

УДК 330

*А.Ю. Егорова, В.М. Монтлевич\**

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ КОМПЛЕКСА РАБОТ

В настоящее время, когда на предприятиях остро стоит проблема оптимизация времени выполнения работ, вопрос изучения моделирования технологических связей комплекса работ актуален как никогда. Простоту в реализации обеспечивает сетевое представление комплекса работ, но различный характер связей и взаимодействий между отдельными работами делает эту задачу интересной для практического изучения. В настоящей статье авторы рассматривают классификацию возможных связей между работами и описывают математическую модель взаимосвязей между работами в виде системы уравнений и неравенств с булевскими переменными.

**Ключевые слова:** связи между работами, типология, моделирование связей, диспетчеризация, задача диспетчеризации.

Во многих областях деятельности возникает необходимость организации выполнения большого числа работ: проектировании новых изделий и запуске их в производство, составлении расписаний движения транспорта, планировании графиков выпуска и доставки продукции и т. д. Сложность задачи заключается в том, что между работами имеется множество разнообразных связей: временных, ресурсных, технологических, и организация работы должна выполняться с учетом этих связей.

Рассмотрим некоторые типологии связей.

Пусть  $\gamma_1, \gamma_2$  – работы. Между этими работами могут возникать следующие связи:

- 1)  $\gamma_2$  выполняется после окончания  $\gamma_1$ ;
  - 2)  $\gamma_1, \gamma_2$  могут выполняться независимо;
  - 3) если выполняется  $\gamma_1$ , то в это же время обязательно выполняется  $\gamma_2$ ;
  - 4) момент начала работы фиксированный;
  - 5) момент начала работы «плавающий»;
  - 6) некоторые работы несовместные (не могут выполняться в одно и то же время);
  - 7) некоторые работы могут выполняться частями, количество частей задается.
- Если работа начала выполняться, то все ее части должны быть выполнены. Если работа имеет связи с другими, то каждая ее часть имеет те же связи.

Работы характеризуются:

- 1) моментом начала;
- 2) длительностью.

Как видим, автором было выделено 7 типов связей. Для сравнения, при описании сетевых графиков рассматривается один тип связей: работа выполняется по окончании всех предшествующих.

---

\* © Егорова А.Ю., Монтлевич В.М., 2014

Егорова Елена Юрьевна (egorovaalena@inbox.ru), Монтлевич Владимир Михайлович (vlmont@mail.ru), кафедра математики и бизнес-информатики, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Одним из примеров необходимости учета связи является задача сетевого планирования и управления. Однако и там связи между работами достаточно просты: рассматривается только последовательность выполнения работ.

В моделях, рассматриваемых ранее, фактически не учитываются технологические связи между работами. Во многих случаях такие связи существуют, являются сложными и многообразными, и их особенно следует учитывать при решении задачи диспетчеризации.

Задачи диспетчеризации возникают в различных сферах деятельности. Разнообразие приложений делает это направление весьма актуальным в области математических моделей и методов оптимизации. Диспетчеризация - централизация (концентрация) оперативного контроля и координация управления производственными процессами с целью обеспечения согласованной работы отдельных звеньев предприятия или группы предприятий для достижения наивысших технико-экономических показателей, выполнения графиков работ и производственной программы. Диспетчеризация стала одним из важнейших средств управления в промышленности, энергетике, на транспорте, в строительстве, сельском хозяйстве, торговле и др.

В специализированные решения для заводов входят несколько блоков, каждый из которых может быть реализован автономно (отдельным проектом), так и комплексно, в единой модели, со взаимоувязкой всех процессов. Задача диспетчеризации ориентирована на диспетчерские службы или представителей производственного отдела/управления, кто планирует ресурсы (станки и рабочих) для выпуска изделий в срок.

Цель задачи диспетчеризации – спланировать очередность выполнения заданий, определить для них время и ресурсы наиболее оптимальным образом с учетом критериев, приоритетов и ограничений. Например, чтобы общее время выполнения было минимально, чтобы была минимизирована стоимость, чтобы загрузка ресурсов была равномерной и т. д.

В задаче диспетчеризации ремонтных работ приходится учитывать гораздо более сложные связи между работами и требования к их выполнению. Для задач такого типа требуется разработка специальных моделей.

Опишем переменные и константы для рассматриваемой модели:

Переменные:

$t_i$  – момент начала  $i$ -й работы;

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если работа } i \text{ принята к исполнению} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases};$$

$\Delta_i$  – длительность  $i$ -й работы.

Константы:

$a_i$  – директивный (желательный) момент начала  $i$ -й работы;

$d_i$  – директивная (желательная) длительность  $i$ -й работы;

$T$  – срок окончания всех работ (период планирования).

Имеют место следующие предположения:

Если работа  $k$  может быть разделена на  $p_k$  частей  $k_1 < k_2 < \dots < k_{p_k}$ , то сама работа и ее части включаются в список работ как самостоятельные работы. Работу  $k$ , входящую в исходный список работ, будем называть основной. Выполнение основной работы рассматривается как выполнение всех ее частей. Части предполагаются равными по длительности и выполняются в порядке возрастания их номеров. Моменты начала выполнения частей:  $a_{k_1} = a_k$  для части  $k_1$ ,  $a_{k_2} = a_{k_1} + \Delta_{k_1}$  для

части  $k_1$  и т.д. Для части  $k_j$   $a_{k_j} = a_{k_{j-1}} + \Delta_{k_{j-1}}$ . Условие, при котором работа выполняется без разбиения:

$$t_{k_j} = a_{k_j},$$

$$t_{k_{p_k}} + \Delta_{k_{p_k}} - t_{k_1} = \sum_{j=1}^{p_k} \Delta_{k_j},$$

т.е. между выполнением отдельных частей нет разрывов во времени.

Выполнение работы  $k$  совместно с работой  $i$  трактуется следующим образом: если выполняется работа  $i$ , то обязательно выполняется работа  $k$ , причем в тот же период времени

Для пары совместно выполняемых работ более короткая должна укладываться в границы более длинной.

Существуют следующие ограничения:

1. Все работы, принятые к исполнению, оканчиваются в плановом периоде.

$$t_i + \Delta_i - 1 \leq T y_i, \forall i. \quad (1)$$

Следствия этой группы ограничений:

а) если работа  $i$  не принята к исполнению ( $y_i = 0$ ), то  $t_i = \Delta_i = 0$ ;

б) формально, любая работа, принятая к исполнению, начнется не раньше, чем закончатся все не принятые к исполнению.

2. Условия несовместности.

$$t_k \geq t_i + \Delta_i - 1 - T z_{ik}, \quad (2)$$

то есть  $k$ -я работа начинается после окончания  $i$ -й;

$$t_i \geq t_k + \Delta_k - 1 - T(1 - z_{ik}), \quad (3)$$

$i$ -я работа начинается после окончания  $k$ -й;

$$z_{ik} \in \{0,1\}.$$

$Z$  - переменная, с помощью которой моделируются определенные связи.

Ограничения записываются для всех пар  $(i, k)$  несовместных работ. Для каждой пары вводится своя булевская переменная.

Если работа выполняется по частям, ограничения вводятся для каждой части.

3. Условия совместности:

$$t_i \leq t_k \leq t_i + \Delta_i + T(1 - y_i), \quad (4)$$

(работа  $k$  выполняется совместно с работой  $i$  и короче нее).

$$t_i - t_k \leq 0$$

$$t_k + \Delta_k - t_i - \Delta_i \leq 0. \quad (5)$$

4. Для всех работ, начало которых жестко задано:

$$t_i = a_i. \quad (6)$$

5. Для всех работ, которые могут выполняться по частям.

а) Для работ  $k$ , которые могут выполняться по частям

$$\sum_{j=1}^{p_k} y_{k_j} = p_k y_k. \quad (7)$$

$y_k=1$ , если  $k$ -я работа принята к исполнению. В этом случае должны выполняться все ее части. Если  $k$ -я работа не принята к исполнению ( $y_k=0$ ), то не выполняется ни одна ее часть.

Из ограничения следует, что

$$y_k = 1 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{p_k} y_{k_j} > 0. \quad (8)$$

б) Для всех работ  $k$ , которые могут выполняться по частям

$$\sum_{j=1}^{p_k} \Delta_{k_j} = \Delta_k, \quad (9)$$

$$в) t_{k_j} + \Delta_{k_j} \leq t_{k_{j+1}}. \quad (10)$$

Если работа выполняется по частям, то в условиях несовместности нужно учитывать несовместность с частями.

$$6. \Delta_i \leq d_i y_i. \quad (11)$$

Длительность работы не должна превышать ее директивные сроки.

$$7. t_i, \Delta_i \geq 0, \quad y_i, z_{ik} \in \{0,1\}. \quad (12)$$

Перейдем к рассмотрению постановки задачи диспетчеризации.

Дано некоторое количество работ, которые желательно выполнить в заданный период времени, и связи между ними.

Нужно распределить работы в плановом периоде так, чтобы заданные связи были выполнены.

Требования к решению задачи:

- нарушения сроков начала работ нежелательно;
- разбивка работ на части нежелательна;
- отказ от выполнения работ нежелателен;
- уменьшение длительности работ нежелательно.

Эти требования отражаются в целевой функции.

Целевая функция:

$u_1 = c_1 \sum |t_i - a_i|$  – штраф за нарушение директивных сроков начала работ. Суммирование ведется по всем основным работам.

$u_2 = c_2 \sum (t_{k_{p_k}} + \Delta_{k_{p_k}} - t_{k_1} - \sum_{j=1}^{p_k} \Delta_{k_j})$  – штраф за выполнение работ «по частям».

Внешнее суммирование ведется по всем основным работам, которые допускают выполнение «по частям».

$u_3 = c_3 \sum (1 - y_i)$  – штраф за отказ от выполнения работ. Суммирование ведется по всем основным работам.

$u_4 = c_4 \sum (d_i - \Delta_i)$  – штраф за уменьшение длительности работ. Суммирование ведется по всем основным работам. Если работа не принята к исполнению ( $\Delta_i = 0$ ), то штраф добавляется к штрафу за отказ.

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \rightarrow \min.$$

Решение задачи ведется с учетом ограничений (1)-(12), которые описаны выше.

### Библиографический список

1. Зубов Н.Н., В.А. Титов. Моделирование и оптимизация технологических процессов: учебное пособие. СПб., 2009.
2. Коган Д.И., Федосенко Ю.С.. Задача диспетчеризации: анализ вычислительной сложности и полиномиально разрешимые подклассы // Дискретная математика. 1996. Т. 8, вып. 3. С. 135–147.
3. Штерензон В.А.. Моделирование технологических процессов: конспект лекций. Екатеринбург: РГППУ, 2010.

## References

1. Zubov N.N., Titov V.A. Modeling and optimization of technological processes: a tutorial. SPb., 2009.
2. Kogan D.I., Fedossenko J.S. Problem: analysis of computational complexity, and polynomially solvable subclasses. *Discrete mathematics*. 1996. T. 8, no. 3. P. 135-147.
3. Shterenzon V.A. Modeling process: lecture notes. Ekaterinburg, RGPPU, 2010.

*A.Yu. Egorova, V.M. Montlevich\**

## SIMULATION OF TECHNOLOGICAL COMMUNICATION RANGE OF WORKS

At the present time, when the enterprises acute problem of optimization of working time, the question of studying complex modeling technological relations work as relevant as ever. Ease of implementation provides a network representation of a range of works, but of different types of interactions and relationships between individual works makes this task interesting for practical study. In this article the author examines the classification of the possible links between the works and describes the mathematical model of the relationship between work as a system of equations and inequalities with Boolean variables.

**Key words:** communication between jobs, typology, modeling relations, scheduling, task scheduling.

---

\* *Egorova Alena Yurievna* (egorovaalena@inbox.ru), *Montlevich Vladimir Mikhailovich* (vlmont@mail.ru), Department of Mathematics and Business Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.