УДК 517.9

ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА СО СМЕЩЕНИЯМИ В ПРОИЗВОДНЫХ

 А.В. Герасимов[1], Б.В. Логинов[2], Н.Н. Юлдашев[3]

Дана постановка задачи определения собственных и присоединенных функций для оператора Лапласа в s-мерном единичном шаре со смещением в производных. При $s = 2$ получены условия существования присоединенных функций не выше третьего порядка и выполнено их вычисление. Случай произвольного s является предметом будущей работы.

Ключевые слова: оператор Лапласа, единичный шар в R^s, собственные значения, собственные и присоединенные функции при $s = 2$.

В классе непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций до второго порядка включительно в s-мерном единичном шаре в R^s задача определения собственных и присоединенных функций для оператора Лапласа со смещениями в производных определяется условиями $(\Delta + \lambda)u = \frac{1}{r^{s-1}}\left(\frac{\partial}{\partial r} r^{s-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_\Theta u + \lambda u = 0$, $u \in C^{2+\alpha}(\Omega)$, $u'_r(r_0, \Theta) = u'_r(1, \Theta)$, $0 < r_0 < 1$, $\Omega = \{r, \Theta | r < 1, \Theta = (\Theta_1, \ldots, \Theta_{n-1})\}$, где Δ_Θ — оператор Лапласа на единичной сфере S^{s-1}. Разделяя переменные $u(r, \Theta) = X(r)Y(\Theta)$, получаем уравнение для полисферических функций, а при подстановке $X(r) = r^{-\frac{s}{2}+1}x(r)$ уравнение Бесселя $x''(r) + \frac{1}{r}x' + \left[\lambda - \frac{1}{r^2}(n + \frac{s}{2} - 1)^2\right] x = 0$. В предположении ограниченности решения смещение определяет собственные значения $\lambda = \alpha^2 = \alpha^2(n)$ как корни уравнения $f(\alpha) = \alpha\left[r_0^{-\frac{s}{2}+1} J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right] + \left(1 - \frac{s}{2}\right)\left[r_0^{-\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right] = 0$.

Если функция $v(r, \Theta)$ имеет непрерывные вторые производные в подобластях Ω_{r_0} и $\Omega \setminus \Omega_{r_0}$, то периодичность функции u по Θ, непрерывность и непрерывная дифференцируемость ее всюду в Ω и смещение определяют сопряженную задачу $(\Delta + \lambda)v = 0$ в $\Omega_{r_0} \cup (\Omega \setminus \Omega_{r_0})$, $v'_r(r_0 - 0, \Theta) = v'_r(r_0 + 0, \Theta)$, $v'_r(1, \Theta) = 0, r_0^{s-1}[-v(r_0 + 0, \Theta) + v(r_0 - 0, \Theta)] + v(1 - 0, \Theta) = 0$.

Замечание 1. Условия сопряженной задачи возникают, если в прямой задаче вместо $u \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ предположить только $u \in C^{2+\alpha}(\Omega_{r_0}) \cup C^{2+\alpha}(\Omega \setminus \Omega_{r_0})$.

Далее для простоты представления приведены результаты только в прямой задаче при $s = 2$. Использованы справочные издания [1–4].

---

[1]Герасимов Артем Викторович (gerasimov_artyom@mail.ru), кафедра прикладной математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева, 430005, Российская Федерация, г. Саранск, пр. Ленина, 15.

[2]Логинов Борис Владимирович (bvllbv@yandex.ru), кафедра высшей математики Ульяновского государственного технического университета, 432027, Российская Федерация, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.

[3]Юлдашев Нурилла Нигматович (nurilla1956@mail.ru), кафедра высшей математики Ташкентского института текстильной и легкой промышленности, 100100, Республика Узбекистан, г. Ташкент, ул. Шохжахон, 5.

Теорема 1. Прямая задача имеет собственные значения $\lambda_n = \alpha^2 = \alpha^2(n)$, определяемые условием $f(\alpha) = J'_n(\alpha) - J'_n(\alpha r_0) = 0$ с собственными функциями $\Phi_n^{(1)}(r,\Theta) = J_n(\alpha r)(c_{n1}\cos n\Theta + c_{n2}\sin n\Theta)$. Ей отвечает сопряженная задача $(\Delta + \lambda)v = 0$ $v \in C^{2+\alpha}(\Omega_{r_0}) \cup C^{2+\alpha}(\Omega \setminus \Omega_{r_0})$, $v'_r(r_0 - 0,\Theta) = v'_r(r_0 + 0,\Theta)$, $v'_r(1,\Theta) = 0$, $v(1,\Theta) + r_0[v(r_0 - 0,\Theta) - v(r_0 + 0,\Theta)] = 0$ с теми же собственными значениями и собственными функциями $\Psi_n^{(1)}(r,\Theta) = \mathcal{X}_n^{(1)}(r)(d_{n1}\cos n\Theta + d_{n2}\sin n\Theta)$,

$$\mathcal{X}_n^{(1)}(r) = D\begin{cases} [N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)]\, J_n(\alpha r), & 0 \leqslant r < r_0, \\ J'_n(\alpha)N_n(\alpha r) - N'_n(\alpha)J_n(\alpha r), & r_0 < r \leqslant 1. \end{cases}$$

Условие отсутствия (существования) присоединенных элементов $\Phi^{(2)}(r,\Theta) = X_n^{(2)}(r)(c_{n1}\cos n\Theta + c_{n2}\sin n\Theta)$ с точностью до ненулевого множителя (обозначается $\cong$) имеет вид $I_n^{(1)}(\alpha) = \int\limits_0^1 \rho X_n^{(1)}(\rho)\mathcal{X}_n^{(1)}(\rho)d\rho \cong \cong \left(n^2 - \alpha^2\right) r_0 J_n(\alpha) + \left(r_0^2\alpha^2 - n^2\right) J_n(\alpha r_0) \cong f'(\alpha) \neq 0 (= 0)$.

Теорема 2. Пусть $f(\alpha) = 0$ и $f'(\alpha) = 0$. Тогда $X_n^2(r)$ определяется как ограниченное решение неоднородного уравнения Бесселя $X^{(2)\prime\prime}(r) + \frac{1}{r}X^{(2)\prime}(r) + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)X^{(2)} = J_n(\alpha r)$ с условиями $X^{(2)\prime}(r_0) = X^{(2)\prime}(1)$, $X^{(2)^{(k)}}(r_0 - 0) = X^{(2)^{(k)}}(r_0 + 0)$, $k = 0,1$ и имеет вид $X_n^{(2)}(r) = -\frac{r}{2\alpha}J'_n(\alpha r)$, $0 \leqslant r < 1$. Условие отсутствия (наличия) третьего элемента ЖЦ $X_n^{(3)}(r)$ определяется интегралом $I_n^{(2)}(\alpha) = \int_0^1 \rho X_n^{(2)}(\rho)\mathcal{X}_n^{(1)}(\rho)d\rho$ и совпадает с $f''(\alpha) \cong \cong \alpha\left(r_0^2 - 1\right) J'_n(\alpha) + 2\Big(r_0 J_n(\alpha r_0) - J_n(\alpha)\Big) \ncong 0 (= 0)$.

Доказательство выполняется методом Лагранжа вариации произвольных постоянных отдельно в подобластях Ω_{r_0} и $\Omega \setminus \Omega_{r_0}$ с последовательным использованием сопровождающих граничных условий.

Теорема 3. Одновременное выполнение условий $f^{(k)}(\alpha) = 0$, $k = 0,1,2,3$ невозможно.

Доказательство выполняется исследованием системы

$$\begin{array}{llllll} f'(\alpha) = 0 & \sim & \left(n^2 - \alpha^2\right) r_0 J_n(\alpha) & + \left(r_0^2\alpha^2 - n^2\right) J_n(\alpha r_0) & & = 0, \\ f''(\alpha) = 0 & \sim & -2J_n(\alpha) & +2r_0 J_n(\alpha r_0) & +\alpha\left(r_0^2 - 1\right) J'_n(\alpha) & = 0, \\ f'''(\alpha) = 0 & \sim & \left(n^2 - \alpha^2\right) J_n(\alpha) & & +2\alpha J'_n(\alpha) & = 0. \end{array}$$

Следствие. Жордановы цепочки прямой задачи обрываются на третьем элементе, т. е. имеют длину три.

Действительно, система $f'(\alpha) = 0$, $f''(\alpha) = 0$ разрешима, т. к. ее определитель $\Delta_{12} = n^2\left(r_0^2 - 1\right) \neq 0$.

Теперь в условиях $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) = 0$, $f''(\alpha) = 0$ выполним вычисление $X_n^{(3)}(r)$, являющегося решением неоднородного уравнения Бесселя с правой частью $-\frac{r}{2\alpha}J'_n(\alpha)$ и теми же условиями смещения и гладкости. Действуя по Лагранжу, определим

$$X_n^{(3)}(r) = \begin{cases} C_{11}^{(3)}(r)J_n(\alpha r) + C_{12}^{(3)}(r)N_n(\alpha r), & 0 \leqslant r < r_0, \\ C_{21}^{(3)}(r)J_n(\alpha r) + C_{22}^{(3)}(r)N_n(\alpha r), & r_0 \leqslant r < 1, \end{cases}$$

где $C_{120}^{(3)} = 0$, $C_{11}^{(3)}(r) = \frac{\pi}{4\alpha}\int\limits_0^r \rho^3 N_n(\alpha\rho)J'_n(\alpha\rho)d\rho = \frac{\pi r^3}{8\alpha^2}J_n(\alpha r)N_n(\alpha r) - -\frac{3\pi}{8\alpha^2}\int\limits_0^r \rho^2 J_n(\alpha\rho)N_n(\alpha\rho)d\rho - \frac{r^3}{12\alpha^2} + C_{110}^{(3)}$, $C_{12}^{(3)}(r) = -\frac{\pi}{8\alpha^2}\int\limits_0^r \rho^3 dJ_n^2(\alpha\rho) =$

$= -\frac{\pi r^3}{8\alpha^2} J_n^2(\alpha r) + \frac{3\pi}{8\alpha^2}\int\limits_0^r \rho^2 J_n^2(\alpha\rho)d\rho$, а на интервале $r_0 \leqslant r < 1$ $C_{21}^{(3)}(r) = = \frac{\pi}{4\alpha^2}\int\limits_{r_0}^r \rho^3 N_n(\alpha\rho)dJ_n(\alpha\rho) = \frac{\pi r^3}{8\alpha^2}J_n(\alpha r)N_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2}J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0) - - \frac{r^3-r_0^3}{12\alpha^2} - \frac{3\pi}{8\alpha^2}\int\limits_{r_0}^r \rho^2 J_n(\alpha\rho)N_n(\alpha\rho)d\rho + C_{210}^{(3)}$, $C_{22}^{(3)}(r) = -\frac{\pi}{8\alpha^2}\int\limits_{r_0}^r \rho^3 dJ_n^2(\alpha\rho) = = -\frac{\pi}{8\alpha^2}r^3 J_n^2(\alpha r) + \frac{\pi}{8\alpha^2}r_0^3 J_n^2(\alpha r_0) + \frac{3\pi}{8\alpha^2}\int\limits_{r_0}^r \rho^2 J_n^2(\alpha\rho)d\rho + C_{220}^{(3)}$. Отметим, что формула для вычисления интеграла $\int \rho^2 J_n(\alpha\rho)N_n(\alpha\rho)d\rho$ в справочных изданиях отсутствует, а для вычисления интеграла $\int \rho^2 J_n^2(\alpha\rho)d\rho$ имеется рекуррентная формула. Условие непрерывности $X^{(3)}$ дает $C_{110}^{(3)} - C_{210}^{(3)} = = \frac{N_n(\alpha r_0)}{J_n(\alpha r_0)}C_{220}^{(3)} + \frac{r_0^3}{12\alpha^2} - \frac{3\pi}{8\alpha^2}\frac{N_n(\alpha r_0)}{J_n(\alpha r_0)}\int\limits_0^{r_0}\rho^2 J_n^2(\alpha\rho)d\rho + \frac{3\pi}{8\alpha^2}\int\limits_0^{r_0}\rho^2 J_n(\alpha\rho)N_n(\alpha\rho)d\rho$, а из непрерывной дифференцируемости $X^{(3)}$ при $r = r_0$ следует $C_{110}^{(3)} - - C_{210}^{(3)} = \frac{N_n'(\alpha r_0)}{J_n'(\alpha r_0)}C_{220}^{(3)} + \frac{r_0^3}{12\alpha^2} + \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2}\frac{J_n^2(\alpha r_0)N_n'(\alpha r_0)}{J_n'(\alpha r_0)} - \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2}J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0) + + \frac{3\pi}{8\alpha^2}\int\limits_0^{r_0}\rho^2 J_n(\alpha\rho)N_n(\alpha\rho)d\rho - \frac{3\pi}{8\alpha^2}\frac{N_n'(\alpha r_0)}{J_n'(\alpha r_0)}\int\limits_0^{r_0}\rho^2 J_n^2(\alpha\rho)d\rho$. Отсюда определяется $C_{220}^{(3)}$ в виде $C_{220}^{(3)} = \frac{3\pi}{8\alpha^2}\int\limits_0^{r_0}\rho^2 J_n^2(\alpha\rho)d\rho - \frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2}J_n^2(\alpha r_0)$.

Значение $C_{220}^{(3)}$ определяется также смещением $X^{(3)'}(r_0-0) = X^{(3)'}(r_0+0) = = X^{(3)'}(1-0)$, $C_{220}^{(3)} = -\frac{\pi r_0^3}{8\alpha^2}J_n^2(\alpha r_0) + [N_n'(\alpha r_0) - N_n'(\alpha)]^{-1}\Big\{\frac{r_0^2 J_n(\alpha r_0)}{4\alpha^3} - \frac{J_n(\alpha)}{4\alpha^3} - - \frac{1-r_0^3}{12\alpha^2}J_n'(\alpha) - \frac{3\pi}{8\alpha^2}J_n'(\alpha)\int\limits_{r_0}^1 \rho^2 J_n(\alpha\rho)N_n(\alpha\rho)d\rho + \frac{3\pi}{8\alpha^2}N_n'(\alpha)\int\limits_{r_0}^1 \rho^2 J_n^2(\alpha\rho)d\rho\Big\}$, что позволяет вычислить интеграл $\frac{3\pi}{8\alpha^2}\int\limits_{r_0}^1 \rho^2 J_n(\alpha\rho)N_n(\alpha\rho)d\rho = -\frac{J_n(\alpha)}{4\alpha^3 J_n'(\alpha)} - \frac{1-r_0^3}{12\alpha^2} + \frac{r_0^2}{4\alpha^3}\frac{J_n(\alpha r_0)}{J_n'(\alpha)} - - \frac{3\pi}{8\alpha^2}\frac{N_n'(\alpha r_0)}{J_n'(\alpha)}\int\limits_0^{r_0}\rho^2 J_n^2(\alpha\rho)d\rho + \frac{3\pi}{8\alpha^2}\frac{N_n'(\alpha)}{J_n'(\alpha)}\int\limits_{r_0}^1 \rho^2 J_n^2(\alpha\rho)d\rho$, а вместе с ним выразить постоянную $C_{210}^{(3)}$ через $C_{110}^{(3)}$ и найденное значение $C_{220}^{(3)}$. Корректность задачи при малых изменениях r_0 в любом промежутке $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ дает возможность вычисления интеграла $\int\limits_0^r \rho^2 J_n(\alpha\rho)N_n(\alpha\rho)d\rho$.

Если не исследовать предельную задачу при $r_0 \to 0$, а просто подставить найденные значения постоянных $C_{110}^{(3)}$, $C_{210}^{(3)}$ и $C_{220}^{(3)}$ в формулу для $X^{(3)}(r)$, то получаем следующий результат.

Теорема 4. В условиях $f^{(k)}(\alpha) = 0$, $k = 0, 1, 2$, третий элемент жордановой цепочки $X_n^{(3)}(r)$ имеет вид

$$X_n^{(3)}(r) = -\frac{r^3 J_n(\alpha r)}{12\alpha^2} - \frac{3\pi}{8\alpha^2}J_n(\alpha r)\int\limits_0^r \rho^2 J_n(\alpha\rho)N_n(\alpha\rho)d\rho + \frac{3\pi}{8\alpha^2}N_n(\alpha r)\int\limits_0^r \rho^2 J_n^2(\alpha\rho)d\rho.$$

Замечание 2. Отметим расчеты [5; 6], где исследована соответствующая задача со смещениями в искомых функциях.

Замечание 3. Общий случай $s > 2$ является предметом будущей работы.

Литература

[1] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендетные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966. 296 с.

[2] Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965. 585 с.

[3] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 780 с.

[4] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.

[5] Логинов Б.В., Нагорный А.М. Об одной краевой задаче для уравнения Гельмгольца со смещениями внутри области // Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей. 1987. № 4. С. 170–182.

[6] Логинов Б.В., Нагорный А.М. О спектре одной задачи Бицадзе — Самарского // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. № 11. С. 2012–2016.

References

[1] Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions. M.: Nauka, 1966. 296 p.

[2] Vilenkin N.Ya. Special functions and group representation theory. M.: Nauka, 1965. 585 p.

[3] Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integrals and series. Special functions. M.: Nauka, 1983. 780 p.

[4] Abramovitz M., Stegun I.A. Handbook on special functions. M.: Nauka, 1979. 832 p.

[5] Loginov B.V., Nagorny A.M. On a boundary value problem for Helmholtz equation with displacements within domain // Mixed-type equations and free boundary problems. 1987. № 4. P. 170–182.

[6] Loginov B.V., Nagorny A.M. On the spectrum of a problem of Bitsadze — Samarskiy // Differential equations. 1988. V. 24. № 11. P. 2012–2016.

Поступила в редакцию 18/*XI*/2013;
в окончательном варианте — 19/*XII*/2013.

EIGENVALUE PROBLEM FOR THE LAPLACE OPERATOR WITH DISPLACEMENT IN DERIVATIVES

© 2014 A.V. Gerasimov[4] B.V. Loginov[5] N.N. Yuldashev[6]

The statement of the problem on the determination of eigen- and adjoint-functions for Laplace operator in s-dimensional unit ball with displacement in derivatives is given. For $s = 2$ the conditions are obtained for the existence of adjoint functions of the not higher than three order and their computation is made. The case of arbitrary s is the subject of future work.

Key words: Laplace operator, unit ball in R^s, eigenvalues, eigen and adjoint functions for $s = 2$.

Paper received 18/*XI*/2013.
Paper accepted 19/*XII*/2013.

[4]Gerasimov Artyom Viktorovich (gerasimov_artyom@mail.ru), the Dept. of Applied Mathematics, Ogarev Mordovia State University, Saransk, 430005, Russian Federation.
[5]Loginov Boris Vladimirovich (bvllbv@yandex.ru), the Dept. of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, 432027, Russian Federation.
[6]Yuldashev Nurilla Nigmatovich (nurilla1956@mail.ru), the Dept. of Higher Mathematics, Tashkent Institute of Textile and Light Industry, Tashkent, 100100, Uzbekistan Republic.