УДК 512.5

БАЗИС ПОЛИЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА $\widetilde{\mathbf{V}}_1$[1]

© 2014 С.П. Мищенко, Ю.Р. Пестова[2]

В случае нулевой характеристики основного поля многообразие алгебр Лейбница, определенное тождеством $x_1(x_2x_3)(x_4x_5) \equiv 0$, имеет почти полиномиальный рост. В работе мы продолжаем исследование этого многообразия, в частности, строим базисы полилинейных частей.

Ключевые слова: алгебра Лейбница, многообразие, почти полиномиальный рост, базис полилинейной части.

1. Предварительные сведения

На протяжении всей статьи характеристика основного поля Φ равна нулю. Все неопределяемые понятия можно найти в книге [1].

Напомним, что алгебра — это линейное пространство с билинейным умножением. Алгебра Лейбница — это алгебра, в которой выполняется тождество

$$(xy)z \equiv (xz)y + x(yz). \tag{1.1}$$

Если подставить $z = y$, то получим тождество $x(y^2) = x(yy) \equiv 0$, линеаризация которого имеет вид

$$x(yz) \equiv -x(yz). \tag{1.2}$$

Легко показать и хорошо известно, что если в алгебре Лейбница также выполняется тождество антикоммутативности, то есть $xx \equiv 0$, то она является алгеброй Ли. В алгебре Лейбница не выполняется тождество ассоциативности, поэтому необходимо следить за порядком выполнения произведений. Однако тождество (1.1) позволяет выразить любое произведение элементов алгебры в виде линейной комбинации левонормированных произведений. Этим фактом мы будем пользоваться на протяжении всей статьи, поэтому договоримся в случае левонормированного произведения опускать скобки, то есть использовать запись $(((a_1a_2)a_3)\cdots a_n) = a_1a_2\cdots a_n$. Под правилом дифференцирования будет понимать использование тождества (1.1), согласно которому линейный оператор умножения справа на фиксированный элемент является дифференцированием алгебры. Договоримся использовать для обозначения оператора умножения справа на элемент, например y, соответствующую заглавную букву Y, то есть $xY = xy$. Это обозначение в некоторых случаях оказывается удобным. Например, левонормированное

[1]Работа частично поддержана грантом РФФИ 13-01-00103 а.

[2]Мищенко Сергей Петрович (mishchenkosp@mail.ru), Пестова Юлия Рямильевна (fyathut28@rambler.ru), кафедра алгебро-геометрических вычислений Ульяновского государственного университета, 432017, Российская Федерация, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42.

произведение $xy\ldots y$ степени $m+1$ нельзя записать как xy^m, но можно записать в таком виде xY^m, где Y^m — степень линейного оператора. Кроме того, будем использовать специальный символ над образующими (черту или волну) для обозначения кососимметризации. Например,

$$x_0\bar{x}_1\tilde{y}_1\bar{x}_2\tilde{y}_2\tilde{y}_3\bar{x}_3\bar{x}_4 = \sum_{p\in S_4, q\in S_3} (-1)^p(-1)^q x_0 x_{p(1)} y_{q(1)} x_{p(2)} y_{q(2)} y_{q(3)} x_{p(3)} x_{p(4)}\,,$$

где S_m — симметрическая группа, а $(-1)^r$ — четность перестановки r. Под альтернированием элемента по группам образующих будем понимать следующее. Например, результатом альтернирования монома $x_0x_1y_1x_2y_2y_3x_3x_4$ по наборам образующих x_1, x_2, x_3, x_4 и y_1, y_2, y_3 является элемент $x_0\bar{x}_1\tilde{y}_1\bar{x}_2\tilde{y}_2\tilde{y}_3\bar{x}_3\bar{x}_4$.

Напомним, что совокупность всех линейных алгебр над полем Φ, в которых выполняется фиксированный набор тождественных соотношений, называется многообразием этих алгебр над заданным полем. В этой статье мы продолжим изучение многообразия алгебр Лейбница $\widetilde{\mathbf{V}}_1$, определенного тождеством

$$x_1(x_2x_3)(x_4x_5) \equiv 0. \tag{1.3}$$

Многообразие $\widetilde{\mathbf{V}}_1$ было достаточно подробно исследовано в работе [2]. В частности, в этой работе дано полное описание строения пространства полилинейных элементов относительно свободной алгебры многообразия как модуля симметрической группы. Было показано, что многообразие $\widetilde{\mathbf{V}}_1$ имеет почти полиномиальный рост, то есть последовательность коразмерностей $\widetilde{\mathbf{V}}_1$ не может быть ограничена какой-либо полиномиальной функцией, но любое собственное подмногообразие $\widetilde{\mathbf{V}}_1$ имеет полиномиальный рост. Целью данной работы является построение базисов полилинейных частей. Отметим, что по своим свойствам многообразие $\widetilde{\mathbf{V}}_1$ похоже на многообразие алгебр Ли $\mathbf{N_2A}$, для которого авторами недавно были получены аналогичные результаты [3].

Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие алгебр Лейбница, а $F(X, \mathbf{V})$ — относительно свободная алгебра этого многообразия со счетным множеством свободных образующих $X = \{x_1,\ x_2, \ldots\}$. Множество всех полилинейных элементов от $x_1, \ldots, x_n$ в алгебре $F(X, \mathbf{V})$ обозначим через $P_n(\mathbf{V})$ и определим естественным способом на нем структуру модуля симметрической группы S_n. Результат действия перестановки $p \in S_n$ на полилинейном левонормированном мономе $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n} \in P_n(\mathbf{V})$ равен $x_{p(i_1)}x_{p(i_2)}\ldots x_{p(i_n)}$. Еще в середине прошлого века в работе [4] было показано, что в случае нулевой характеристики основного поля любое тождество эквивалентно системе полилинейных тождеств. Таким образом, вся информация о многообразии $\mathbf{V}$ содержится в пространствах $P_n(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \ldots$, так называемых *полилинейных частях* многообразия. Поэтому исследование структуры S_n-модуля $P_n(\mathbf{V})$ играет важную роль при изучении многообразия $\mathbf{V}$. Модуль $P_n(\mathbf{V})$ является вполне приводимым, рассмотрим разложение его характера в целочисленную комбинацию неприводимых характеров χ_λ с кратностями m_λ, где $\lambda \vdash n$ — разбиение числа n,

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \chi(P_n(\mathbf{V})) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda \chi_\lambda.$$

По сложившейся традиции характер модуля $P_n(\mathbf{V})$ называют *n-м кохарактером* многообразия $\mathbf{V}$.

Обозначим через $c_n(\mathbf{V})$ размерность пространства $P_n(\mathbf{V})$. Опять же традиционно последовательность чисел $c_n(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \ldots$, называют *последовательностью коразмерностей* вербального идеала многообразия или просто последовательностью коразмерностей многообразия. Эта последовательность является одной из основных числовых характеристик многообразия. Важными числовыми характеристиками являются также *кратности* и *последовательность кодлин* $l_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda$, $n = 1, 2, \ldots$, то есть последовательность длин модулей $P_n(\mathbf{V})$. Обозначим через d_λ размерность соответствующего разбиению λ неприводимого модуля, то есть $d_\lambda = \deg \chi_\lambda$. Понятно, что имеет место такое равенство $c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda d_\lambda$.

Асимптотическое поведение размерности пространства $P_n(\mathbf{V})$ определяет рост многообразия. Напомним, что рост многообразия называется *полиномиальным*, если существуют такие числа C, k, что для любого n выполняется неравенство $c_n(\mathbf{V}) < Cn^k$. Говорят, что многообразие $\mathbf{V}$ имеет *почти полиномиальный рост*, если рост самого многообразия не является полиномиальным, но рост любого собственного подмногообразия является полиномиальным. В классе алгебр Ли существует ровно четыре разрешимых многообразия почти полиномиального роста и найдено одно неразрешимое многообразие почти полиномиального роста (см. по этому поводу обзор [5]). В случае алгебр Лейбниц, кроме упомянутого многообразия почти полиномиального роста, найдены еще три многообразия с аналогичным экстремальным свойством. Первое из них подробно изучено в работе [6], а некоторые свойства двух других можно найти в работах [7–9].

Если последовательность коразмерностей экспоненциально ограничена, то можно определить верхнюю и нижнюю экспоненту многообразия как верхний и нижний предел следующих последовательностей:

$$\overline{Exp}(\mathbf{V}) = \lim\sup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}, \quad \underline{Exp}(\mathbf{V}) = \lim\inf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}.$$

В случае их совпадения пишут $Exp(\mathbf{V}) = \overline{Exp}(\mathbf{V}) = \underline{Exp}(\mathbf{V})$ и называют экспонентой многообразия $\mathbf{V}$.

2. Свойства многообразия алгебр Лейбница $\widetilde{\mathbf{V}}_1$

Перейдем к изложению результатов о свойствах многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_1$. Пусть e_{ij} — матричные единицы, а $UT_2 = UT_2(\Phi) = \Phi e_{11} + \Phi e_{12} + \Phi e_{22}$ — ассоциативная алгебра верхнетреугольных матриц размера 2×2 над основным полем Φ. Обозначим через UT_2^0 алгебру тех же матриц только относительно другого умножения, когда результат произведения двух матриц равен нулю, то есть для любых $a_1^0, a_2^0 \in UT_2^0$ произведение $a_1^0 a_2^0 = 0$ равно нулю. Пусть теперь

$$U = UT_2^0 \oplus UT_2$$

является прямой суммой двух векторных пространств UT_2^0 и UT_2. Зададим на U структуру алгебры, определяя произведение в ней следующим образом:

$$(a_1^0 + a_1)(a_2^0 + a_2) = (a_1^0 a_2)^0 + [a_1, a_2],$$

где $[a_1, a_2] = a_1a_2 - a_2a_1$ коммутатор матриц, а $e_{ij}^0 e_{hl} = \begin{cases} e_{il} & \text{, если } j = h \text{ ,} \\ 0 & \text{, если } j \neq h. \end{cases}$

В работе [2] показано, что алгебра U является алгеброй Лейбница, которая порождает многообразие $\widetilde{\mathbf{V}}_1$. Там же из следствия 2.3 и леммы 3.3 получаем, что для коразмерностей исследуемого многообразия верна формула

$$c_n(\widetilde{\mathbf{V}}_1) = 2^{n-2}n(n-3) + 2n.$$

Таким образом, экспонента равна двум, $Exp(\widetilde{\mathbf{V}}_1) = 2$. Приведем также полученные в работе [2] результаты, касающиеся кратностей и кодлины. Для кодлины при $n > 2$ выполнены формулы: $l_n(\widetilde{\mathbf{V}}_1) = n^2 - \frac{7}{2}n + 6$, если n четное, и $l_n(\widetilde{\mathbf{V}}_1) = n^2 - \frac{7}{2}n + \frac{11}{2}$, если n нечетное. Если же $\chi_n(\widetilde{\mathbf{V}}_1) = \sum_{\lambda\vdash n} \widetilde{m}_\lambda \chi_\lambda$ является n-м кохарактером многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_1$, то кратности вычисляются по следующим формулам:

$$\widetilde{m}_\lambda = \begin{cases} q+1, & \text{если } \lambda = (p+q+1, p+1, 1, 1),\ (p+q+2, p+2, 2),\ (q+1, 1); \\ 2q+1, & \text{если } \lambda = (q+1, 1, 1); \\ 2q+2, & \text{если } \lambda = (p+q, p),\ p \geqslant 2; \\ 3q+3, & \text{если } \lambda = (p+q+1, p+1, 1),\ p > 0; \\ 1, & \text{если } \lambda = (n); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для получения новых результатов нам потребуется такая несложная лемма.

Лемма. В многообразии алгебр Лейбница $\widetilde{\mathbf{V}}_1$ выполняются следующие тождественные соотношения:

$$(xx_{p(1)} \dots x_{p(k)})(zty_{q(1)} \dots y_{q(m)}) \equiv (xx_1 \dots x_k)(zty_1 \dots y_m), \tag{2.1}$$

где $p \in S_k,\ q \in S_m$.

Доказательство. Достаточно показать, что можно в первой скобке менять местами любые два соседних элемента, начиная со второго места, а во второй скобке — начиная с третьего. Пусть, например, в первой скобке нам нужно поменять местами два последних элемента. Тогда, используя правило дифференцирования по тождеству (1.1), получим

$$(xx_{p(1)} \dots x_{p(k-1)}x_{p(k)})(zty_{q(1)} \dots) \equiv (xx_{p(1)} \dots x_{p(k)}x_{p(k-1)})(zty_{q(1)} \dots) + \left(xx_{p(1)} \dots x_{p(k-2)}(x_{p(k)}x_{p(k-1)})\right)(zty_{q(1)} \dots)$$

Согласно тождеству (1.3), второе слагаемое равно нулю. В общем случае доказательство проводится аналогичным образом. Лемма доказана.

Заметим, что из леммы следует, что наличие пары альтернированных образующих начиная со второй позиции внутри первой скобки или во второй скобке, начиная с третьей позиции, влечет равенство элемента нулю.

3. Базис полилинейной части многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_1$

Сформулируем новый результат, в котором будет предъявлен базис полилинейной части многообразия.

Теорема. Базис полилинейной части $P_n(\widetilde{\mathbf{V}}_1)$ состоит из элементов вида:

$$x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_n}, \tag{3.1}$$

где $i_2 > \dots > i_n$;

$$(x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_{n-k}})(x_{j_1}x_{j_2} \dots x_{j_k}), \tag{3.2}$$

где $k = 2, \dots, (n-1),\ i_2 > \dots > i_{n-k},\ j_1 < j_2$ и $j_2 > j_3 > \dots > j_k$.

Доказательство. Так как любой элемент полилинейной части является линейной комбинацией левонормированных, достаточно рассмотреть левонормированный элемент $x_{j_1}x_{j_2} \dots x_{j_n}$.

Используя тождество (1.1), получим $x_{j_1}x_{j_2} \dots x_{j_n} = x_{j_1}x_{i_2} \dots x_{i_n} + w$, где $i_2 > \dots > i_n$, а w является линейной комбинацией элементов вида

$$x_{j_1} \dots x_{j_m}(x_i x_j)x_{k_1} \dots x_{k_t}, \tag{3.3}$$

в которых $m \geqslant 1$, $t \geqslant 0$, $m+t=n-2$, а множество $\{j_1,\ldots,j_m,i,j,k_1,\ldots,k_t\}$ совпадает с начальным отрезком натурального ряда $\{1,\ldots,n\}$. Отметим, что первое слагаемое является элементом из множества (3.1).

Рассмотрим элемент (3.3). Дифференцируя в нем образующими x_{k_s}, $s = 1,\ldots,t$, получим линейную комбинацию элементов вида:

$$(x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{n-k}})(x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_k}),$$

где $k \geqslant 2$ и $n-k \geqslant 1$. Применяя к этим элементам тождества (1.1) и (1.2), которые позволяют внутри второй скобки действовать аналогично случаю алгебр Ли, можно добиться, чтобы индекс j_2 был максимальным среди индексов $j_1,\ldots,j_k$. Используя тождества из леммы, делаем так, чтобы в этих элементах индексы, начиная со второго в первой скобке и начиная с третьего во второй скобке, были упорядочены по убыванию. Таким образом, мы доказали, что элементы вида (3.1) и (3.2) порождают полилинейную часть P_n как векторное пространство. Для завершения доказательства осталось установить их линейную независимость.

Рассмотрим линейную комбинацию этих элементов и предположим, что она равна 0. Так как в относительно свободной алгебре любое равенство от свободных образующих является тождеством многообразия, то мы получаем, что в многообразии $\widetilde{\mathbf{V}}_1$ выполнено тождество

$$\sum_{s=1}^{n}\alpha_i\,(x_s x_n\ldots\widehat{x_s}\ldots x_1)+\sum\beta_{I,J,i_1,j_1}\,(x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{n-k}})(x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_k})\equiv 0, \qquad (3.4)$$

где коэффициенты во второй сумме зависят от индексов i_1, j_1 и множеств $I = \{i_2,\ldots,i_{n-k-1}\}$, $J=\{j_2,\ldots,j_k\}$, а домиком, как общепринято, обозначено отсутствие в последовательности букв соответствующей образующей.

Если существует индекс s такой, что $\alpha_s \neq 0$, то, подставив в (3.4) вместо образующей x_s квадрат x^2, а вместо остальных образующих — y, получим, используя тождество $xy^2 \equiv 0$, в качестве следствия тождество $xxY^{n-1}\equiv 0$, из которого следует такое $xX^n \equiv 0$. Получили противоречие, так как в разложении кохарактера многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_1$ кратность $\widetilde{m}_{(n+1)}$ не равна нулю, точнее $\widetilde{m}_{(n+1)}=1$. Таким образом, все коэффициенты первой суммы равны нулю, и тождество (3.4) приобретает вид

$$\sum\beta_{I,J,i_1,j_1}(x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{n-k-1}})(x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_k})\equiv 0,$$

в котором хотя бы один коэффициент отличен от нуля.

Переобозначим образующие (в частности, $x_{i_1}=x$, $x_{j_1}=y$) так, чтобы слагаемое с отличным от нуля коэффициентом имело вид

$$(xy_ky_{k+1}\ldots y_{n-2})(yy_1\ldots y_{k-1}).$$

В полученное тождество вместо образующей x подставим $z_1x_1\ldots x_{k-1}$, а вместо образующей y подставим $z_2z_3x_k\ldots x_{n-2}$. Проальтернируем по парам образующих x_s, y_s, где $s=1,2,\ldots,n-2$. В силу замечания, сделанного после леммы, в результате произведенной подстановки и альтернирований все остальные слагаемые станут равны нулю, останется только выделенное слагаемое, которое примет вид

$$(z_1\bar{x}_1\ldots\tilde{x}_k\bar{\bar{y}}_{k+1}\ldots\tilde{\tilde{y}}_{n-2})(z_2z_3\bar{y}_1\ldots\tilde{y}_k\bar{\bar{x}}_{k+1}\ldots\tilde{\tilde{x}}_{n-2})\equiv 0.$$

Получили противоречие, так как это тождество не выполняется в алгебре U, а следовательно, и в многообразии $\widetilde{\mathbf{V}}_1$. Действительно, достаточно подставить

$z_1 = e_{11}^0,\ z_2 = e_{11},\ z_3 = e_{12},\ x_s = e_{11},\ y_s = e_{22},\ s = 1, 2, \ldots, n-2$, чтобы получить отличный от нуля результат.

Теорема полностью доказана.

В заключение отметим такую взаимосвязь формул для коразмерностей трех многообразий: многообразия ассоциативных алгебр $\mathbf{UT}_2$, порожденные алгеброй верхнетреугольных матриц порядка два UT_2; многообразия $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ всех алгебр Ли, коммутанты которых нильпотентны ступени не выше двух и исследуемого многообразия алгебр Лейбница $\widetilde{\mathbf{V}}_1$. Для всех $n \geqslant 1$ выполнены равенства

$$c_n(\widetilde{\mathbf{V}}_1) = n \cdot c_n(\mathbf{UT}_2) = c_{n+1}(\mathbf{N}_2\mathbf{A}).$$

Литература

[1] Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Mathematical Surveys and Monographs. AMS, Providence, RI, 2005. V. 122. 344 p.

[2] Mishchenko S., Valenti A. A Leibniz variety with almost polynomial growth // Journal of Algebra. 2000. 223. P. 66–84

[3] Мищенко С.П., Фятхутдинова Ю.Р. Новые свойства многообразия алгебр Ли $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17. № 7. С. 165–173.

[4] Мальцев А.И. Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями // Математический сборник. 1950. Т. 26(68). № 1. С. 19–33.

[5] Мищенко С.П. Рост многообразий алгебр Ли // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45. № 6(276). С. 25–45.

[6] Абанина Л.Е., Рацеев С.М. Многообразие алгебр Лейбница, связанное со стандартными тождествами // Вестник Самарского государственного университета. 2005. № 6. С. 36–50.

[7] Абанина Л.Е., Мищенко С.П. Некоторые многообразия алгебр Лейбница // Математические методы и приложения. Труды десятых математических чтений МГСУ. М.: Союз. 2002. С. 95–99.

[8] Скорая Т.В. Структура полилинейной части многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_3$ // Ученые записки ОГУ. 2012. № 6(2). С. 203–212.

[9] Скорая Т.В., Швецова А.В. Новые свойства многообразий алгебр Лейбница // Изв. Сарат. ун-та. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. Вып. 4. Ч. 2. С. 124–129.

References

[1] Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Mathematical Surveys and Monographs. AMS, Providence, RI, 2005. V. 122. 344 p.

[2] Mishchenko S., Valenti A. Leibniz variety with almost polynomial growth // Journal of Algebra. 2000. 223. P. 66–84

[3] Mishchenko S.P., Fyatkhutdinova Yu.R. New properties of Lie algebras variety $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ // Fundamental'naya i prikladnaya matematika. 2012. V. 17. № 7. P. 165–173.

[4] Maltsev A.I. On algebras with identitical defining relations // Matematichesky sbornik. 1950. T. 26(68). № 1. P. 19–33.

[5] Mishchenko S.P. Growth of Lie algebras manifolds // Uspekhi matematicheskikh nauk. 1990. V. 45. № 6(276). P. 25–45.

[6] Abanina L.E., Ratseev S.M. Leibniz algebras manifolds associated with standard identities // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. 2005. No 6. P. 36–50.

[7] Abanina L.E., Mishchenko S.P. Some Leibniz algebras manifolds // Mathematical methods and applications. Works of X mathematical readings of MGSU. 2002. P. 95–99.

[8] Skoraya T.V. Structure of multilinear part of variety $\widetilde{\mathbf{V}}_3$ // Uchenye zapiski OSU. 2012. № 6(2). P. 203–212.

[9] Skoraya T.V., Shvecova A.V. New properties of Leibniz algebras manifolds // Izv. Sarat. Univ. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2013. V. 13. Issue 4. Part 2. P. 124–129.

Поступила в редакцию 20/*II*/2014;
в окончательном варианте — 20/*II*/2014.

BASIS OF MULTILINEAR PART OF LEIBNIZ ALGEBRAS MANIFOLDS $\widetilde{\mathrm{V}}_1$

 S.P. Mishchenko, Y.R. Pestova[3]

In the case of trivial characteristic of base field, Leibniz algebras manifolds defined by the identity $x_1(x_2x_3)(x_4x_5) \equiv 0$. has almost polynomial growth. In the work we continue research of this manifold, in particular, we construct bases of multilinear parts.

Key words: Leibniz algebra, manifold, almost polynomial growth, bases of multilinear part.

Paper received 20/*II*/2014.
Paper accepted 20/*II*/2014.

[3]Mishchenko Sergey Petrovich (mishchenkosp@mail.ru), Pestova Yuliya Ryamil'evna (fyathut28@rambler.ru), the Dept. of Algebra and Geometric Calculations, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, 432017, Russian Federation.