МАТЕМАТИКА

УДК 515.146.36,512.568.3,512.553.6

СВОЙСТВА ДУАЛЬНЫХ МОДУЛЕЙ НАД АЛГЕБРОЙ СТИНРОДА

© 2014 А.Н. Васильченко[1]

В работе изучаются свойства аннуляторов и образованных ими модулей, включая дуальные модули над алгеброй Стинрода. Доказываются свойства произведения Кронекера с использованием общих свойств алгебры Стинрода и дуальной как градуированных связных алгебр Хопфа. Доказываются изоморфизмы между модулями, образованными аннуляторами, и дуальными модулями над дуальной алгеброй Стинрода и показывается, что они являются Хопф-комодулями с копроизведениями, индуцированными копроизведением в дуальной алгебре Стинрода. Находятся генераторы этих модулей. Обсуждается метод нахождения базиса модуля неразложимых элементов, рассматриваемого как векторное пространство над циклическим полем, для некоторых из исследуемых модулей.

Ключевые слова: градуированная алгебра Хопфа, комодуль над алгеброй Стинрода, аннулятор, дуальный модуль, неразложимый элемент.

1. Результаты работы

В задачах распознавания топологических пространств и в задачах о вложениях топологических пространств могут испльзоваться высшие когомологические операции [1; 2]. В частности, там, где такие задачи не решаются с помощью гомологического, когомологического и гомотопического функторов, или с применением первичных операций алгебры Стинрода, когомологические и гомотопические операции более высокого порядка могут решать такие задачи. Поэтому представляет интерес задача о нахождении вторичных когомологических операций. Например, вторичные когомологические операции соответствуют соотношениям вида $\sum a_i b_i = 0$ в алгебре Стинрода A с операциями Стинрода b_i из анулятора $A(n)$ классов когомологий степени не выше n. $A(n)$ является левым идеалом в A и левым A-модулем [3]. Нестабильные когомологические операции, связанные с $ab = 0 \mod \mathrm{A(n)}$, дают дополнительную информацию о гомотопических типах. Поэтому представляет интерес задача нахождения всех генераторов [4] и неразложимых первичных операций Стинрода из левого A-модуля $A/A(n)$. Из точной последовательности модулей $Q(A/A(n-1)) \to Q(A/A(n)) \to Q(A(n-1)/A(n)) \to 0$ эпиморфизм и $Q(A(n-1)/A(n))$ дают такую информацию. Для нахождения $Q(A(n-1)/A(n))$

[1]Васильченко Александр Николаевич (vass-alexandr@yandex.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

можно использовать дуальный базис Милнора [7] дуальной алгебры Стинрода A^*. И поэтому является необходимым знание структуры модулей алгебры Стинрода.

Целью этой работы является изучение таких модулей, а также фактор модулей $A(n-1)/A(n)$ и их дуальных $A(n)^*$, $A(n)^+/A(n-1)^+$, $(A(n-1)/A(n))^*$, $A(n-1)^*/A(n)^*$, которые могут использоваться для определения вторичных когомологических операций.

Результат сформулирован в утверждениях:

Утверждение 1.

1. *Аннулятор $A(n)^+$ модуля $A(n)$ является A^*-комодулем и выполняется*
$$A(n)^+ \cong (A/A(n))^*.$$
2. *$A(n)^+$ генерируется всеми мономами мультипликативности не больше чем n и является индуцированным A^*-комодулем, для которого*
$$A(n)^* \cong A^*/A(n)^+.$$

Утверждение 2. *$(A(n-1)/A(n))^*$ является левым индуцированным A^*-комодулем и как векторное пространство над Z/p имеет базис, образованный всеми мономами мультипликативности n в A^*. Выполняются следующие изоморфизмы:*
$$(A(n-1)/A(n))^* \cong A(n)^+/A(n-1)^+ \cong A(n-1)^*/A(n)^*.$$
Доказательства утверждений находятся в третьем разделе статьи.

2. Используемые обозначения и вспомогательные сведения

Определение 1. *Аннулятором классов когомологий степени не больше n называется*
$$A(n) = \{\theta \in A|\ \theta x = 0,\ \textit{для любого}\, x \in H^*(X; Z/p)\ \textit{такого, что}\, |x| \leqslant n\}.$$
Из определения следует свойство $A(n) \hookrightarrow A(n-1)$ и что все $A(n)$ являются левыми модулями над алгеброй Стинрода A. Таким образом существует точная последовательность:
$$0 \longrightarrow A(n) \longrightarrow A(n-1) \longrightarrow A(n-1)/A(n) \longrightarrow 0. \tag{1}$$

Определение 2. *Избытком монома индекса I называется*
$$Ex(P^I) = \epsilon_0 + \sum_{i=1}^{k}(s_i - ps_{i+1}) - \sum_{i=1}^{k}\epsilon_i,$$
где $I = (\epsilon_0, s_1, \epsilon_1, \ldots, s_k, \epsilon_k)$ где $P^I = \delta^{\epsilon_0}P^{s_1}\delta^{\epsilon_1}\ldots P^{s_k}\delta^{\epsilon_k}$ и все $\epsilon = 0,1$ и $s_i \in N$.

В работе [9] доказано, что $A(n)$ генерируется всеми допустимыми мономами алгебры Стинрода избытка больше чем n, где допустимыми элементами называются мономы P^I алгебры Стинрода, для которых $s_i \geqslant ps_{i+1} + \epsilon_i$ при любых натуральных i. По теореме Картана [5] допустимые мономы составляют базис алгебры Стинрода как векторного пространства над Z/p.

Алгебра Стинрода и дуальная к ней, определяемая $A_i^* \equiv Hom(A_i, Z/p)$, являются градуированными связными алгебрами Хопфа с единицей $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$, [7; 9]. Также определяется и модуль $A(n)^* = Hom(A(n), Z/p)$, дуальный к $A(n)$. Следовательно, $A(n)^*$ является левым модулем над дуальной алгеброй Стинрода A^*. Индекс градуировки i у модулей и алгебр идет по степени, которая для монома из алгебры Стинрода определяется так:

Определение 3. *Степенью монома индекса I называется*

$$deg(P^I) \equiv \sum_{i=0}^{k} \epsilon_i + \sum_{i=1}^{k} 2s_i(p-1),$$

где $I = (\epsilon_0, s_1, \epsilon_1, \ldots, s_k, \epsilon_k)$.

Тогда можно определить аннулятор $A(n)^+$ элементов $A(n)$.

Определение 4. *Аннулятором модуля $A(n)$ является*

$$A(n)^+ = \{\alpha \in A^* | \langle \theta, \alpha \rangle = 0 \text{ для каждого } \theta \in A(n)\},$$

где $\langle \theta, \alpha \rangle \equiv \alpha(\theta)$ — произведение Кронекера.

Тогда выполняются точные последовательности левых A^* модулей:

$$0 \longrightarrow A(n)^+ \longrightarrow A^* \longrightarrow A^*/A(n)^+ \longrightarrow 0 \tag{2}$$

Для изучения структур модулей нужно будет использовать мономиальные базисы этих модулей, рассматриваемых как векторные пространства над Z/p. Объединяя результаты работ Милнора [7] и Стинрода [9] по структуре дуальной алгебры Стинрода, здесь формулируются необходимые для этой работы результаты и используемые обозначения.

Теорема 1 (Milnor [7]). *1. Дуальной к алгебре Стинрода A является алгебра Хопфа A^*. Это свободная коммутативная алгебра*

$$A^* = Z/p(\xi_1, \xi_2, \ldots) \bigotimes E[\tau_0, \tau_1, \ldots],$$

где степени $|\xi_i| = 2p^i - 2$ и $|\tau_i| = 2p^i - 1$.

2. Структура коалгебры на A^* задается копроизведением

$$\phi^*(\xi_j) = \sum_{i=0}^{j} \xi_{j-i}^{p^i} \bigotimes \xi_i, \quad \phi^*(\tau_j) = \sum_{i=0}^{j} \xi_{j-i}^{p^i} \bigotimes \tau_i + \tau_j \bigotimes 1,$$

где $\xi_0 = 1$.

Из определения и свойства копроизведения $\varphi^* a = \sum_i a_i^{'} \otimes a_i^{''}$ следует, что мультипликативность $m(a) \geqslant m(a_i^{''})$, $A(n)^+$ также является A^*-комодулем.

Следующая теорема доказывает, что $Hom(-, Z/p)$-функтор является точным. В частности, точной последовательностью является дуальная последовательность к 1, которая в дальнейшем используется в доказательстве утверждений.

Теорема 2 (Milnor, Moore [8]). *Если A является градуированной связной ассоциативной алгеброй Хопфа над полем K и B подалгеброй A, то A является свободным B-модулем.*

Для обозначения мономов дуальной алгебры Стинрода используется обозначение $\xi^I = \tau_0^{\epsilon_0} \xi_1^{r_1} \tau_1^{\epsilon_1} \ldots \xi_k^{r_k} \tau_k^{\epsilon_k}$. Пусть множество индексов всех таких мономов $\mathbf{R}$, а множества всех индексов допустимых мономов есть $\mathbf{S}$. В работе [7] доказывается, что все такие мономы являются базисами и таким образом связаны биективным отображением $\chi : \mathbf{R} \to \mathbf{S}$, определяемым так:

$$\chi(\epsilon_0, r_1, \epsilon_1, \ldots, r_k, \epsilon_k) = (\epsilon_0, s_1, \epsilon_1, \ldots, s_k, \epsilon_k),$$

где $s_j = \sum_{i=j}^{k}(r_i + \epsilon_i)p^{i-k}$, а обратное отображение определяется

$$r_j = s_j - ps_{j+1} - \epsilon_j. \tag{3}$$

В частности, для дуальных $\xi_i(P^{p^{i-1}}P^{p^{i-2}}\ldots P^1) = 1$ и $\tau_i(P^{p^{i-1}}P^{p^{i-2}}\ldots P^1\delta) = 1$.
Определение 5. *Мультипликативностью монома $\xi^I \in A^*$ называется*

$$m(\xi^I) \equiv m(I) = \sum_{i=0}^{\infty}\epsilon_i + \sum_{i=1}^{\infty}2r_i.$$

Связь мультипликативности и избытка, а также степеней мономов в дуальных базисах устанавливает следующая лемма.
Лемма 1. *Для $P^{\chi(I)} \in A$, $\xi^J \in A^*$ выполняются $m(\xi^I) = ex(P^{\chi(I)})$ и $deg(\xi^I) = deg(P^{\chi(I)})$*
Доказательство.
Используя 3 для мультипликативности, получается:

$$\begin{aligned} m(\xi^I) = \quad & \epsilon_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{k}(2r_i + \epsilon_i) = 2\sum_{i=1}^{k}(s_i - ps_{i+1} - \epsilon_i) + \sum_{i=0}^{k}\epsilon_i = \\ & = \epsilon_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{k}(2(s_i - ps_{i+1}) - \epsilon_i) \equiv ex(P^{\chi(I)}). \end{aligned}$$

Для степеней получается:

$$\begin{aligned} deg(\xi^I) &= \sum_{i=0}^{k}(2p^i - 1)\epsilon_i + \sum_{i=0}^{k}(2p^i - 2)r_i = \sum_{i=0}^{k}(2p^i - 1)\epsilon_i + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k}(s_i - ps_{i+1} - \epsilon_i)(2p^i - 2) = \\ &= \sum_{i=0}^{k}\epsilon_i + 2(\sum_{i=1}^{k}s_ip^i - \sum_{i=2}^{k}s_ip^i - \sum_{i=1}^{k}s_i + \sum_{i=2}^{k}ps_i) = \\ &= \sum_{i=0}^{k}\epsilon_i + 2(p-1)\sum_{i=0}^{k}s_i \equiv deg(P^{\chi(I)})\blacksquare \end{aligned}$$

Соотношение мультипликативности и избытка для различных индексов может быть установлено введением упорядочения на множествах индексов мономов дуальной алгебры Стинрода. Такое лексикографическое упорядочение используется для формулировки последующих лемм о свойствах произведения Кронекера.
Определение 6. *Правое лексикографическое упорядочение $I_1 < I_2$ мономов одинаковой степени означает, что*

1. *длина $I_1 <$ длины I_2,*
2. *если длина $I_1 =$ равна длине I_2,*
   (a) *n-й элемент I_1 меньше, чем n-й элемент I_2,*
   (b) *если n-й элемент I_1 равен n-му элементу I_2,*
      i. *$I_{1,n} < I_{2,n}$ для последовательностей индексов полученных обращением в 0 всех элементов начиная с n-го места.*

Например $(1,0,0,0,\ldots) < (1,2,0,0,\ldots) < (1,4,0,0,\ldots) < (0,0,1,0,\ldots)$ и так далее.

Лемма 2 (Milnor [7]). *При* $I < J$

$$\langle P^{\chi(I)}, \xi^J \rangle = 0$$

и для $I = J$

$$\langle P^{\chi(I)}, \xi^I \rangle = \pm 1.$$

Как следствие этой леммы все мономы A^* образуют базис в A^*, но эти мономы в общем являются сопряженными, но не дуальными к базису всех допустимых мономов алгебры A. Дополнительную информацию о соотношении базисов дает следующая лемма:

Лемма 3. *Если для* $P^{\chi(I)} \in A$, $\xi^J \in A^*$ *выполняются* $ex(P^{\chi(I)}) > m(\xi^J)$, *то*

$$\langle P^{\chi(I)}, \xi^J \rangle = 0.$$

Доказательство. Для $\omega(I) \in A^*$ индекса $I = (\epsilon_0, r_1, \epsilon_1, r_2, \ldots)$ и мультипликативности n пусть $n = m(I) = k + 2m$, где $\sum_i \epsilon_i = k$, $\sum_i r_i = m$.

Для пространства Эйленберга-МакЛейна L типа $K(Z/p,1)$ [6]

$$H^*(L, Z/p) = E(x) \bigotimes Z/p[y] \text{ с генераторами степеней } |x| = 1,\ |y| = 2,\ y = \delta x.$$

Выбирается пространство $X = L^n$ и класс $u = x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_k \times y_1 \times \ldots \times$ $\times\, y_m \in H^*(X, Z/p)$.

По теореме Картана [5] действие монома избытка больше чем n из алгебры Стинрода на класс когомологий степени меньше или равной n дает ноль. Используя лемму 3.1 [9, с. 90] получаем:

$$P^{\chi(J)} u = 0 = \sum_{K,M} (-1)^{g(K)} \langle P^{\chi(J)}, \tau(K)\xi(M) \rangle x(K) \times y(M),$$

где суммирование ведется по всем индексам K и M длин соответственно k и m. Значение $g(K)$ равно количеству транспозиций, необходимых для перемещения всех нулей индекса K направо.

Тогда из линейной независимости $x(K) \times y(M)$ в $H^*(X, Z/p)$ следует, что для всех I и J таких, что $ex(P^{\chi(I)}) > m(\xi^J)$, выполняется $\langle P^{\chi(I)}, \xi^J \rangle = 0.$■

3. Доказательства утверждений

Доказательство утверждения 1.

1. Из свойства копроизведения φ^* для A^* следует, что $A(n)^+$ является комодулем A^*. Чтобы доказать изоморфизм, определяются отображения между модулями. Если $\omega \in (A/A(n))^*$, тогда $\omega\pi \in A(n)^+$, так как для любого $\theta \in A(n)$ такого, что $Ex(\theta) > n$, выполняется $\omega\pi(\theta) = 0$. Таким образом определим гомоморфизм $(A/A(n))^* \to A(n)^+$, так, $\alpha : \omega \mapsto \omega\pi$.

Отображение $\beta : \xi \to \bar{\xi}$ где $\xi \in A(n)^+$ определяется $\bar{\xi}([\theta]) \equiv \xi(\theta)$ для любых $\theta \in A$, $[\theta] \in A/A(n)$. Это определение корректно и β является гомоморфизмом.

Если $\beta(\xi) = 0$, то для любого $\theta \in A$ выполняется $\bar{\xi}([\theta]) = \xi(\theta) = 0$, что означает $\xi = 0$. Следовательно, β является мономорфизмом.

$\beta\alpha(\omega) \equiv \beta(\omega\pi) = \overline{\omega\pi}$, тогда для любого $\theta \in A$ выполняется $\overline{\omega\pi}([\theta]) \equiv \omega\pi(\theta) =$ $= \omega([\theta])$, что доказывает $\beta\alpha = Id$. Следовательно, β является изоморфизмом. ■

2. Изоморфизм в пункте 2 утверждения является следствием доказательства изоморфизма в 1 и следует из точности следующей коммутативной диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (A/A(n))^* \arrow[r, tail] \arrow[d, tail, two heads] & A^* \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail, two heads] & A(n)^* \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & A(n)^+ \arrow[r, hook] & A^* \arrow[r, two heads] & A^*/A(n)^+ \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}
$$

в которой первая строка является точной, так как дуальна, по теореме 2, к точной последовательности $0 \to A(n) \to A \to A/A(n) \to 0$, а вторая это точная последовательность 2. Коммутативность первого квадранта следует из свойства изоморфизма α, а второго из точности строк и существования отображения $A(n)^* \to A^*/A(n)^+$, индуцированного тождественным отображением $A^* \to A^*$.

$A^*/A(n)^+$ является индуцированным комодулем со свойством индуцированного копроизведения $\varphi^{'}[a] = \sum a_i^{'} \otimes [a_i^{''}]$: таким, что для элементов этого модуля $m([a_i^{''}]) \equiv m(a_i^{''}) \leqslant m([a])$, что следует из явного вида копроизведения в A^*.

Остается показать, что он генерируется всеми мономами степени не выше n. Пусть $m([a]) > n$, тогда по лемме 2 для $a \in A^*$ существует сопряженный P^I, для которого выполняется $\langle P^I, a\rangle = 1$, и поэтому $a \notin A(n)^+$. Тогда $m(a) \leqslant n$.

Используя доказательство леммы 3 для действия допустимого монома избытка, большего, чем n, получается, что все мономы дуального базиса, мультипликативность которых $m(\omega^I) \leqslant n$, принадлежат аннулятору модуля $A(n)$, что полностью описывает Z/p базис модуля $A(n)^+$.$\blacksquare$

Доказательство утверждения 2.

Точная последовательность 2 и утверждение 1 доказывают точность рядов коммутативной диаграммы 4. Точность первого столбца диаграммы следует из определения анулятора $A(n-1)^+ \hookrightarrow A(n)^+$, а второй столбец является дуальным к точной последовательности 1. Это доказывает точность следующей диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & & (A(n-1)/A(n))^* \arrow[d, tail] & \\
0 \arrow[r] & A(n-1)^+ \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & A^* \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook, two heads] & A(n-1)^* \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
0 \arrow[r] & A(n)^+ \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & A^* \arrow[r, two heads] & A(n)^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & A(n)^+/A(n-1)^+ \arrow[d] & & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}
\tag{4}
$$

Теперь существование изоморфизма $(A(n-1)/A(n))^* \to A(n)^+/A(n-1)^+$ следует из [10, с. 158, лемма 9.1]. Тогда из второй части утверждения 1 следует, что $(A(n-1)/A(n))^*$ генерируется всеми мономами мультипликативности n. Копроизведение в этом модуле индуцируется копроизведением в A^*, то есть является ограничением кодействия ϕ из 1. ϕ_n: $(A(n-1)/A(n))^* \to A^* \bigotimes (A(n-1)/A(n))^*$ определяется $\phi_n([\omega]) = \sum_i \omega_i' \bigotimes [\omega_i']$. Утверждение 1 и теорема об изоморфизме доказывают второй изоморфизм. ■

4. Обсуждение результатов

Теперь известно, что модуль $B(n) \equiv (A(n-1)/A(n))^*$ имеет структуру A^*-комодуля и генерируется мономами мультипликативности n, то есть является конечно генерированным. Явный вид копроизведения в $B(n)$ показывает, что $B(n)$ можно разложить в прямую сумму подкомодулей, элементы которых содержат определенное количество множителей типа τ, также имеющих структуру комодуля. Такие минимальные подмодули могут иметь размерность комодулей примитивных элементов не более чем 1. Поэтому для нахождения явного вида модулей неразложимых элементов $Q(A(n-1)/A(n))$, определяемого как $coker\,\phi_n : I(A) \bigotimes A(n-1)/A(n) \to A(n-1)/A(n)$, свойства произведений Кронекера, приведенные в разделе 2, могут дать явный вид элементов $Q(A(n-1)/A(n))$, так как дуальный модуль к одномерному тоже размерности 1. Например, если явный вид генератора одномерного комодуля примитивных элементов $PB(n)$ имеет вид $\alpha = \sum_i a_i \omega^{I_i}$ имеющий степень d, и k элементов типа τ с максимальным индексом l, то согласно 2 лемме $P^{\chi(I_m)}$, где I_m наименьший среди всех I_i согласно правому лексикографическому упорядочению 6, дает ненулевое произведение Кронекера, следовательно является ассоциированным и может быть выбран генератором дуального одномерного подмодуля в $Q(A(n-1)/A(n))$.

Литература

[1] Hilton P.J., Spanier E.H. On imbeddability of certain complexes in Euclead space // Proc. Amer. math. Soc. 1960. № 11. P. 523–526.

[2] Mosher R., Tangora M. Cohomology Operations and applications in Homotopy theory, Harper and Row (1968), переведена на рус. яз. М.: Мир, 1970.

[3] Adams J.F. On the non-existance of elements of Hopf Invariant one // Ann. of Math. 1960. **72**. P. 20–104

[4] Wall C.T.C. Generators and relations for Steenrod algebra // Ann. of Math. 1960. **72**. P. 429–444.

[5] Cartan H. Algebres d'Eilenberg-MacLane at Homotopie, Seminare Cartan ENS. 1954–1955. **7e**.

[6] Cartan H. Sur les groupes d'Eilenberg-MacLane $H(\pi, n)$ // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1954. **40**. P. 704–707.

[7] Milnor J. The Steenrod algebra and its dual // Ann. of Math. 1958. **67**. P. 150–171.

[8] Milnor J., Moore J. On the structure of Hopf algebras // Ann. of Math. 1965. **81**. P. 211–264.

[9] Steenrod N., Epstein D.B.A. Cohomological Operations, Princeton Univ.Press (1962), переведена М.: Наука, 1983.

[10] Lang Serge, Algebra. Graduate texts in mathematics; 211, rev.3d ed. New York: Springer-Verlag, 2002.

Поступила в редакцию 22/*V*/2014;
в окончательном варианте — 19/*VII*/2014.

PROPERTIES OF DUAL MODULES OVER STEENROD ALGEBRA

 A.N. Vasilchenko[2]

Properties of annulators and modules generated by annulators, including dual modules over Steenrod algebra are studied. Properties of Kroneker pairing are proved using general properties of Steenrod algebra and dual algebra as graded connected Hopf algebras. Isomorphisms between modules generated by annulators and dual modules over dual Stennrod algebra are proved. It is shown that these modules are Hopf comodules induced by coproduct in dual Steenrod algebra. All generators of these modules are found. The method of finding basis of module of indecomposable elements, viewed as vector space over cyclic field for some of the studied modules.

Key words: graded Hopf algebra, comodule over Steenrod algebra, annulator, dual module, indecomposable element.

Paper received 22/*V*/2014.
Paper accepted 19/*VII*/2014.

[2]Vasiltchenko Alexander Nikolaevich (vass-alexandr@yandex.ru), the Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.