УДК 512.554

ОЦЕНКА РОСТА КОРАЗМЕРНОСТЕЙ МНОГООБРАЗИЙ ДИАЛГЕБР

© 2014 П.С. Колесников[1], Т.В. Скорая[2]

Получены оценки, связывающие коразмерности многообразий неассоциативных алгебр и соответствующих им многообразий диалгебр.

Ключевые слова: диалгебры, алгебры Лейбница, многообразия линейных алгебр, коразмерности многообразий, рост многообразия.

Введение

Одним из наиболее изученных обобщений алгебр Ли являются алгебры Лейбница — это линейные пространства с билинейной операцией $[x, y]$, удовлетворяющей тождеству $[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]]$ (оператор левого умножения является дифференцированием). В дальнейшем Leib означает многообразие всех алгебр Лейбница над фиксированным полем. Многие алгебраические задачи об алгебрах Лейбница легко решаются с помощью общей конструкции, предложенной в [2], которая связывает данное многообразие Var алгебр с бинарными операциями умножения (ассоциативных, коммутативных, альтернативных, Ли, Пуассона и так далее) с некоторым многообразием di-Var диалгебр — векторных пространств с удвоенным набором операций. В частности, многообразие алгебр Лейбница — это в точности многообразие диалгебр Ли, из этого замечания легко получить (см. [3]) простые доказательства аналогов теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта [8; 16] и теоремы Адо (позднее независимо доказанной в [10]) для алгебр Лейбница.

В данной работе мы рассмотрим обратную задачу: как по данному многообразию диалгебр $\mathfrak{V}$ (в частности, алгебр Лейбница) построить наименьшее многообразие алгебр $\widehat{\mathfrak{V}}$ такое, что $\mathfrak{V} \subseteq$ di-$\widehat{\mathfrak{V}}$. Также мы установим связь между коразмерностями многообразий $\mathfrak{V}$ и $\widehat{\mathfrak{V}}$, из которой, в частности, вытекает отсутствие многообразий алгебр Лейбница промежуточного роста [5].

Пусть $\Bbbk$ — поле характеристики нуль. Алгеброй над полем $\Bbbk$ мы называем линейное пространство над $\Bbbk$, снабженное набором билинейных алгебраических операций $\circ_\omega$, $\omega \in \Omega$. Для произвольной алгебры A будем обозначать через Var(A) многообразие, порожденное алгеброй A. Над полем нулевой характеристики любое многообразие $\mathfrak{M}$ полностью описывается операдой, управляющей этим многообразием [11]. В дальнейшем мы используем тот же символ $\mathfrak{M}$ для обозначения

[1]Колесников Павел Сергеевич (pavelsk@math.nsc.ru), Институт математики СО РАН, лаборатория теории колец, 630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

[2]Скорая Татьяна Владимировна (skorayatv@yandex.ru), кафедра алгебро-геометрических вычислений Ульяновского государственного университета, 432017, Российская Федерация, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.

операды, задающей многообразие $\mathfrak{M}$, а через $\mathfrak{M}\langle X\rangle$ обозначаем свободную алгебру многообразия $\mathfrak{M}$, порожденную множеством X.

Через $\mathfrak{M}(n)$, $n \geqslant 1$, обозначим n-ю компоненту операды $\mathfrak{M}$ — это линейное пространство всех полилинейных многочленов степени n от $x_1, \ldots x_n$ в свободной алгебре $\mathfrak{M}\langle x_1, x_2, \ldots\rangle$. Величина $c_n(\mathfrak{M}) = \dim \mathfrak{M}(n)$ называется n-й коразмерностью многообразия $\mathfrak{M}$.

Пусть дана алгебра Ли L и некоторый L-модуль M. Через $L \ltimes M$ обозначим расщепляемое нулевое расширение алгебры L при помощи M, то есть векторное пространство $L \oplus M$ с операцией

$$[a+u, b+v] = [a,b] + av - bu, \quad a,b \in L, u,v \in M.$$

Хорошо известно, что пространство $L \oplus M$ с «односторонней» операцией

$$[a+u, b+v] = [a,b] + av$$

является (левой) алгеброй Лейбница. В дальнейшем будем обозначать алгебру Лейбница, построенную таким способом, через $L \leftthreetimes M$.

Многие примеры многообразий алгебр Лейбница с критическими свойствами получаются при помощи конструкции $\leftthreetimes$ (см., например [1; 6; 7]), поэтому возникают естественные вопросы:

(а) Как в общем случае связаны многообразия

$$\mathrm{Var}(L \ltimes M) \subseteq \mathrm{Lie} \quad \text{и} \quad \mathrm{Var}(L \leftthreetimes M) \subseteq \mathrm{Leib}?$$

(б) Как связаны между собой скорости роста коразмерностей этих многообразий?

Ответ на эти вопросы может быть получен в общем виде с использованием теории диалгебр, частным случаем которых являются алгебры Лейбница.

В работе [2] было показано, как по любому многообразию $\mathfrak{M}$ алгебр, заданных семейством полилинейных тождеств, построить соответствующее многообразие диалгебр di-$\mathfrak{M}$. В данной работе мы покажем, как по данному многообразию диалгебр $\mathfrak{V}$ построить "обертывающее" многообразие алгебр $\widehat{\mathfrak{V}}$, и получим оценку на коразмерности $c_n(\widehat{\mathfrak{V}})$. Характеристика основного поля $\Bbbk$ всюду предполагается нулевой.

1. Многообразия диалгебр

Приведем основные конструкции общей теории диалгебр, следуя [15].

Пусть Perm — многообразие ассоциативных алгебр, удовлетворяющих тождеству $(xy - yx)z = 0$. Базис пространства $\mathrm{Perm}(n)$ образуют мономы вида $e_i^{(n)} = (x_1 \ldots \hat{x}_i \ldots x_n)x_i$, $i = 1, \ldots, n$ (здесь и ниже $\hat{x}_i$ как обычно означает пропуск i-го множителя).

Например, если G — абелева группа, $P = \Bbbk G$ — ее групповая алгебра, то P с операцией $f \cdot g = \varepsilon(f)g$, где ε — стандартная коединица на групповой алгебре, является алгеброй многообразия Perm.

Частным случаем таких алгебр является двумерная алгебра $P_2 \in \mathrm{Perm}$ ($P_2 \simeq \Bbbk\mathbb{Z}_2$) с базисом e_1, e_2 таким, что

$$e_1 \cdot x = x, \quad e_2 \cdot x = 0, \ \ x \in \{e_1, e_2\}.$$

Аналогичный пример получается из алгебры многочленов $\Bbbk[x]$ относительно операции

$$f(x) \cdot g(x) = f(0)g(x), \quad f, g \in P. \tag{1.1}$$

Обозначим полученную Perm-алгебру через P_0.

Если A — алгебра с набором билинейных умножений $\circ_\omega$, $\omega \in \Omega$, и $P \in \mathrm{Perm}$, то на пространстве $P \otimes A$ можно определить новый (удвоенный) набор билинейных операций $\vdash_\omega$ и $\dashv_\omega$ по правилу

$$(p \otimes a) \vdash_\omega (q \otimes b) = pq \otimes a \circ_\omega b, \quad (p \otimes a) \vdash_\omega (q \otimes b) = qp \otimes a \circ_\omega b,$$

$p, q \in P,\ a, b \in A$.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие алгебр над $\Bbbk$. Тогда через di-$\mathfrak{M}$ обозначим многообразие алгебр над $\Bbbk$ с билинейными операциями $\vdash_\omega$, $\dashv_\omega$, заданное всеми теми тождествами, что выполняются на всех алгебрах вида $P \otimes A$, $A \in \mathfrak{M}$, $P \in \mathrm{Perm}$, то есть

$$\text{di-}\mathfrak{M} = \mathrm{Var}(\{P \otimes A \mid P \in \mathrm{Perm}, A \in \mathfrak{M}\}).$$

Непосредственно из определения вытекает, что операда di-$\mathfrak{M}$ изоморфна произведению Адамара (см. [17]) операд Perm и $\mathfrak{M}$:

$$\text{di-}\mathfrak{M} = \mathrm{Perm} \otimes \mathfrak{M}$$

В работе [15] это равенство было принято за определение di-$\mathfrak{M}$. Ранее в [2] был приведен явный алгоритм, позволяющий построить определяющие тождества многообразия di-$\mathfrak{M}$ для случая одной операции, и было доказано, что данные тождества действительно определяют многообразие, управляемое операдой $\mathrm{Perm} \otimes \mathfrak{M}$.

Пример 1. Для $\mathfrak{M} = \mathrm{Lie}$ с операцией $a \cdot b = [a, b]$ многообразие di-Lie состоит из алгебр с двумя операциями $[a \vdash b]$ и $[a \dashv b]$, связанными соотношением $[a \vdash b] = -[b \dashv a]$. Операция $[a \vdash b]$ удовлетворяет левому тождеству Лейбница, и других независимых тождеств на di-Lie нет. Поэтому di-Lie = Leib.

Пример 2 [12]. Для класса алгебр Пуассона Pois многообразие di-Pois состоит из алгебр с двумя бинарными операциями $(A, \cdot, \{\cdot,\cdot\})$, где $(A, \cdot)$ — алгебра многообразия Perm, $(A, \{\cdot,\cdot\}) \in \mathrm{Leib}$, и выполнены тождества

$$\{xy, z\} = x\{y, z\} + y\{x, z\}, \quad \{x, yz\} = \{x, y\}z + y\{x, z\}.$$

Поскольку $\dim \mathrm{Perm}(n) = n$, из определения 1 вытекает следующая связь коразмерностей:

$$c_n(\text{di-}\mathfrak{M}) = n c_n(\mathfrak{M}). \tag{1.2}$$

Имеет место

Теорема 1 [15]. Для любой алгебры $D \in \text{di-}\mathfrak{M}$ существует алгебра $\hat{D} \in \mathfrak{M}$ такая, что D вкладывается в алгебру $P_0 \otimes \hat{D} \in \text{di-}\mathfrak{M}$.

Здесь P_0 — это алгебра многочленов относительно операции (1.1).

Тогда $P_0 \otimes \hat{D}$ является конформной алгеброй петель над алгеброй $\hat{D}$ [14]. Теорема 1 отражает связь между многообразием di-$\mathfrak{M}$ и классом $\mathfrak{M}$-конформных алгебр в смысле [19], впервые замеченную в случае $|\Omega| = 1$ в [2].

Напомним, что $\hat{D}$ в работе [15] строилась по принципу, предложенному в [18]:

$$\hat{D} = \bar{D} \oplus D,\ \bar{D} = D/\mathrm{span}(a \vdash_\omega b - a \dashv_\omega b \mid a, b \in D, \omega \in \Omega),$$

$$\bar{a} \circ_\omega b = a \vdash_\omega b, \quad a \circ_\omega \bar{b} = a \dashv_\omega b, \quad a, b \in D,$$

$$a \circ_\omega b = 0, \quad a, b \in D.$$

Вложение D в $P_0 \otimes \hat{D}$ осуществлялось следующим образом:

$$a \mapsto 1 \otimes \bar{a} + x \otimes a, \quad a \in D.$$

Легко видеть, что если вместо P_0 рассмотреть алгебру $P_2 \in \mathrm{Perm}$, то отображение

$$D \to P_2 \otimes \hat{D},$$

$$a \mapsto e_1 \otimes \bar{a} + e_2 \otimes a, \quad a \in D,$$

является вложением D в $P_2 \otimes \hat{D}$.

Следствие 1. Если $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}(A_i \mid i \in I)$, то di-$\mathfrak{M} = \mathrm{Var}(P_2 \otimes A_i \mid i \in I)$.

2. Пре-алгебры и тождества диалгебр

Аналогичный общий подход к определению многообразий, управляемых дуальными операдами, был предложен в [9] и [12]. Приведем эквивалентное алгебраическое определение из [13].

Пусть D — алгебра над $\Bbbk$ с набором билинейных операций $\succ_\omega$, $\prec_\omega$, $\omega \in \Omega$, и пусть $P \in \mathrm{Perm}$. Обозначим через $P \boxtimes D$ векторное пространство $P \otimes D$ с операциями $\circ_\omega$, $\omega \in \Omega$, заданными следующим образом:

$$(p \otimes a) \circ_\omega (q \otimes b) = pq \otimes a \succ_\omega b + qp \otimes a \prec_\omega b, \quad p, q \in P, \ a, b \in D.$$

Определение 2. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие алгебр над $\Bbbk$. Тогда через pre-$\mathfrak{M}$ обозначим класс всех таких алгебр D над $\Bbbk$ с удвоенным набором билинейных операций $\succ_\omega$, $\prec_\omega$, что $P \boxtimes D \in \mathfrak{M}$ для любого $P \in \mathrm{Perm}$.

Тождества, определяющие многообразие pre-$\mathfrak{M}$, легко выводятся из определяющих тождеств многообразия $\mathfrak{M}$ по определению.

Пример 3. Пусть $\mathfrak{M} = \mathrm{Com}$ — многообразие ассоциативных коммутативных алгебр. Тогда pre-Com состоит из алгебр с двумя операциями $\succ$ и $\prec$, удовлетворяющими тождествам

$$x \succ y = y \prec x,$$
$$(x \succ y + y \succ x) \succ z = x \succ (y \succ z).$$

Следовательно, пре-коммутативные алгебры можно задавать только одной из операций, например, $ab = a \succ b$, которая удовлетворяет тождеству

$$(xy + yx)z = x(yz).$$

Теорема 2 [12]. Если $\mathfrak{M}$ — бинарная квадратичная операда и $\dim \mathfrak{M}(1) = 1$, то $(\text{pre-}\mathfrak{M})^! = \text{di-}(\mathfrak{M}^!)$, где индекс ! обозначает двойственную в смысле Кожуля операду.

В частности, $(\text{pre-Com})^! = \text{di-}(\mathrm{Com}^!) = \text{di-Lie} = \mathrm{Leib}$, ввиду этого факта пре-коммутативные алгебры часто называются в литературе «алгебрами Цинбеля» (Zinbiel algebra)[3].

Пример 4. Рассмотрим пространство $Z_0 = x\Bbbk[x]$ полиномов от одной переменной x без свободного члена. Определим на базисе этого пространства произведение по правилу

$$x^n \cdot x^m = \frac{1}{n} x^{n+m}.$$

Пространство Z_0 относительно билинейной операции $\cdot$ является пре-коммутативной алгеброй.

Пример 5. (Свободная алгебра Цинбеля [16]) Алгебра pre-Com$\langle X \rangle$ порождена как векторное пространство линейно независимыми мономами

$$(\dots((z_1 z_2) z_3) \dots z_n), \quad z_i \in X.$$

Произведение двух таких мономов вычисляется по правилу

$$(\dots(z_1 z_2) \dots z_n)(\dots(z_{n+1} z_{n+2}) \dots z_{n+m}) =$$

[3] «Zinbiel» — вымышленная фамилия, полученная инвертированием из «Leibniz».

$$= \sum_{\sigma\in S_{n,m-1}} (\ldots(z_{1\sigma}z_{2\sigma})\ldots z_{(n+m-1)\sigma})z_{n+m},$$

где $S_{n,m-1}$ — множество всех перетасовок (shuffles) — таких подстановок $\sigma \in S_{n+m-1}$, что $1\sigma < \ldots < n\sigma$, $(n+1)\sigma < \ldots < (n+m-1)\sigma$.

Пусть $Z \in \text{pre-Com}$, D — алгебра над $\Bbbk$ с набором билинейных операций $\vdash_\omega$ и $\dashv_\omega$, $\omega\in\Omega$. Обозначим через $Z\boxtimes D$ векторное пространство $Z\otimes D$ с операциями умножения $\circ_\omega$, заданными правилом

$$(z\otimes a)\circ_\omega (w\otimes b) = zw\otimes a\vdash_\omega b + wz\otimes a\dashv_\omega b,\quad z,w\in Z,\ a,b\in D. \tag{2.1}$$

Лемма 1. Пусть A — алгебра над $\Bbbk$ с операциями $\circ_\omega$, $\omega\in\Omega$. Тогда для любых $P\in \text{Perm}$, $Z\in\text{pre-Com}$ алгебры $Z\boxtimes(P\otimes A)$ и $(P\boxtimes Z)\otimes A$ изоморфны.

Доказательство. Непосредственные вычисления показывают, что σ_{12} — перестановка 1-й и 2-й компонент тензорного произведения в $Z\otimes P\otimes A$ — является изоморфизмом Ω-алгебр $Z\boxtimes(P\otimes A)$ и $(P\boxtimes Z)\otimes A$.

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие алгебр над $\Bbbk$ с операциями $\circ_\omega$, $\omega\in\Omega$. Тогда для любой алгебры $D\in\text{di-}\mathfrak{M}$ и для любой $Z\in\text{pre-Com}$

$$Z\boxtimes D\in\mathfrak{M}.$$

Доказательство. По теореме 1 любая алгебра $D\in\text{di-}\mathfrak{M}$ вкладывается в $P_2\otimes\hat{D}$, $\hat{D}\in\mathfrak{M}$. Следовательно, $Z\boxtimes D\subseteq Z\boxtimes(P_2\otimes\hat{D})\simeq(P_2\boxtimes Z)\otimes\hat{D}\in\mathfrak{M}$, поскольку $P_2\otimes Z$ — ассоциативная коммутативная алгебра.

Очевидно, что в любая пре-коммутативная алгебра удовлетворяет тождеству $z_1(z_2z_3) = z_2(z_1z_3)$. Отсюда следует, что правонормированный моном

$$(z_1(z_2\ldots(z_{n-1}(z_nz_{n+1}))\ldots))\in\text{pre-Com}(n+1),\quad n\geqslant 1,$$

не меняется от перестановки переменных $z_1,\ldots,z_n$. В дальнейшем нам потребуется следующая

Лемма 3. В любой пре-коммутативной алгебре выполнено тождество

$$\sum_{i=1}^{n}(z_1(z_2\ldots\hat{z}_i\ldots(z_{n-1}(z_nz_i))\ldots))z_{n+1} = (z_1(z_2\ldots(z_nz_{n+1})\ldots))$$

для всех $n\geqslant 1$.

Доказательство. Достаточно вычислить нормальный вид левой и правой частей искомого соотношения по правилу из примера 5. Нетрудно видеть, что результаты совпадают: в обоих случаях получаем

$$\sum_{\sigma\in S_n}(z_{1\sigma}(z_{2\sigma}\ldots(z_{n\sigma}z_{n+1})\ldots)).$$

3. Многообразия, порожденные нулевыми расширениями

Пусть A — алгебра с операциями $\circ_\omega$, $\omega\in\Omega$, принадлежащая некоторому многообразию $\mathfrak{M}$. Говорят, что пространство M является $\mathfrak{M}$-бимодулем над A (в смысле Эйленберга), если заданы линейные отображения $r_\omega : M\otimes A\to M$, $l_\omega : A\otimes M\to M$, $\omega\in\Omega$, такие, что нулевое расширение A при помощи M, то есть прямая сумма пространств $A\oplus M$ с набором билинейных операций

$$u\circ_\omega a = r_\omega(u,a),\quad a\circ_\omega u = l_\omega(a,u),\quad u\circ_\omega v = 0,$$

$a\in A$, $u,v\in M$, является алгеброй многообразия $\mathfrak{M}$. Обозначим построенное по данному правилу нулевое расширение через $A\ltimes M$.

Пусть M — некоторый $\mathfrak{M}$-бимодуль над $A \in \mathfrak{M}$. Обозначим через $A \leftthreetimes M$ алгебру с операциями $\vdash_\omega$, $\dashv_\omega$, $\omega \in \Omega$, построенную на пространстве $A \oplus M$ по правилу

$$a \vdash_\omega b = a \dashv_\omega b = a \circ_\omega b,$$
$$a \vdash_\omega u = l_\omega(a,u), \quad u \vdash_\omega a = 0,$$
$$a \dashv_\omega u = 0, \quad u \dashv_\omega a = r_\omega(a,u),$$
$$u \dashv_\omega v = u \vdash_\omega v = 0,$$

$a, b \in A$, $u, v \in M$. Заметим, что $A \leftthreetimes M$ лежит в многообразии di-$\mathfrak{M}$. Действительно, отображение

$$A \leftthreetimes M \to P_2 \otimes (A \ltimes M),$$
$$a + u \mapsto e_1 \otimes a + e_2 \otimes u, \quad a \in A, \ u \in M,$$

является вложением алгебр с операциями $\vdash_\omega$, $\dashv_\omega$, $\omega \in \Omega$.

Обозначим через Alg многообразие всех алгебр с операциями $\circ_\omega$, $\omega \in \Omega$, а через di-Alg$_0$ — многообразие, управляемое операдой $\mathrm{Perm} \otimes \mathrm{Alg}$: оно состоит из всех алгебр с операциями $\vdash_\omega$, $\dashv_\omega$, $\omega \in \Omega$, удовлетворяющих тождествам

$$(x \vdash_\omega y - x \dashv_\omega y) \vdash_\mu z = x \dashv_\mu (y \vdash_\omega z - y \dashv_\omega z) = 0,$$

$\omega, \mu \in \Omega$.

Лемма 4. Пусть $Z = \text{pre-Com}\langle z_1, z_2, \ldots\rangle$, $A = \text{di-Alg}_0\langle a_1, a_2, \ldots\rangle$ — свободные алгебры в соответствующих многообразиях. Тогда для любого $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \in \mathrm{Alg}(n)$

$$f(z_1 \otimes a_1, \ldots, z_n \otimes a_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (z_1(z_2 \ldots \hat{z}_i \ldots (z_{n-1}(z_n z_i)) \ldots)) \otimes (e_i^{(n)} \otimes f)(a_1, \ldots, a_n) \tag{3.1}$$

в алгебре $Z \boxtimes A$.

Доказательство. Соотношение (3.1) тривиально для $n = 1$ и по определению (см. (2.1)) выполняется для $n = 2$.

Заметим, что если равенство (3.1) верно для некоторого $f \in \mathrm{Alg}(n)$, то оно остается верным и для $f^\sigma(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{1\sigma}, \ldots, x_{n\sigma})$, $\sigma \in S_n$. Поэтому достаточно доказать лемму в случае, когда f имеет вид

$$f = \mathrm{Comp}(x_1 \circ_\omega x_2, u, v), \quad u \in \mathrm{Alg}(k), \ v \in \mathrm{Alg}(n-k), \ 1 \leqslant k \leqslant n-1, \ \omega \in \Omega,$$

где Comp означает композицию в операде Alg.

Обозначим

$$\bar{z}^i_{a,b} = (z_{a+1}(z_{a+2} \ldots \hat{z}_i \ldots (z_{b-1}(z_b z_i)) \ldots)), \quad 0 \leqslant a \leqslant i \leqslant b.$$

По предположению индукции допустим, что (3.1) выполнено для u и v. Тогда

$$f(z_1 \otimes a_1, \ldots, z_n \otimes a_n) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{k} \bar{z}^i_{0,k} \otimes (e_i^{(k)} \otimes u)(a_1, \ldots, a_n) \right) \circ_\omega \left(\sum_{j=1}^{n-k} \bar{z}^{k+j}_{k,n} \otimes (e_j^{(n-k)} \otimes v)(a_{k+1}, \ldots, a_n) \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n-k} \bar{z}^i_{0,k} \bar{z}^{k+j}_{k,n} \otimes (e_i^{(k)} \otimes u)(a_1, \ldots, a_n) \vdash_\omega (e_j^{(n-k)} \otimes v)(a_{k+1}, \ldots, a_n) +$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n-k}\bar z_{k,n}^{k+j}\bar z_{0,k}^{i}\otimes(e_i^{(k)}\otimes u)(a_1,\dots,a_n)\dashv_\omega (e_j^{(n-k)}\otimes v)(a_{k+1},\dots,a_n).$$

По определению композиции в di-Alg$_0$ [2]

$$(e_i^{(k)}\otimes u)(a_1,\dots,a_k)\vdash_\omega (e_j^{(n-k)}\otimes v)(a_{k+1},\dots,a_n)=(e_{k+j}^{(n)}\otimes f)(a_1,\dots,a_n),$$

$$(e_i^{(k)}\otimes u)(a_1,\dots,a_k)\dashv_\omega (e_j^{(n-k)}\otimes v)(a_{k+1},\dots,a_n)=(e_i^{(n)}\otimes f)(a_1,\dots,a_n).$$

Поэтому

$$f(z_1\otimes a_1,\dots,z_n\otimes a_n)=\sum_{j=1}^{n-k}\left(\sum_{i=1}^{k}\bar z_{0,k}^{i}\bar z_{k,n}^{k+j}\right)\otimes(e_{k+j}^{(n)}\otimes f)(a_1,\dots,a_n)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n-k}\bar z_{k,n}^{k+j}\bar z_{0,k}^{i}\right)\otimes(e_i^{(n)}\otimes f)(a_1,\dots,a_n),$$

и для завершения доказательства достаточно применить лемму 3:

$$\sum_{i=1}^{k}\bar z_{0,k}^{i}\bar z_{k,n}^{k+j}=\bar z_{0,n}^{k+j},\quad \sum_{j=1}^{n-k}\bar z_{k,n}^{k+j}=\bar z_{0,k}^{i}\bar z_{0,n}^{i}.$$

Предложение 1. Если $Z=\text{pre-Com}\langle z_1,z_2,\dots,z_m\rangle$, то

$$\mathrm{Var}(Z\boxtimes(A\curlywedge M))=\mathrm{Var}(A\ltimes M).$$

Доказательство. Поскольку $A\curlywedge M\subseteq P_2\otimes(A\ltimes M)$, то по следствию 1 $\mathrm{Var}(A\curlywedge M)\subseteq \mathrm{Var}(P_2\otimes(A\ltimes M))=\text{di-Var}(A\ltimes M)$. Поэтому

$$\mathrm{Var}(Z\boxtimes(A\curlywedge M))\subseteq\mathrm{Var}(A\ltimes M).\tag{3.2}$$

Допустим, вложение (3.2) строгое. Тогда найдется $f=f(x_1,\dots,x_n)\in\mathfrak{M}(n)$ такое, что тождество $f=0$ выполнено на $Z\boxtimes(A\curlywedge M)$, но не выполнено на $A\ltimes M$.

Тогда по лемме 4 диалгебра $A\curlywedge M$ удовлетворяет всем тождествам $e_i^{(n)}\otimes f=$ $=0$ для $i=1,\dots,n$. С другой стороны, для любых $a_1,\dots,a_n\in A$

$$A\ni f(a_1,\dots,a_n)=(e_i^{(n)}\otimes f)(a_1,\dots,a_n)\in A\curlywedge M$$

по определению $A\curlywedge M$ (значение этого выражения не зависит от i). Более того,

$$A\ltimes M\ni f(a_1,\dots,a_{i-1},u,a_{i+1},\dots,a_n)=(e_i^{(n)}\otimes f)(a_1,\dots,u,\dots,a_n)\in A\curlywedge M$$

при $a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_n\in A$, $u\in M$. При двух и более значениях переменных из M значение многочлена f обращается в нуль. Следовательно, $f=0$ тождественно на $A\ltimes M$, — противоречие.

Теорема 3. Для любой алгебры $A\in$ di-Alg$_0$

$$\mathrm{Var}(Z\boxtimes A)=\mathrm{Var}(\hat A)$$

для $Z=\text{pre-Com}\langle z_1,z_2,\dots,z_m\rangle$.

Доказательство. Согласно общей конструкции [15] $\hat A=\bar A\ltimes A$. Заметим, что $A\hookrightarrow\bar A\curlywedge A$ по правилу $a\mapsto\bar a+a$. Следовательно,

$$\mathrm{Var}(Z\boxtimes A)\subseteq\mathrm{Var}(Z\boxtimes(\bar A\curlywedge A))=\mathrm{Var}(\bar A\ltimes A)=\mathrm{Var}(\hat A)$$

по предложению 1.

С другой стороны, пусть $f \in \mathrm{Alg}(n)$ — некоторое тождество на алгебре $Z \boxtimes A$. Тогда по лемме 4 A удовлетворяет всем тождествам $e_i^{(n)} \otimes f = 0$, $i = 1, \ldots, n$, и, следовательно, $f = 0$ тождественно на $\bar{A} \ltimes A = \hat{A}$. Таким образом, $\mathrm{Var}(\hat{A}) \subseteq$ $\subseteq \mathrm{Var}(Z \boxtimes A)$.

Пусть $\mathfrak{V} \subseteq di - Alg_0$ — некоторое многообразие диалгебр (например, алгебр Лейбница). Обозначим через $\widehat{\mathfrak{V}}$ подмногообразие в Alg, порожденное классом всех алгебр вида $Z \boxtimes A$, $Z \in$ pre-Com, $A \in \mathfrak{V}$.

Следствие 2. Для данного многообразия $\mathfrak{V} \subseteq \mathrm{Alg}_0$ класс $\widehat{\mathfrak{V}}$ является наименьшим среди всех таких многообразий $\mathfrak{M} \subseteq \mathrm{Alg}$, что $\mathfrak{V} \subseteq \text{di-}\mathfrak{M}$.

Доказательство. С одной стороны, если $A \in \mathfrak{V}$, то $Z \boxtimes A \in \widehat{\mathfrak{V}}$ и по теореме 3 $\hat{A} \in \widehat{\mathfrak{V}}$. Далее, $A \subseteq P_2 \otimes \hat{A} \in \text{di-}\widehat{\mathfrak{V}}$ влечет $\mathfrak{V} \subseteq \text{di-}\widehat{\mathfrak{V}}$.

С другой стороны, если $\mathfrak{V} \subseteq \text{di-}\mathfrak{M}$ для некоторого $\mathfrak{M} \subseteq \mathrm{Alg}$, то для всякого $f \in \mathrm{Alg}(n)$ такого, что $f = 0$ тождественно на $\mathfrak{M}$, любая алгебра $A \in \mathfrak{V}$ удовлетворяет тождествам $e_i^{(n)} \otimes f = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Но тогда по лемме 4 $Z \boxtimes A$ удовлетворяет тождеству $f = 0$ и, следовательно, $\widehat{\mathfrak{V}} \subseteq \mathfrak{M}$.

4. Рост коразмерностей

В этом параграфе мы применим полученные результаты для оценки роста коразмерностей многообразия $\widehat{\mathfrak{V}}$ для данного многообразия $\mathfrak{V} \subseteq \text{di-Alg}_0$.

Теорема 4. Пусть $\mathfrak{V} \subseteq \text{di-Alg}_0$ — некоторое многообразие диалгебр. Тогда

$$(C1) \qquad c_n(\mathfrak{V}) \leqslant n c_n(\widehat{\mathfrak{V}});$$

$$(C2) \qquad c_n(\widehat{\mathfrak{V}}) \leqslant n c_n(\mathfrak{V}).$$

Следовательно, многообразие $\mathfrak{V}$ имеет полиномиальный (экспоненциальный) рост коразмерностей тогда и только тогда, когда таково же $\widehat{\mathfrak{V}}$.

Доказательство. (C1) По следствию 2

$$\mathfrak{V} \subseteq \text{di-}\widehat{\mathfrak{V}},$$

и утверждение (C1) следует из соотношения (1.2).

(C2) Пусть $A = \mathfrak{V}\langle a_1, a_2, \ldots\rangle$ — свободная алгебра многообразия $\mathfrak{V}$, порожденная счетным множеством $\{a_1, a_2, \ldots\}$. Пусть также $Z = \text{pre-Com}\langle z_1, z_2, \ldots\rangle$.

Обозначим через Φ_n линейное отображение $\mathrm{Alg}(n) \to Z \boxtimes A$, действующее по следующему правилу:

$$\mathrm{Alg}(n) \ni f = f(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(z_1 \otimes a_1, \ldots, z_n \otimes a_n) \in Z \boxtimes A.$$

Заметим, что если $\Phi_n(f) = 0$, то f является тождеством на любой алгебре вида $Y \boxtimes B$, $Y \in$ pre-Com, $Y \in \mathfrak{V}$, то есть $\operatorname{Ker} \Phi_n$ содержится в вербальном идеале многообразия $\widehat{\mathfrak{V}}$.

Следовательно,

$$c_n(\widehat{\mathfrak{V}}) \leqslant \dim \mathrm{Alg}(n)/\operatorname{Ker} \Phi_n = \dim \Phi_n(\mathrm{Alg}(n)).$$

По лемме 4 $\Phi_n(\mathrm{Alg}(n)) \subseteq Z^{(n)} \otimes \mathfrak{V}(n)$, где $Z^{(n)}$ — линейная оболочка всех правонормированных слов вида $(z_{1\sigma}(z_{2\sigma} \ldots (z_{(n-1)\sigma} z_{n\sigma}) \ldots))$, $\sigma \in S_n$. Поскольку $\dim Z^{(n)} =$ $= n$, получаем

$$c_n(\widehat{\mathfrak{V}}) \leqslant \dim \Phi_n(\mathrm{Alg}(n)) \leqslant n \dim \mathfrak{V}(n) = n c_n(\mathfrak{V}).$$

Следствие 3. Если для данного многообразия $\mathfrak{M} \subseteq \mathrm{Alg}$ не существует подмногообразий промежуточного роста, то и в di-$\mathfrak{M}$ нет подмногообразий промежуточного роста.

Обратное утверждение очевидно ввиду того, что $\mathfrak{M} \subseteq$ di-$\mathfrak{M}$.

Доказательство. Если для некоторого $\mathfrak{V} \subseteq$ di-$\mathfrak{M}$ последовательность коразмерностей $c_n(\mathfrak{V})$ имеет субэкспоненциальный рост, то такова же $c_n(\widehat{\mathfrak{V}})$. Поскольку $\widehat{\mathfrak{V}} \subseteq \mathfrak{M}$, $c_n(\widehat{\mathfrak{V}})$ должно мажорироваться полиномом от n. Но тогда

$$c_n(\mathfrak{V}) \leqslant c_n(\text{di-}\widehat{\mathfrak{V}}) \leqslant nc_n(\widehat{\mathfrak{V}}),$$

то есть $c_n(\mathfrak{V})$ имеет полиномиальный рост.

В частности, отсутствие многообразий алгебр Ли промежуточного роста [4] влечет отсутствие многообразий алгебр Лейбница промежуточного роста [5].

Литература

[1] Абанина Л.Е., Рацеев С.М. Многообразие алгебр Лейбница, связанное со стандартными тождествами // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2005. № 6(40). С. 36–50.

[2] Колесников П.С. Многообразия диалгебр и конформные алгебры // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49. № 2. С. 323–340.

[3] Колесников П.С. Конформные представления алгебр Лейбница // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49. № 3. С. 540–547.

[4] Мищенко С.П. Многообразия алгебр Ли со слабым ростом последовательности коразмерностей // Вестник МГУ. 1982. № 5. С. 63–66.

[5] Мищенко С.П., Череватенко О.И. Многообразия алгебр Лейбница слабого роста // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2006. № 9(49). С. 19–23.

[6] Мищенко С.П., Череватенко О.И. Необходимые и достаточные условия полиномиальности роста многообразия алгебр Лейбница // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12. № 8. С. 207–215.

[7] Скорая Т.В., Фролова Ю.Ю. О некоторых многообразиях алгебр Лейбница // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2011. № 5(86). С. 71–80.

[8] Aymon M., Grivel P.-P. Un théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt pour les algèbres de Leibniz // Comm. Algebra. 2003. V. 31. № 2. P. 527–544.

[9] Splitting of operations, Manin products, and Rota—Baxter operators / C. Bai [et al.] // Int. Math. Res. Notices. 2013. № 3. P. 485–524.

[10] Barnes D. W. Faithful representations of Leibniz algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 2013. V. 141. P. 2991–2995.

[11] Ginzburg V., Kapranov M. Koszul duality for operads // Duke Math. J. 1994. V. 76. № 1. P. 203–272.

[12] Gubarev V.Yu., Kolesnikov P.S. Embedding of dendriform algebras into Rota-Baxter algebras // Central European Journal of Mathematics. 2013. V. 11. № 2. P. 226–245.

[13] Gubarev V.Yu., Kolesnikov P.S. Operads of decorated trees and their duals // preprint (2013).

[14] Kac V.G. Vertex algebras for beginners // University Lecture Series. Providence, RI: AMS, 1998. V. 10.

[15] Kolesnikov P.S., Voronin V.Yu. On special identities for dialgebras // Linear and Multilinear Algebra. 2013. V. 61. № 3. P. 377–391.

[16] Loday J.-L. Dialgebras // Dialgebras and related operads. Lectures Notes in Math. Berlin: Springer-Verlag, 2001. V. 1763. P. 1–61.

[17] Loday J.-L., Vallette B. Algebraic Operads // Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Berlin: Springer-Verlag, 2012. V. 346.

[18] Pozhidaev A. 0-dialgebras with bar-unity, Rota-Baxter and 3-Leibniz algebras // Groups, Rings and Group Rings (ed. by A. Giambruno [et al.]). Providence, RI: AMS, 2009. P. 245–256.

[19] Roitman M. On free conformal and vertex algebras // J. Algebra. 1999. V. 217. № 2. P. 496–527.

References

[1] Abanina L.E., Ratseev S.M. Variety of Leibniz algebras connected with standard identities // Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvennonauchnaya Seriya. 2005. № 6(40). P. 36–50.

[2] Kolesnikov P.S. Varieties of dialgebras and conformal algebras // Sib. Math. Zhurnal. 2008. V. 49. № 2. P. 323–340.

[3] Kolesnikov P.S. Conformal representations of Leibniz algebras // Sib. Math. Zhurnal. 2008. V. 49. № 3. P. 540–547.

[4] Mishchenko S.P. Varieties of Lie algebras with weak growth of sequence of codimensions // Vestnik MGU. 1982. № 5. P. 63–66.

[5] Mishchenko S.P., Cherevatenko O.Iv. Varieties of Leibniz algebras of weak growth // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaya Seriya. 2006. № 9(49). P. 19–23.

[6] Mishchenko S.P., Cherevatenko O.Iv. Necessary and sufficient conditions for a variety of Leibniz algebras to have polynomial growth // Fundamental'naya i prikladnaya matematika. 2006. V. 12. № 8. P. 207–215.

[7] Skoraya T.V., Frolova Yu.Yu. About some varieties of Leibniz algebras // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaya Seriya. 2011. № 5(86). P. 71–80.

[8] Aymon M., Grivel P.-P. Un théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt pour les algèbres de Leibniz // Comm. Algebra. 2003. V. 31. № 2. P. 527–544.

[9] Splitting of operations, Manin products, and Rota—Baxter operators / C. Bai [et al.] // Int. Math. Res. Notices. 2013. № 3. P. 485–524.

[10] Barnes D.W. Faithful representations of Leibniz algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 2013. V. 141. P. 2991–2995.

[11] Ginzburg V., Kapranov M. Koszul duality for operads // Duke Math. J. 1994. V. 76. № 1. P. 203–272.

[12] Gubarev V.Yu., Kolesnikov P.S. Embedding of dendriform algebras into Rota-Baxter algebras // Central European Journal of Mathematics. 2013. V. 11. № 2. P. 226–245.

[13] Gubarev V.Yu., Kolesnikov P.S. Operads of decorated trees and their duals // preprint (2013).

[14] Kac V.G. Vertex algebras for beginners // University Lecture Series. Providence, RI: AMS, 1998. V. 10.

[15] Kolesnikov P.S., Voronin V.Yu. On special identities for dialgebras // Linear and Multilinear Algebra. 2013. V. 61. № 3. P. 377–391.

[16] Loday J.-L. Dialgebras // Dialgebras and related operads. Lectures Notes in Math. Berlin: Springer-Verlag, 2001. V. 1763. P. 1–61.

[17] Loday J.-L., Vallette B. Algebraic Operads // Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Berlin: Springer-Verlag, 2012. V. 346.

[18] Pozhidaev A. 0-dialgebras with bar-unity, Rota-Baxter and 3-Leibniz algebras // Groups, Rings and Group Rings (ed. by A. Giambruno [et al.]). Providence, RI: AMS, 2009. P. 245–256.

[19] Roitman M. On free conformal and vertex algebras // J. Algebra. 1999. V. 217. № 2. P. 496–527.

Поступила в редакцию 6/*II*/2014;
в окончательном варианте — 6/*II*/2014.

CODIMENSIONS GROWTH ESTIMATE OF THE VARIETIES OF DIALGEBRAS

 P.S. Kolesnikov[4], T.V. Skoraya[5]

The estimates connecting codimensions of varieties of non-associative algebras and corresponding varieties of dialgebras are obtained.

Key words: dialgebras, Leibniz algebras, varieties of linear algebras, codimensions of varieties, growth of variety.

Paper received 6/*II*/2014.
Paper accepted 6/*II*/2014.

[4]Kolesnikov Pavel Sergeevich (`pavelsk@math.nsc.ru`), Laboratory of Rings Theory, Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

[5]Skoraya Tatyana Vladimirovna (`skorayatv@yandex.ru`), the Dept. of Algebra and Geometrical Calculations, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, 432017, Russian Federation.