УДК 519.8

ЭМПИРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРИБЛИЖЕННЫХ АЛГОРИТМОВ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, ОСНОВАННЫХ НА ИДЕЕ ЖАДНОГО ВЫБОРА

 В.М. Монтлевич[1], А.Н. Исмаилова[2]

В статье приводятся результаты эмпирического изучения эвристических алгоритмов целочисленного программирования, основанных на идее жадного выбора. На основе большого объема вычислительных экспериментов даются оценки средней погрешности приближенного решения.

Ключевые слова: целочисленное программирование, алгоритм, эвристика, жадный выбор, погрешность.

Известно, что, с одной стороны, большинство задач целочисленного программирования (ЦП) относится к классу NP-трудных, и для их решения не существует эффективных полиномиальных алгоритмов. С другой стороны, применение моделей целочисленного программирования для решения прикладных задач сталкивается с вычислительными трудностями из-за их большой размерности. Это порождает интерес к разработке эффективных приближенных алгоритмов решения задач ЦП.

Жадные алгоритмы (гриди-алгоритмы) являются интуитивными эвристиками, в которых на каждом шаге принимается решение, являющееся наиболее выгодным для этого шага, без учета того, что происходит на последующих шагах поиска.

Известно, что для некоторых задач дискретной оптимизации жадные алгоритмы позволяют получить оптимальное решение. Известными примерами здесь являются алгоритмы Прима и Краскала для построения остовного дерева минимального веса, алгоритм Хаффмана оптимального префиксного кодирования алфавита с минимальной избыточностью. Одним из основных теоретических результатов, касающихся жадных алгоритмов, является теорема Радо — Эдмондса. Суть ее в том, что для задачи дискретной оптимизации жадный алгоритм дает точное решение, если ее можно сформулировать как задачу отыскания базы минимального веса некоторого матроида.

Применение жадных алгоритмов для решения задач целочисленного программирования изучено слабо. Известно, что даже для простейшей задачи ЦП — задачи о рюкзаке — жадный алгоритм не дает точного решения. Развитие теории

[1]Монтлевич Владимир Михайлович (vlmont@mail.ru), кафедра математики и бизнес-информатики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.
[2]Исмаилова Айнура Низами-кызы (ismailova.aynura@mail.ru), ООО "СамараНИПИнефть", 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Вилоновская, 18.

жадных алгоритмов идет в основном в направлении выделения классов задач ЦП, для которых эти алгоритмы дают точное решение [1–3].

В настоящей работе жадные эвристики рассматриваются как основа построения приближенных алгоритмов ЦП и приводятся результаты их эмпирического изучения для задач целочисленного линейного программирования (ЦЛП).

Опишем общую схему алгоритма ЦП, основанную на идее "жадного" выбора.

Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \max,$$
$$x \in X \subseteq Z^n,$$

где на целевую функцию $f(x)$ не накладывается никаких дополнительных условий; X — множество допустимых планов задачи.

Схема алгоритма.

Обозначим $X(x_j^*)$ — множество допустимых планов исходной задачи, для которых $x_j = x_j^*$, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество индексов переменных, J_0 — множество индексов переменных, которым процедурой жадного выбора присвоены новые значения.

Начальная итерация.

0. Положим $X_0 = X$, $J_0 = \emptyset$ и выберем начальный допустимый план $x^0 = (x_1^0, ..., x_2^0, ..., x_n^0) \in X_0$. Для каждой из n переменных находим границы изменения $\bar{x}_j \leqslant x_j \leqslant \bar{\bar{x}}_j$ так, что $x = (x_1^0, ..., x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0, ..., x_n^0) \in X_0$ для всех целочисленных x_j, $\bar{x}_j \leqslant x_j \leqslant \bar{\bar{x}}_j$. Границы могут задаваться приближенно.

Общая итерация. Пусть сформированы множества J_k и $X_k \subseteq X$.

1. $J_k = J \Rightarrow$ все переменные получили новые значения. Конец работы алгоритма. Построенный допустимый вектор x принимается за приближенное решение. Иначе на 2.

2. Для $j \in J \backslash J_k$ находим $j_0 = \arg\min\limits_{j \in J \backslash J_k} \{ \max\limits_{\bar{x}_j \leqslant x_j \leqslant \bar{\bar{x}}_j} f(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_{j-1}, x_j, \tilde{x}_{j+1}, ..., \tilde{x}_n)\}$,

где $\tilde{x}_k = \begin{cases} x_k^0, k \in J \backslash J_k, k \neq j, \\ x_k^*, k \in J_k. \end{cases}$

Положим $x_{j_0}^* = \arg\max\limits_{\bar{x}_{j_0} \leqslant x_{j_0} \leqslant \bar{\bar{x}}_{j_0}} f(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_{j_0-1}, x_{j_0}, \tilde{x}_{j_0+1}, ..., \tilde{x}_n)\}$, $X_{k+1} = X_k(x_{j_0}^*)$, $J_{k+1} = J_k U \{j_0\}$.

Переходим к шагу 1.

В настоящей работе приводятся в основном результаты эмпирического изучения жадного алгоритма для решения задач ЦЛП специального вида: задач о многомерном рюкзаке.

Задачей о многомерном рюкзаке называется задача ЦЛП

$$cx \to \max,$$
$$Ax \leqslant b,$$
$$x \geqslant 0, x \in \mathrm{Z}$$

с дополнительным условием: векторы c, b и матрица A неотрицательные.

Решение начинается с начального допустимого плана $x^0 = (0, \ldots, 0)$.

Шаг 1. Вычисляем $\bar{x}_j = \min\limits_{i, a_{ij} > 0} \left[\frac{b_i}{a_{ij}} \right]$, $\bar{c}_j = c_j \bar{x}_j$, $\bar{c}_{j_0} = \max\limits_j c_j \bar{x}_j$. Полагаем $x_{j_0} = \bar{x}_{j_0}$.

Шаг 2. Преобразуем задачу следующим образом:

а) из целевой функции и левых частей ограничений исключаем член, содержащий переменную x_{j_0};

б) Правые части ограничений преобразуем по формуле

$$b_i := b_i - a_{ij_0} x_{j_0} = b_i - a_{ij_0} \bar{x}_{j_0}.$$

В результате преобразований число переменных в задаче уменьшается на 1. Возвращаемся на шаг 1.

Шаги 1 и 2 повторяются до тех пор, пока все переменные не получат новые значения (т. е. n раз, где n — число переменных задачи).

Для оценки погрешности приближенного решения, получаемого жадным алгоритмом, было решено порядка 100 задач, условия которых генерировались датчиком случайных чисел. Максимальная размерность задач 20×20. Для получения точного решения использовался метод ветвей и границ. По результатам эмпирических исследований средняя погрешность "жадного" решения равна 20 %. Эмпирические исследования показали, что в таком виде алгоритм дает высокую среднюю погрешность порядка 20 %.

Распределение числа тестовых задач по интервалам относительной погрешности представлено на рис. 1.

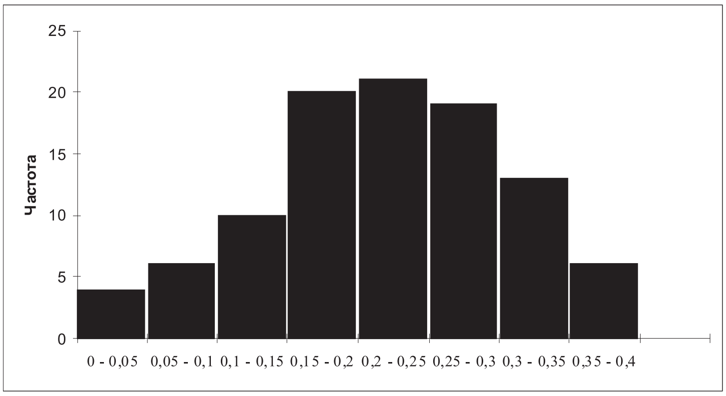

Рис. 1. Распределение числа задач по интервалам погрешности

Для снижения погрешности приближенного решения была предложена процедура его улучшения.

Пусть переменные занумерованы в порядке получения ими значений в жадном алгоритме.

1. В качестве начального плана берется решение, полученное жадным алгоритмом. Полагаем $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, $j = 1$.

2. Выбираем еще не просмотренную переменную $x_j > 0$ с минимальным индексом $j \in J$ и подбираем значение $\Delta_j > 0$, на которое следует уменьшить величину x_j.

3. Находим переменную x_k, $k > j$ и величину Δ_k, на которую можно увеличить значение x_k, не нарушая допустимости плана и увеличив при этом целевую функцию. Для этого Δ_j и Δ_k должны удовлетворять условиям:

1) $c_k \Delta_k > c_j \Delta_j$,

2) $\min\limits_i \{\tilde{b}_i + a_{ij}\Delta_j - a_{ik}\Delta_k\} \geqslant 0$, где $\tilde{b}_i$ — остаточное значение правой части i-го ограничения после получения жадного решения.

По окончании шага 3 независимо от того, найдена или нет переменная x_k, полагаем $J = J \backslash \{j\}$, увеличиваем j на 1 и возвращаемся на шаг 2.

Процесс заканчивается, когда все переменные в начальном плане будут просмотрены ($J = \emptyset$).

Жадным алгоритмом с процедурой улучшения было решено 760 задач различных размерностей, условия которых генерировались датчиком случайных чисел (максимальная размерность задач 50×40). По результатам вычислительных экспериментов с применением процедуры улучшения средняя погрешность приближенного решения снизилась до 5 %, а для задач с булевскими переменными — до 1 %. Изменилось распределение числа задач по интервалам погрешностей (рис. 2), снизилась дисперсия погрешностей.

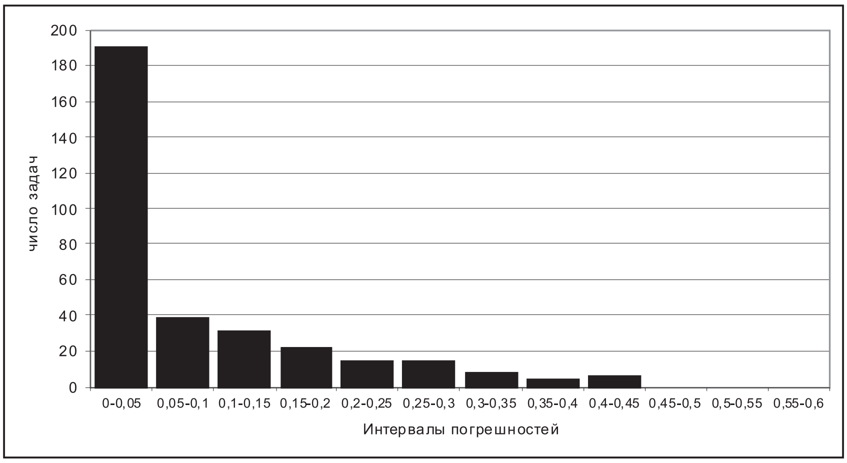

Рис. 2. Распределение числа задач по интервалам погрешностей при использовании процедуры улучшения

Разработанные алгоритмы применялись для решения минимаксной дискретной распределительной задачи вида

$$\delta = \max_{t=\overline{1,T}} \{\sum_{i=1}^{n} a_{it} x_{it}\} \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{t=1}^{T} x_{it} = p_i, i = \overline{1,n} \tag{2}$$

$$x_{it} \in \{0,1\}, \tag{3}$$

которую можно интерпретировать как модель календарного планирования при условии независимости работ и возможности их выполнения с прерываниями.

Пусть имеется n работ, которые нужно выполнить за T временных единиц. Известны целочисленные длительности работ p_i и количество a_{it} ресурса, необходимое для выполнения работы i в момент t. Необходимо распределить выполнение работ во времени таким образом, чтобы выполнить все работы и минимизировать максимальные затраты ресурса в каждый момент времени.

x_{it} — булева переменная, имеющая следующий смысл:

$$x_{it} = \begin{cases} 1, & \text{если работа } i \text{ выполняется в момент } t, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

С учетом специфики задачи алгоритм жадного выбора и процедура улучшения были модифицированы следующим образом.

Алгоритм жадного выбора:

1) перед началом решения все переменные равны 0;

2) на каждом шаге выбирается очередная переменная, минимально увеличивающая целевую функцию, ей придается значение 1;

3) пересчитываются правые части ограничений и процесс повторяется;

4) процесс заканчивается, когда правые части всех ограничений станут равны 0.

Процедура улучшения:

Пусть t_1 — момент времени, при котором достигается значение $\delta = \max\limits_{t=\overline{1,T}}\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_{it}x_{it}\}$:

1) выбираем момент времени t_2, для которого значение $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{it_2}x_{it_2}$ минимально;

2) выбираем работу k, для которой выполняются условия:

$$x_{kt_1} = 1, x_{kt_2} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_{it_2} + a_k < \delta;$$

3) полагаем $x_{kt_1} = 0,\ x_{kt_2} = 1$;

4) если такой пары (k, t_2) не существует, то решение считаем неулучшаемым и принимаем за приближенное.

Было решено более 300 тестовых задач с различным соотношением числа работ и длительности периода их выполнения. Средняя погрешность решения в серии задач не превысила 7 %, причем 2/3 задач были решены с погрешностью менее 5 %.

Полученные результаты показывают, что жадные алгоритмы являются перспективным инструментом решения задач целочисленного программирования большой размерности.

Литература

[1] Глебов Н.И., Шенмайер В.В. О применимости алгоритма покоординатного подъема к задачам целочисленного программирования // Дискретный анализ и исследование операций. 2000. Сер. 1. Т. 7. № 4. С. 38–47.

[2] Глебов Н.И. Об условиях разрешимости оптимизационных задач жадным алгоритмом // Дискретный анализ и исследование операций. Июль–декабрь 2002. Сер. 2. Т. 9. № 2. С. 3–12.

[3] Шенмайер В.В. Максимизация линейной целевой функции с помощью жадного алгоритма // Дискретный анализ и исследование операций. 1999. Сер. 1. Т. 6. № 4. С. 104–120.

References

[1] Glebov N., Shenmaier V. On the application of algorithms of coordinate rise for integer programming problems // Diskretnyi analiz i issledovanie operatsii. 2000. Series 1. V. 7. № 4. P. 38–47.

[2] Glebov N. On conditions of solvability of optimization problems using greedy algorithms // Diskretnyi analiz i issledovanie operatsii. July-December 2002. Series 2. V. 9. № 2. P. 3–12.

[3] Shenmaier V. Maximization of linear form using greedy algorithms // Diskretnyi analiz i issledovanie operatsii. 1999. Series 1. V. 6. № 4. P. 104–120.

Поступила в редакцию $5/IV/2013$;
в окончательном варианте — $5/IV/2013$.

EMPIRICAL ANALYSIS OF APPROXIMATE ALGORITHMS FOR INTEGER PROGRAMMING, BASED UPON THE IDEA OF GREEDY CHOICE

 V.M. Montlevich[3], A.N. Ismailova[4]

The article contains the results of empirical studies of heuristic algorithms for integer programming based upon the idea of greedy choice. On the base of numerous computer experiments estimate of average level of inaccuracy of approximate solution are presented.

Key words: integer programming, algorithm, heuristics, greedy choice, inaccuracy.

Paper received $5/IV/2013$.
Paper accepted $5/IV/2013$.

[3]Montlevich Vladimir Mikhailovich (vlmont@mail.ru), the Dept. of Mathematics and Business Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.

[4]Ismailova Ainura Nizami-kyzy (ismailova.aynura@mail.ru), SamaraNIPIneft, Samara, 443010, Russian Federation.