-1}}{J_{i-1,0}}$, где $2 \leqslant i \leqslant n$,

2. $Y_{i,j} = \dfrac{J_{i,j} \cdot y_{n-i+j+1}}{J_{i-1,j} \cdot y_i}$, где $2 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant i-2$.

Легко доказывается следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $F = K(z_1,\ldots z_n)$ — поле рациональных функций от переменных $z_1,\ldots,z_n$ над полем K. Пусть диагональная подгруппа H действует на поле F по формуле: $hz_i = \chi_h(z_i)z_i$. Тогда подполе H-инвариантов F^H порождается элементами вида

$$z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n}, \text{ где } m_i \in \mathbb{Z} \text{ и } \chi_h(z_1)^{m_1}\ldots\chi_h(z_n)^{m_n} = 1.$$

Определение 3. Элементарным преобразованием системы образующих $z_1,\ldots,z_n$ поля F будем называть переход от нее к новой системе при помощи операции вида

$$z_i \to z_i \cdot z_j^{\pm 1}, \text{ где } i \neq j.$$

Определение 4. Будем называть две системы образующих эквивалентными, если от одной можно перейти к другой, используя элементарные преобразования.

Перейдем к формулировке и доказательству основной теоремы работы.

Теорема 2.2. Поле B-инвариантов присоединенного представления группы $\mathrm{GL}(n,K)$ является полем рациональных функций от

$$\{y_n,\ Y_{i,j}:\ 2\leqslant i\leqslant n,\ 0\leqslant j\leqslant i-2\}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Как было сказано, поле $\mathcal{F}^U$ порождается набором алгебраически независимых элементов $\{J_{1,0},\cdots,J_{n,n-1}\}$ (см. теорему 2.1). Составим следующую таблицу, которую назовем таблицей образующих элементов:

$$\begin{bmatrix} & & & & J_{n,0}\\ & & & J_{n-1,0} & J_{n,1}\\ & & \iddots & \vdots & \vdots\\ & J_{2,0} & \dots & J_{n-1,n-3} & J_{n,n-2}\\ J_{1,0} & J_{2,1} & \dots & J_{n-1,n-2} & J_{n,n-1}\end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Каждый из образующих элементов $J_{i,j}$ является полуинвариантом. Аналогично таблице образующих элементов составим таблицу весов:

$$\begin{bmatrix} & & & & \chi_h(J_{n,0})\\ & & & \chi_h(J_{n-1,0}) & \chi_h(J_{n,1})\\ & & \iddots & \vdots & \vdots\\ & \chi_h(J_{2,0}) & \dots & \chi_h(J_{n-1,n-3}) & \chi_h(J_{n,n-2})\\ \chi_h(J_{1,0}) & \chi_h(J_{2,1}) & \dots & \chi_h(J_{n-1,n-2}) & \chi_h(J_{n,n-1})\end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Действие подгруппы H в поле $\mathcal{F}^U$ удовлетворяет условиям леммы 1. Наша цель — перейти, используя элементарные преобразования, от исходной системы образующих $\{J_{i,j}\}$к новой системе образующих элементов, имеющей максимально простую таблицу весов.

Используя формулу (2.2), получаем

$$\chi_h(J_{i,j})=\frac{a_1\dots a_i}{a_n\dots a_{n-j+1}\cdot a_n\dots a_{n-i+j+1}}. \tag{2.6}$$

В частности,

$$\chi_h(J_{1,0})=\frac{a_1}{a_n},\dots,\ \chi_h(J_{i,0})=\frac{a_1\dots a_i}{a_n\dots a_{n-i+1}},\dots,\ \chi_h(J_{n,0})=1,$$
$$\chi_h(J_{2,1})=\frac{a_1a_2}{a_na_n},\dots,\ \chi_h(J_{i,i-1})=\frac{a_1\dots a_i}{a_n\dots a_{n-i+2}a_n},\dots,\ \chi_h(J_{n,n-1})=\frac{a_1}{a_n}.$$

Подставляя найденные значения в (2.5), получаем:

$$\begin{bmatrix} & & & & & 1\\ & & & & \frac{a_1\dots a_{n-1}}{a_n\dots a_2} & \chi_h(J_{n,1})\\ & & & \iddots & \vdots & \vdots\\ & & \frac{a_1a_2a_3}{a_na_{n-1}a_{n-2}} & \dots & \chi_h(J_{n-1,n-4}) & \chi_h(J_{n,n-3})\\ & \frac{a_1a_2}{a_na_{n-1}} & \chi_h(J_{3,1}) & \dots & \chi_h(J_{n-1,n-3}) & \chi_h(J_{n,n-2})\\ \frac{a_1}{a_n} & \frac{a_1a_2}{a_na_n} & \frac{a_1a_2a_3}{a_na_na_{n-1}} & \dots & \frac{a_1\dots a_{n-1}}{a_na_na_{n-1}\dots a_3} & \frac{a_1}{a_n}\end{bmatrix}$$

Выполним следующий ряд элементарных преобразований.

1. Перейдем от системы $\{J_{i,j}\}$ к системе $\{J'_{i,j}\}$, в которой $J'_{i,j} = \dfrac{J_{i,j}}{J_{i-1,j}}$ для $3 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant i-2$; для остальных $J'_{i,j} = J_{i,j}$. Так как
$$\chi_h\left(J'_{i,j}\right) = \frac{a_i}{a_{n-i+j+1}},$$
то матрица весов для $\{J'_{i,j}\}$ имеет вид:
$$\begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & & & \dfrac{a_1\ldots a_{n-1}}{a_n\ldots a_2} & \dfrac{a_n}{a_2} \\ & & \iddots & \vdots & \vdots \\ & \dfrac{a_1a_2}{a_na_{n-1}} & \ldots & \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-1}} & \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \\ \dfrac{a_1}{a_n} & \dfrac{a_1a_2}{a_na_n} & \ldots & \dfrac{a_1\ldots a_{n-1}}{a_na_na_{n-1}\ldots a_3} & \dfrac{a_1}{a_n} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

2. Каждый $J'_{i,i-1}$, где $2 \leqslant i \leqslant n$, заменим на $y_i = \dfrac{J'_{i,i-1}}{J'_{i-1,0}} = \dfrac{J_{i,i-1}}{J_{i-1,0}}$. Заметим, что $y_1 = J'_{1,0} = J_{1,0}$. Таблица образующих элементов примет вид:
$$\begin{bmatrix} & & & & J'_{n,0} \\ & & & J'_{n-1,0} & J'_{n,1} \\ & & \iddots & \vdots & \vdots \\ & J'_{2,0} & \ldots & J'_{n-1,n-3} & J'_{n,n-2} \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_{n-1} & y_n \end{bmatrix} \tag{2.8}$$
Вычислим $\chi_h(y_i)$:
$$\chi_h(y_1) = \frac{a_1}{a_n},\ \ldots,\ \chi_h(y_i) = \frac{a_i}{a_n},\ \ldots\ ,\chi_h(y_{n-1}) = \frac{a_{n-1}}{a_n},\ \chi_h(y_n) = \frac{a_n}{a_n} = 1.$$
Подставляя эти веса в (2.7), получаем:
$$\begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & & & \dfrac{a_1}{a_n} & \dfrac{a_n}{a_2} \\ & & \iddots & \vdots & \vdots \\ & \dfrac{a_1a_2}{a_na_{n-1}} & \ldots & \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-1}} & \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \\ \dfrac{a_1}{a_n} & \dfrac{a_2}{a_n} & \ldots & \dfrac{a_{n-1}}{a_n} & 1 \end{bmatrix}$$

3. Перейдем от системы образующих элементов
$$\{y_1,\ldots,y_n,J'_{i,j},\ \ 2 \leqslant i \leqslant n,\ \ 0 \leqslant j \leqslant i-2\}$$
к новой системе, положив $J''_{i,0} = \dfrac{J'_{i,0}}{J'_{i-1,0}}$ и $J''_{i,j} = J'_{i,j}$ для остальных образующих элементов. Веса вычисляются по формуле:
$$\chi_h\left(J''_{i,0}\right) = \frac{a_i}{a_{n-i+1}},\ \text{ где } 2 \leqslant i \leqslant n-1.$$

Таблица весов примет вид:

$$\begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & & & \dfrac{a_{n-1}}{a_2} & \dfrac{a_n}{a_2} \\ & & \iddots & \vdots & \vdots \\ & \dfrac{a_2}{a_{n-1}} & \dots & \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-1}} & \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \\ \dfrac{a_1}{a_n} & \dfrac{a_2}{a_n} & \dots & \dfrac{a_{n-1}}{a_n} & 1 \end{bmatrix}$$

4. Каждый $J''_{i,j}$, где $2 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant i-2$, заменим на

$$Y_{i,j} = \frac{J''_{i,j} \cdot y_{n-i+j+1}}{y_i}.$$

Получаем

$$\chi_h(Y_{i,j}) = \chi_h\left(\frac{J''_{i,j} \cdot y_{n-i+j+1}}{y_i}\right) = \frac{a_i}{a_{n-i+j+1}} \cdot \frac{a_{n-i+j+1}}{a_n} : \frac{a_i}{a_n} = 1,$$

то есть каждый $Y_{i,j}$ является инвариантом.

Таблица образующих элементов и таблица весов принимают вид:

$$\begin{bmatrix} & & & & Y_{n,0} \\ & & & Y_{n-1,0} & Y_{n,1} \\ & & \iddots & \vdots & \vdots \\ & Y_{2,0} & \dots & Y_{n-1,n-3} & Y_{n,n-2} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} & y_n \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & 1 \\ & & \iddots & \vdots & \vdots \\ & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dfrac{a_1}{a_n} & \dfrac{a_2}{a_n} & \dots & \dfrac{a_{n-1}}{a_n} & \end{bmatrix}$$

Применяя к системе образующих

$$\{y_k, Y_{i,j} :\ 1 \leqslant k \leqslant n-1,\ 2 \leqslant i \leqslant n,\ 0 \leqslant j \leqslant i-2\}$$

лемму 1, заключаем, что набор алгебраически независимых элементов $\{y_n,\ Y_{i,j} :\ 2 \leqslant i \leqslant n,\ 0 \leqslant j \leqslant i-2\}$ порождает поле $\mathcal{F}^B$.

Автор благодарит своего научного руководителя Александра Николаевича Панова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

[1] Miyata K. Invariants of certain groups // Nagoya Math. J. 1971. V. 1. № 41. P. 69–73.

[2] Винберг Э.Б., Попов В.Л. Теория инвариантов // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер.: Соврем. пробл. матем. Фундам. направл. 1989. Т. 55. С. 137–309.

[3] Вяткина К.А., Панов А.Н. Поле U-инвариантов присоединенного действия группы $GL(n,k)$ // Мат. заметки. 2013. Т. 93. № 1. С. 144–147.

References

[1] Miyata K. Invariants of certain groups // Nagoya Math. J. 1971. V. 1. № 41. P. 69–73

[2] Vinberg E.B., Popov V.L. Invariant theory // Itogi Nauki i Tekhniki. VINITY. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr. 1989. V. 55. P. 137–309.

[3] Vyatkina K.A., Panov A.N. Field of U-invariants of adjoint representation of the group $GL(n, K)$ // Matematicheskie Zametki. 2013. V. 93. № 1. P. 144–147.

Поступила в редакцию $10/IV/2014$;
в окончательном варианте — $10/IV/2014$.

FIELD OF INVARIANTS OF BORELEAN GROUP OF ADJOINT REPRESENTATION OF *GL(n,K)*

© 2014 K.A. Vyatkina[3]

The paper is devoted to invariant theory problems, in particular to the problem of finding generators of invariant fields in an explicit form. The set of generators is given for invariant field of unitriangular group concerning the adjoint representation of $GL(n, K)$ group. Moreover, the set of generators of Borel group for the field of invariants is constructed and their algebraic independence is proved.

Key words: Lie group, adjoint representation, field of invariant, generators of the field of invariants, Borel group.

Paper received $10/IV/2014$.
Paper accepted $10/IV/2014$.

[3]Vyatkina Kseniya Anatol'evna (vjatkina.k@gmail.com), the Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.