МАТЕМАТИКА

УДК 519.946

Э.И. Абдурагимов[1]

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОДУ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В работе получены достаточные условия существования, по крайней мере, одного положительного решения двухточечной краевой задачи для одного класса сильно нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Задача расмотрена на отрезке [0,1] (более общий случай отрезка $[0, a]$ сводится к рассмотренному). На концах отрезка само решение y и его вторая производная y'' равны нулю. Правая часть уравнения $f(x, y)$ не отрицательна при $x \geqslant 0$ и при всех y. Выполнение достаточных условий существования легко проверяется. В доказательстве существования используется теория конусов в банаховом пространстве. Получены также априорные оценки положительного решения, которые можно использовать в дальнейшем при численном построении решения.

Ключевые слова: положительное решение, двухточечная краевая задача, нелинейное дифференциальное уравнение, существование.

Введение

В работе продолжаются исследования автора [1; 2] относительно положительных решений краевых задач для нелинейных уравнений четвертого порядка с сильной нелинейностью. Аналогичные исследования проводились в работах [3–10] и других.

Расмотрим на отрезке [0,1] двухточечную краевую задачу:

$$y^{(4)} = f(x, y), 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0, \tag{2}$$

где $f(x, z)$ — непрерывная и неотрицательная при $x \in [0, 1]$ и $z \geqslant 0$ функция.

Предположим, что $f(x, z)$ удовлетворяет условиям

$$a(x)\varphi_1(z) \leqslant f(x, z) \leqslant b(x)\varphi_2(z), \tag{3}$$

[1]© Абдурагимов Э.И., 2014
Абдурагимов Эльдерхан Исрапилович (abduragimov42@mail.ru), отдел математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, старший научный сотрудник 367025, Российская Федерация, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45.

где $a(x)$ и $b(x)$ — непрерывные, неотрицательные при $x \in [0,1]$ функции, причем $a(x) \leqslant b(x)$, $a(x) \not\equiv 0$, а функции $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \frac{\varphi_2(z)}{z}$ предполагаются непрерывными, неотрицательными и монотонно возрастающими от 0 до $+\infty$ при $z \geqslant 0$. Предположим еще, что существуют числа $c_0 > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что

$$\varphi_1(z) \geqslant c_0 z^{\alpha+1}, \quad z \geqslant 0. \tag{4}$$

Очевидно, $y(x) \equiv 0$ — тривиальное решение этой задачи. Под **положительным решением** этой задачи понимается функция $y \in C^4[0,1]$, удовлетворяющая уравнению (1), краевым условиям (2) и положительная при $x \in (0,1)$.

В данной работе доказывается существование, по крайней мере, одного положительного решения задачи (1), (2) и получены априорные оценки положительного решения.

1. Вспомогательные понятия и предложения

Приведем некоторые определения и предложения из [11], необходимые в дальнейшем.

Определение 1 ([11, с. 256]). *Замкнутое выпуклое множество K банахова пространства E называется конусом, если из $x \in K$ и $x \not\equiv 0$ вытекает, что $\alpha x \in K$ при $\alpha \geqslant 0$ и $\alpha x \overline{\in} K$ при $\alpha < 0$.*

Каждый конус K определяет в банаховом пространстве E полуупорядоченность: пишут $x \prec y$ или $y \succ x$, если $y - x \in K$.

Определение 2 ([11, с. 259]). *Нелинейный оператор A называется положительным на множестве M банахова пространства E, если $AM \subset K$, где K — конус в E.*

Пусть r_1, r_2 — положительные числа. Обозначим $K(0,r_1) = \{x \in K : ||x|| \leqslant r_1\}$, $K(r_2,\infty) = \{x \in K : ||x|| \geqslant r_2\}$.

Определение 3 ([11, с. 362]). *Пусть существуют такие положительные числа r_1 и r_2, что $Ax \overline{\succ} x$ при $x \in K(0,r_1)(x \neq 0)$ и $Ax \overline{\prec} x$ при $x \in K(r_2,\infty)$, тогда будем называть оператор A растяжением конуса K. Аналогично A является сжатием конуса K, если $Ax \overline{\prec} x$ при $x \in K(0,r_1)(x \neq 0)$ и $Ax \overline{\succ} x$ при $x \in K(r_2,\infty)$.*

Теорема 1 ([11, с. 362–363]). *Пусть положительный вполне непрерывный оператор A является растяжением или сжатием конуса K. Тогда A имеет в конусе K, по крайней мере, одну ненулевую неподвижную точку.*

2. Существование положительного решения

Задачу (1), (2) можно записать в виде

$$y'' = u, \quad 0 < x < 1, \tag{5}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{6}$$

$$u'' = f(x,y), \quad 0 < x < 1, \tag{7}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{8}$$

С помощью функции Грина

$$G(x,t) = \begin{cases} x(1-t), & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t(1-x), & \text{если } t \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

для оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ с краевыми условиями (8) задачу (1), (2) можно записать в эквивалентной в $C^4[0,1]$ форме

$$y(x) = \int\limits_0^1 K(x,t)f(t,y(t))dt, \tag{9}$$

где

$$K(x,t) = \int\limits_0^1 G(x,s)G(s,t)ds. \tag{10}$$

Так как $f(x,y) \geqslant 0$, то из (7), (8) следует, что $u(x) \leqslant 0$ при $x \in [0,1]$. Тогда из (5), (6) следует, что $y'' \leqslant 0$ и $y(x) \geqslant 0$ при $x \in [0,1]$, т. е. $y(x)-$ непрерывная, неотрицательная и выпуклая вверх функция.

Интегральное уравнение (9) запишем в виде

$$y = Ay, \tag{11}$$

где

$$Ay(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t,y(t))dt.$$

Обозначим через K конус непрерывных, неотрицательных и выпуклых вверх функций $w(x)$ на $[0,1]$ таких, что $w(0) = w''(0) = w(1) = w''(1) = 0$. Для элементов $u, v \in K$ под $u \prec v (u \succ v)$ будем подразумевать $u(x) \leqslant v(x)$ при $x \in [0,1]$ ($u(x) \geqslant v(x)$ при $x \in [0,1]$), причем $u(x) \not\equiv v(x)$.

Пусть $d(x)$ — расстояние от точки x до границы отрезка $[0,1]$, $d(x) = \min(x, 1-x)$. Легко видеть, что

$$G(x,t) \geqslant d(x)d(t). \tag{12}$$

Тогда

$$K(x,t) = \int_0^1 G(x,s)G(s,t)ds \geqslant d(x)d(t)\int_0^1 d^2(s)ds = \frac{d(x)d(t)}{12}. \tag{13}$$

Очевидно, $K(x,t)$ — непрерывная, неотрицательная и выпуклая вверх функция. Тогда $v(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t,y(t))dt$ также непрерывная, неотрицательная и выпуклая вверх функция. Кроме того, $v(0) = v''(0) = v(1) = v''(1) = 0$. Следовательно, оператор A положительный.

Покажем, что A растягивает конус K. В самом деле, пусть r_1 — некоторое положительное число (его значение будет уточнено ниже). Пусть $y \in K(0, r_1)$, т. е. $||y|| \leqslant r_1$. В силу (3) и монотонного возрастания $\varphi_2(t)$ и $\frac{\varphi_2(t)}{t}$ имеем

$$\begin{gathered} Ay(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t,y(t))dt \leqslant \varphi_2(||y||)\int_0^1 K(x,t)b(t)dt \leqslant \\ \leqslant b_0\varphi_2(||y||)\int_0^1 K(x,t)dt = b_0\frac{\varphi_2(||y||)}{||y||}||y||\int_0^1 K(x,t)dt \leqslant \\ \leqslant b_0\frac{\varphi_2(r_1}{r_1}||y||\int_0^1 K(x,t)dt, \end{gathered} \tag{14}$$

где

$$b_0 = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} b(x).$$

Легко проверить, что для непрерывной, неотрицательной и выпуклой вверх на [0,1] функции $w(x)$ справедливо неравенство

$$w(x) \geqslant ||w|| d(x), \tag{15}$$

где $\|w\| = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} w(x)$. А так как $y(x)-$ непрерывная, неотрицательная и выпуклая вверх функция, то в силу (15) $||y|| \leqslant 2y(\frac{1}{2})$. Тогда из (14) получим

$$Ay(x) \leqslant 2b_0 \frac{\varphi_2(r_1)}{r_1} y(\frac{1}{2}) \int_0^1 K(x,t)dt. \tag{16}$$

Функция $v(x) = \int_0^1 K(x,t)dt$ является решением краевой задачи

$$v^{IV} = 1,$$

$$v(0) = v(1) = v''(0) = v''(1) = 0$$

и имеет вид

$$v(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + x}{24}.$$

Легко проверить, что $v(x) \leqslant v(1/2) = \frac{5}{384}$. Поэтому из (16) следует, что

$$Ay(\frac{1}{2}) \leqslant 2b_0 \frac{\varphi_2(r_1)}{r_1} \frac{5}{384} y(\frac{1}{2}) = \frac{5}{192} \frac{\varphi_2(r_1)}{r_1} y(\frac{1}{2}). \tag{17}$$

В качестве r_1 возьмем единственный (в силу монотонного возрастания функции $\frac{\varphi_2(t)}{t}$) корень уравнения

$$\frac{\varphi_2(t)}{t} = \frac{96}{5}. \tag{18}$$

Тогда из (17) следует

$$Ay(\frac{1}{2}) < y(\frac{1}{2}).$$

Следовательно, $Ay \overline{\succ} y$ при $y \in K(0,r_1)$, где r_1 — корень уравнения (18).

Пусть теперь r_2 — некоторое положительное число (его значение будет уточнено ниже). Пусть $y \in K(r_2,\infty)$. В силу (12), (4) и (15) имеем

$$Ay(x) \geqslant \frac{d(x)}{12} \int_0^1 d(t)a(t)\varphi_1(y(t))dt \geqslant \frac{c_0}{12} d(x) \int_0^1 d(t)a(t)\,(y(t))^{\alpha+1}\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{c_0}{12} d(x) ||y||^{\alpha+1} \int_0^1 d(t)^{\alpha+2} a(t)dt \geqslant \frac{c_0c_1}{12} d(x) ||y||^{\alpha} y(x), \tag{19}$$

где $c_1 = \int_0^1 d(t)^{\alpha+2} a(t)dt$. Отсюда при $x = \frac{1}{2}$ для $y \in K(r_2,\infty)$ имеем

$$Ay(\frac{1}{2}) \geqslant \frac{c_0c_1}{24} r_2^{\alpha} y(\frac{1}{2}). \tag{20}$$

Пусть $t_0 = \left(\frac{24}{c_0c_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Возьмем $r_2 > \max(t_0, r_1)$. Тогда из (20) следует

$$Ay(\frac{1}{2}) > y(\frac{1}{2}).$$

Следовательно, $Ay \overline{\prec} y$ при $y \in K(r_2,\infty)$.

Таким образом, показано, что существуют положительные числа r_1 и r_2, что $Ay \overline{\succ} y$ при $y \in K(0,r_1)$, и $Ay \overline{\prec} y$ при $y \in K(r_2,\infty)$. Следовательно, положительный оператор A растягивает конус K. Вполне непрерывность оператора A очевидна.

Тогда по теореме 1 уравнение (9) имеет, по крайней мере, одно ненулевое решение $y(x)$. Из (9) в силу (3) следует, что решение $y(x)$ положительно при $x \in (0, 1)$. В силу полученных выше оценок нетрудно убедиться, что $y \in C^4[0, 1]$. Доказана

Теорема 2. *Пусть $f(x, y)-$ непрерывная по обоим аргументам функция при $x \in [0, 1]$ и $y \geqslant 0$, удовлетворяет условию (3), в котором функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \frac{\varphi_2(t}{t}$ непрерывные, неотрицательные и возрастающие от 0 до ∞ при $t \in [0, 1]$, а $\varphi_1(t)$ удовлетворяет условию (4). Тогда существует, по крайней мере, одно положительное решение задачи (1), (2).*

Замечание. *Очевидно, отрезок [0,1] в теореме 2 можно заменить на произвольный отрезок $[0, x_0]$ с $x_0 > 0$.*

3. Априорные оценки положительного решения

Получим априорные оценки положительного решения задачи (1), (2). Их можно использовать в дальнейшем для построения положительного решения задачи (1), (2) численными методами. Положительное решение задачи (1), (2) удовлетворяет интегральному уравнению (9). Тогда, пользуясь неравенством (19), для него имеем

$$y(x) \geqslant \frac{c_0 c_1}{12} d(x) \|y\|^{\alpha+1},$$

где $c_1 = \int_0^1 (d(t))^{\alpha+2} a(t) dt$. Отсюда получаем априорную оценку

$$\|y\| \leqslant \left(\frac{24}{c_0 c_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \equiv M_0. \tag{21}$$

С помощью функции Грина $G(x, t)$ решение задачи (7), (8) можно записать в виде

$$u(x) = -\int_0^1 G(x, t) f(t, y(t)) dt. \tag{22}$$

Так как $G(x, t) \geqslant 0$ при $x, t \in [0, 1]$, то из (22) в силу (3) и возрастания $\varphi_2(z)$ имеем

$$0 \geqslant u(x) \geqslant -\int_0^1 G(x, t) b_0 \varphi_2(y(t)) dt \geqslant$$

$$\geqslant -b_0 \varphi_2(M_0) \int_0^1 G(x, t) dt = -b_0 \varphi_2(M_0) \frac{x - x^2}{2} \geqslant -\frac{b_0}{8} \varphi_2(M_0).$$

Следовательно,

$$\|y''\| = \|u\| \leqslant \frac{b_0}{8} \varphi_2(M_0) \equiv M_2, \tag{23}$$

причем $y''(x) \leqslant 0$ при $x \in [0, 1]$.

Из (9) следует, что

$$y'(0) = \int_0^1 \frac{\partial K(0, t)}{\partial x} f(t, y(t)) dt, \tag{24}$$

а из (10) имеем

$$\frac{\partial K(x, t)}{\partial x} = \int_0^1 \frac{\partial G(s, t)}{\partial x} G(s, t) ds = \int_0^x (-t) G(s, t) ds + \int_x^1 (1 - t) G(s, t) ds.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial K(0, t)}{\partial x} = (1 - t) \int_0^1 G(s, t) ds < \frac{1 - t}{8}.$$

Тогда из (24) в силу (3) и возрастания $\varphi_2(z)$ имеем

$$0 \leqslant y'(0) \leqslant \frac{1}{8}\int_0^1 (1-t)f(t,y(t))dt \leqslant \frac{b_0\varphi_2(M_0)}{16}. \tag{25}$$

Так как $y^{(4)} = u'' = f(x,y)$, то в силу возрастания $\varphi_2(z)$

$$\|y^{(4)}\| \leqslant b_0\varphi(M_0) \equiv M_4. \tag{26}$$

Из (23) следует, что

$$y'''(x) = u'(x) = -\int_0^1 \frac{\partial G(x,t)}{\partial x} f(t,y(t))dt.$$

Следовательно,

$$0 \geqslant y'''(0) = -\int_0^1 \frac{\partial G(0,t)}{\partial x} f(t,y(t))dt = -\int_0^1 (1-t)f(t,y(t))dt.$$

Отсюда в силу (3) и возрастания $\varphi_2(z)$ имеем

$$0 \geqslant y'''(0) \geqslant \frac{-b_0}{2}\varphi_2(M_0). \tag{27}$$

В силу (23) и (25)

$$y'(1) = y'(0) + \int_0^1 y''(t)dt \geqslant \frac{b_0\varphi_2(M_0)}{16} - \frac{b_0\varphi_2(M_0)}{8} = -\frac{b_0\varphi_2(M_0)}{16}.$$

Следовательно,

$$|y'(x)| \leqslant \frac{b_0\varphi_2(M_0)}{16} \equiv M_1. \tag{28}$$

Так как $y^{(4)} = u''(x) = f(x,y(x)) \geqslant 0$ при $x \in [0,1]$, то $y'''(0) \leqslant y'''(x) \leqslant y'''(1)$. Тогда, интегрируя уравнение (1) от 0 до 1 и пользуясь (26), получим

$$y'''(1) = y'''(0) + \int_0^1 y^{(4)}(x)dx \leqslant b_0\varphi_2(M_0).$$

Следовательно, в силу (27)

$$\|y'''\| \leqslant b_0\varphi_2(M_0). \tag{29}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы 2 для положительного решения задачи (1), (2) справедливы оценки*

$$\|y^{(i)}\| \leqslant M_i, \quad i = 0,1,2,3,4,$$

где M_i определены равенствами (21), (23), (28), (29), (26) соответственно, и оценки

$$0 \leqslant y'(0) \leqslant \frac{b_0\varphi_2(M_0)}{16},$$

$$-\frac{b_0\varphi_2(M_0)}{2} \leqslant y'''(0) \leqslant 0.$$

Заключение

Доказано, что двухточечная краевая задача

$$y^{(4)} = f(x, y), 0 < x < 1,$$
$$y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0$$

имеет, по крайней мере, одно положительное решение, если функция $f(x, y)$ непрерывна, неотрицательна при $x \in [0, 1]$ и $y \geqslant 0$ и удовлетворяет условиям (3), (4). Кроме того, получены априорные оценки положительного решения.

Литература

[1] Абдурагимов Э.И. Положительное решение двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка // Изв. вузов. Сер.: Математика. 2006. № 8. С. 3–6.

[2] Абдурагимов Э.И. Положительное решение двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка и численный метод его построения // Вестник Самарского государственного университета. 2010. № 2(76). С. 5–12.

[3] Yermachenko I. Multiple solutions of the fourth-order Emden-Fowler equation // Math. Model. and Anal. 2006. № 3(11). P. 256–347.

[4] Ma De-xiang, Ge Wei-gao. Multiple symmetric positive solutions of fourth-order two point boundary value problems // Appl. Math. and Comput.: An International Journal. 2006. № 1–2(22). P. 295–306.

[5] Ma Ruyun, Xu Ling. Existence of positive solutions of a nonlinear fourth-order boundary value problem // Appl. Math. Lett. 2010. Vol. 23. № 5. P. 537-–543.

[6] WeiJin-ying, Li Yong-xiang. Positive solutions of fourth-boundary value problems // South.Yangtze, Nat. Sci. Ed. 2007. № 1(6). P. 124–126.

[7] Yao Qing-liu. Solvability of discontinuous beam equations simply supported at both ends // Jishou daxue xuebao. Ziran kexue ban J. Jishou Univ. Natur. Sci. Ed. 2009. Vol. 30. № 5. P. 4—12.

[8] Webb J.R.L., Infante G., Franco D. Positive solutions of nonlinear fourth-order boundary-value problems with local and nonlocal boundary conditions. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics. 2008. № 138(2). P. 427–446.

[9] Wang G., Zhou M., Sun L. Fourth-order problems with fully nonlinear boundary conditions // J. Math. Analysis Applic. 2007. № 325. P. 130–140.

[10] Yao Qing-liu. Existence of solutions and positive solutions to a fourth-order tw0-point BVP with second derivative // J. Zhejiang Univ. SCI. 2004. Vol. 5. № 3. P. 353–357.

[11] Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа, М.: Наука, 1975. 512 с.

References

[1] Abduragimov E.I. Positive solution of two-point boundary problem for one nonlinear ODE of the fourth order. *Izv.vuzov. Matematika* [*News of Higher Educational Institutions. Mathematics*], 2006, № 8, pp. 3–6 [in Russian].

[2] Abduragimov E.I. Positive solution of two-point boundary problem for one nonlinear ODE of the fourth order and numerical method of its costruction. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [*Vestnik of Samara State University*], 2010, № 2(76), pp. 5–12 [in Russian].

[3] Yermachenko I. Multiple solutions of the fourth-order Emden-Fowler equation. *Math. Model. and Anal.*, 2006, № 3(11), pp. 256–347.

[4] Ma De-xiang, Ge Wei-gao. Multiple symmetric positive solutions of fourth-order two point boundary value problems. *Appl. Math. and Comput.: An International Journal*, 2006, № 1–2(22), pp. 295–306.

[5] Ma Ruyun, Xu Ling. Existence of positive solutions of a nonlinear fourth-order boundary value problem. *Appl. Math. Lett*, 2010, Vol. 23, № 5, pp. 537–543.

[6] WeiJin-ying, Li Yong -xiang. Positive solutions of fourth-boundary value problems. *South.Yangtze, Nat. Sci. Ed.* 2007, № 1(6), pp. 124–126.

[7] Yao Qing-liu. Solvability of discontinuous beam equations simply supported at both ends. *Jishou daxue xuebao. Ziran kexue ban J. Jishou Univ.Natur.Sci. Ed*, 2009, v. 30, № 5, pp. 4–12.

[8] Webb J.R.L., Infante G., Franco D. Positive solutions of nonlinear fourth-order boundary-value problems with local and nonlocal boundary conditions. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 2008, 138(2), pp. 427–446.

[9] Wang G., Zhou M., Sun L. Fourth-order problems with fully nonlinear boundary conditions. *J. Math. Analysis Applic*, 2007, № 325, pp. 130–140.

[10] Yao Qing-liu. Existence of solutions and positive solutions to a fourth-order tw0-point BVP with second derivative. *J. Zhejiang Univ. SCI*, 2004, Vol.5, № 3, pp. 353–357.

[11] Krasnoselski M.A., Zabreiko P.P. Geometrical methods of nonlinear analysis. M., Science, 1975, 512 p. [in Russian].

E.I. Abduragimov[2]

EXISTENCE OF POSITIVE SOLUTION OF TWO-POINT BOUNDARY PROBLEM FOR ONE NONLINEAR ODE OF THE FOURTH ORDER

In the work sufficient conditions for existence at least one positive solution of two-point boundary problem for one class of strongly nonlinear differential equations of the fourth order are received. The problem is considered on a segment [0,1] (more general case of $segment[0, a]$ is reduced to considered). On the ends of a segment the solution of y and its second derivative of y'' are equal to zero. Right part of an equation $f(x, y)$ isn't negative at $x \geqslant 0$ and at all y. Performance of sufficient conditions is easily checked. Performance of these conditions is easily checked. In the proof of existence the theory of cones in banach space is used. Also apriori estimates of positive solution, which is possible to use further at numerical construction of the solution are obtained.

Key words: positive solution,two-point boundary problem, nonlinear differential equation, existence.

Статья поступила в редакцию 20/VI/2014.

The article received 20/VI/2014.

[2] *Abduragimov Elderkhan Israpilovich* (abduragimov42@mail.ru), Department of Mathematics and Informatics, Dagestan Scientific Center of RAS, Makhachkala, 367025, Republic of Dagestan.