УДК 517.95

Р.М. Сафина[1]

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУЛЬКИНА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

В данной статье для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом изучена первая граничная задача. На основании свойства полноты системы собственных функций одномерной спектральной задачи установлен критерий единственности. Решение поставленной задачи построено в виде суммы ряда Фурье — Бесселя. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей, в связи чем найдена оценка об отделенности малого знаменателя от нуля с соответствующей асимптотикой, что позволило обосновать сходимость построенного ряда в классе регулярных решений при определенных ограничениях на данные задачи.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, задача Дирихле, спектральный метод, ряд Фурье — Бесселя, единственность, существование.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение С.П. Пулькина [1]

$$Su \equiv u_{xx} + (\text{sgn}y)u_{yy} + \frac{k}{x}u_x = 0 \tag{1.1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y)|\ \ 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где $\alpha > 0,\ \beta > 0$ — заданные действительные числа, $k \neq 0$ – известная произвольная постоянная. Здесь рассмотрим наиболее распространенный случай, когда $0 < k < 1$.

Задача Дирихле. Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D^+ \cup D^-); \tag{1.2}$$

$$Su(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D^+ \cup D^-; \tag{1.3}$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(l, y) = 0, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta; \tag{1.4}$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \quad u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.5}$$

где φ, ψ – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0,\ D^+ = D \cap \{y > 0\},\ D^- = D \cap \{y < 0\}$.

Интерес к задаче Дирихле для уравнения смешанного типа возник после работы Ф.И. Франкля [2], в которой впервые обращено внимание на то, что задачи

Сафина Римма Марселевна (rimma77705@mail.ru), кафедра физико-математических дисциплин и информационных технологий, Поволжская государственная академия физической культуры, спорта и туризма, 420138, Российская Федерация, г. Казань, ул. Деревня Универсиады, 35.

транзвуковой газовой динамики сводятся к этой задаче. Некорректность задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева $u_{xx} + \mathrm{sgn} y u_{yy} = 0$ показал А.В. Бицадзе [3]. После этой работы возникла проблема поиска смешанных областей, для которых задача Дирихле является корректно поставленной. В дальнейшем задача Дирихле для уравнений смешанного типа изучалась многими авторами [4–12]. Более полную библиографию работ, посвященных этой тематике, можно найти в монографии [12].

В последние годы задача Дирихле для уравнений смешанного типа исследована в работах [13–18].

В данной работе установлен критерий единственности решение задачи Дирихле. Решение построено в виде суммы ряда Фурье — Бесселя. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей как в работах [13–16], в связи с чем найдена оценка об отделенности малого знаменателя от нуля с соответствующей асимптотикой, что позволило обосновать сходимость построенного ряда в классе функций (1.2).

2. Единственность решения

Решения уравнения (1.1), не равные нулю на множестве $D^+ \cup D^-$ и удовлетворяющие нулевым граничным условиям (1.4), будем искать в виде произведения $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$.

Подставляя данное произведение в уравнение (1.1), получим

$$X''(x) + \frac{k}{x} X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{2.1}$$

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{2.2}$$

где λ^2 – постоянная разделения.

Решение спектральной задачи (2.1) и (2.2) определяется по формуле

$$X_n(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n x), \tag{2.3}$$

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{l}, \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{2.4}$$

где $J_\nu(t)$ – функция Бесселя первого рода, μ_n – n-ый корень уравнения $J_{\frac{1-k}{2}}(\mu_n) = 0$.

Отметим, что для собственных значений задачи (2.1) и (2.2) при больших n справедлива асимптотическая формула [19, с. 317]:

$$\mu_n = \lambda_n l = \pi n - \frac{k}{4}\pi + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{2.5}$$

Пусть $u(x,y)$ – решение задачи (1.2)–(1.5). Рассмотрим функции

$$u_n(y) = \int_0^l u(x,y) x^k X_n(x) dx, \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{2.6}$$

где $X_n(x)$ определяются по формуле (2.3). На основании (2.6) введем функции

$$u_{n,\varepsilon}(y) = \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,y) x^k X_n(x) dx, \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{2.7}$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Дифференцируя равенство (2.7) по y дважды при $y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta)$ и учитывая уравнение (1.1), получим

$$\begin{aligned} u''_{n,\varepsilon}(y) = \textstyle\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{yy}(x,y) x^k X_n(x) dx = \\ = -(\mathrm{sgny}) \textstyle\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} (u_{xx} + \frac{k}{x} u_x) x^k X_n(x) dx = \\ = -(\mathrm{sgny}) \textstyle\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}(x^k u_x) X_n(x) dx = \\ = -(\mathrm{sgny}) \Big[x^k u_x X_n(x) \Big|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} - \textstyle\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^k u_x X'_n(x) dx \Big]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Из равенства (2.7), в силу уравнения (2.1), имеем

$$\begin{aligned} u_{n,\varepsilon}(y) = -\tfrac{1}{\lambda_n^2} \textstyle\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,y) x^k \Big[X''_n(x) + \frac{k}{x} X'_n(x) \Big] dx = \\ = -\tfrac{1}{\lambda_n^2} \textstyle\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,y) \frac{d}{dx}(x^k X'_n(x)) dx = \\ = -\tfrac{1}{\lambda_n^2} \Big[u(x,y) x^k X'_n(x) \Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \textstyle\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^k u_x X'_n(x) dx \Big]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Из равенства (2.9) найдем

$$\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_x x^k X'_n(x) dx = \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(y) + u(x,y) x^k X'_n(x) \Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}. \tag{2.10}$$

Подставляя (2.10) в (2.8), получим

$$u''_{n,\varepsilon}(y) = -(\mathrm{sgny}) \left[x^k u_x X_n(x) \Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(y) - u(x,y) x^k X'_n(x) \Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \right].$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$, с учетом граничных условий (1.4) и (2.2) получим, что $u_n(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u''_n(y) + (\mathrm{sgny}) \lambda_n^2 u_n(y) = 0, \quad y \in [-\alpha, 0) \cup (0, \beta]. \tag{2.11}$$

Общее решение дифференциального уравнения (2.11) имеет вид

$$u_n(y) = \begin{cases} a_n e^{\lambda_n y} + b_n e^{-\lambda_n y}, & y > 0, \\ c_n \cos \lambda_n y + d_n \sin \lambda_n y, & y < 0, \end{cases} \tag{2.12}$$

где a_n, b_n, c_n, d_n – произвольные постоянные.

Теперь в (2.12) на основании (1.2) подберем постоянные a_n, b_n, c_n и d_n так, чтобы выполнялись условия сопряжения

$$u_n(0-0) = u_n(0+0), \quad u'_n(0-0) = u'_n(0+0). \tag{2.13}$$

Условия (2.13) выполняются только тогда, когда $c_n = a_n + b_n$ и $d_n = a_n - b_n$, $n = 1, 2, 3, ...$.

С учетом последних равенств функции (2.12) принимают вид

$$u_n(y) = \begin{cases} c_n \operatorname{ch} \lambda_n y + d_n \operatorname{sh} \lambda_n y, & y > 0, \\ c_n \cos \lambda_n y + d_n \sin \lambda_n y, & y < 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Для нахождения постоянных c_n и d_n воспользуемся граничным условием (1.5) и формулой (2.6):

$$u_n(\beta) = \int_0^l u(x,\beta) x^k X_n(x) dx = \int_0^l \varphi(x) x^k X_n(x) dx = \varphi_n, \tag{2.15}$$

$$u_n(-\alpha) = \int_0^l u(x,-\alpha) x^k X_n(x) dx = \int_0^l \psi(x) x^k X_n(x) dx = \psi_n. \tag{2.16}$$

Теперь на основании (2.14)–(2.16) получим систему

$$\begin{cases} c_n \operatorname{ch} \lambda_n\beta + d_n \operatorname{sh} \lambda_n\beta = \varphi_n, \\ c_n \cos \lambda_n\alpha - d_n \sin \lambda_n\alpha = \psi_n. \end{cases} \tag{2.17}$$

Если определитель системы (2.17) при всех $n \in N$

$$\triangle(n,\alpha,\beta) = ch\lambda_n\beta \sin \lambda_n\alpha + sh\lambda_n\beta \cos \lambda_n\alpha \neq 0, \tag{2.18}$$

то данная система имеет единственное решение

$$c_n = \frac{\psi_n sh\lambda_n\beta + \varphi_n \sin \lambda_n\alpha}{ch\lambda_n\beta \sin \lambda_n\alpha + sh\lambda_n\beta \cos \lambda_n\alpha}, \tag{2.19}$$

$$d_n = \frac{\varphi_n \cos \lambda_n\alpha - \psi_n ch\lambda_n\beta}{ch\lambda_n\beta \sin \lambda_n\alpha + sh\lambda_n\beta \cos \lambda_n\alpha}. \tag{2.20}$$

С учетом (2.14), (2.19) и (2.20) найдем окончательный вид функции

$$u_n(y) = \begin{cases} \frac{1}{\triangle(n,\alpha,\beta)} \left[\varphi_n(\cos \lambda_n\alpha sh\lambda_n y + \sin \lambda_n\alpha ch\lambda_n y) + \psi_n sh\lambda_n(\beta - y)\right], & y > 0, \\ \frac{1}{\triangle(n,\alpha,\beta)} \left[\varphi_n \sin \lambda_n(y+\alpha) + \psi_n(sh\lambda_n\beta \cos \lambda_n y - ch\lambda_n\beta \sin \lambda_n y)\right], & y < 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Пусть теперь $\varphi(x) \equiv 0$ и $\psi(x) \equiv 0$ и выполнены условия (2.18). Тогда из равенств (2.15), (2.16) и (2.21) следует, что $u_n(y) \equiv 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (2.6) получим

$$\int_0^l u(x,y)x^k X_n(x)dx = 0, \quad n = 1,2,3,\dots\ . \tag{2.22}$$

Отсюда в силу полноты системы (2.3) в пространстве $L_2[0,l]$ с весом x^k следует $u(x,y) = 0$ почти для всех $x \in [0,l]$ и при любом $y \in [-\alpha,\beta]$. Поскольку $u(x,y) \in$ $\in C(\overline{D})$, то $u(x,y) = 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α,β и $n = s \in \mathbb{N}$ нарушено условие (2.18), т. е. $\triangle(s,\alpha,\beta) = 0$. Тогда однородная задача (1.2) – (1.5) (где $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_s(x,y) = \begin{cases} \widetilde{d}_s(sh\lambda_s y ch\lambda_s\beta - sh\lambda_s\beta ch\lambda_s y)X_s(x), & y > 0, \\ \widetilde{d}_s(ch\lambda_s\beta \sin \lambda_s y - sh\lambda_s\beta \cos \lambda_s y)X_s(x), & y < 0, \end{cases} \tag{2.23}$$

где $\widetilde{d}_s$ – произвольная постоянная, не равная нулю, $X_s(x)$ определяются по формуле (2.3).

Выражение $\triangle(n,\alpha,\beta)$ представим в виде

$$\triangle(n,\alpha,\beta) = \sqrt{ch2\lambda_n\beta}\sin(\mu_n\widetilde{\alpha} + \theta_n), \tag{2.24}$$

где $\lambda_n\alpha = \frac{\mu_n}{l}\alpha = \mu_n\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\alpha} = \frac{\alpha}{l}$, $\theta_n = \arcsin\frac{ch\lambda_n\beta}{\sqrt{ch2\lambda_n\beta}} \to \frac{\pi}{4}$ при $n \to +\infty$. Из представления (2.24) видно, что выражение $\triangle(n,\alpha,\beta) = 0$ только в том случае, когда

$$\alpha = \frac{1}{\lambda_n}(\pi z - \theta_n), \quad z = 1,2,\dots\ . \tag{2.25}$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Если существует решение задачи (1.2)–(1.5), то оно единственно тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.18) при всех $n \in N$.*

3. Существование решения

Поскольку α и β – любые числа из промежутков задания, то при достаточно больших n выражение $\triangle(n,\alpha,\beta)$, которое входит в знаменатели коэффициентов (2.19) и (2.20), может стать достаточно малым, т. е. возникает проблема "малых знаменателей" [13]. Для обоснования существования решения данной задачи необходимо показать существование чисел α и β таких, что при достаточно больших n выражение $\triangle(n,\alpha,\beta)$ отделено от нуля.

Лемма 1. *Если $\widetilde{\alpha}=p/q$, $p,q\in N$, $(p,q)=1$ и $k\neq\frac{1}{p}(4r-3q)$, $0<\frac{4r-3q}{p}<1$, $r=1,...,q-1$, то существуют положительные постоянные C_0 и $n_0\in N$ такие, что при всех $n>n_0$ справедлива оценка*

$$|\triangle(n,\alpha,\beta)|\geqslant C_0e^{\lambda_n\beta}. \tag{3.1}$$

Доказательство. На основании формулы (2.5) имеем

$$\mu_n\widetilde{\alpha}=\pi n\widetilde{\alpha}-\frac{k}{4}\pi\widetilde{\alpha}+O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.2}$$

Тогда из соотношения (2.24) с учетом (3.2) получим

$$\triangle(n,\alpha,\beta)=\sqrt{ch2\lambda_n\beta}\sin\left[\pi n\widetilde{\alpha}-\frac{k}{4}\pi\widetilde{\alpha}+O\left(\frac{1}{n}\right)+\theta_n\right]. \tag{3.3}$$

Пусть теперь $\widetilde{\alpha}=p/q$ – рациональное число, где $p,q\in N$, $(p,q)=1$. В этом случае разделим np на q с остатком: $np=sq+r$, $s,r\in N\cup 0$, $0\leqslant r\leqslant q-1$. Тогда выражение (3.3) примет вид:

$$\begin{aligned}\triangle(n,\alpha,\beta)&=\sqrt{ch2\lambda_n\beta}(-1)^s\sin\left[\tfrac{\pi r}{q}-\tfrac{\pi p}{4q}k+\theta_n+O\left(\tfrac{1}{n}\right)\right]=\\&=\tfrac{e^{\lambda_n\beta}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+e^{-4\lambda_n\beta}}(-1)^s\sin\left[\tfrac{\pi r}{q}-\tfrac{\pi p}{4q}k+\tfrac{\pi}{4}-\varepsilon_n+O\left(\tfrac{1}{n}\right)\right],\end{aligned} \tag{3.4}$$

здесь $\varepsilon_n>0$ и $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Применяя формулу разности арксинусов

$$\arcsin x-\arcsin y=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}),\quad xy>0$$

и учитывая неравенство $\arcsin x<\pi x/2$, $0<x<1$, имеем

$$\begin{aligned}|\varepsilon_n|&=\left|\tfrac{\pi}{4}-\theta_n\right|=\left|\arcsin\tfrac{1}{\sqrt{2}}-\arcsin\tfrac{ch\lambda_n\beta}{\sqrt{ch2\lambda_n\beta}}\right|=\left|\arcsin\tfrac{1}{\sqrt{2}}\tfrac{sh\lambda_n\beta-ch\lambda_n\beta}{\sqrt{ch2\lambda_n\beta}}\right|=\\&=\left|\arcsin\tfrac{-e^{-\lambda_n\beta}}{\sqrt{2ch2\lambda_n\beta}}\right|<\tfrac{\pi}{2}\tfrac{e^{-\lambda_n\beta}}{\sqrt{e^{2\lambda_n\beta}+e^{-2\lambda_n\beta}}}<\tfrac{\pi}{2}e^{-2\lambda_n\beta}.\end{aligned}$$

Тогда из представления (3.4) следует, что существует номер n_0 такой, что при всех $n>n_0$

$$|\triangle(n,\alpha,\beta)|\geqslant\frac{e^{\lambda_n\beta}}{\sqrt{2}}\left|\sin\left[\frac{\pi r}{q}-\frac{\pi p}{4q}k+\frac{\pi}{4}\right]\right|=C_0e^{\lambda_n\beta}. \tag{3.5}$$

Теперь потребуем, чтобы постоянная C_0 была больше нуля, а это возможно только тогда, когда

$$\frac{\pi r}{q}-\frac{\pi p}{4q}k+\frac{\pi}{4}\neq\pi d, d\in N,$$

т. е.

$$\frac{r}{q}+\frac{1}{4}\neq d+\frac{p}{4q}k. \tag{3.6}$$

Поскольку левая часть неравенства (3.6) не превосходит 5/4, а правая часть при $d \geqslant 2$ не меньше двух, то данное неравенство (3.6) для таких d всегда справедливо.

Остается рассмотреть случай, когда $d = 1$. В этом случае неравенство (3.6) перепишем в следующем виде:

$$k \neq \frac{1}{p}\,(4r - 3q)\,, \tag{3.7}$$

которое выполнено всегда, когда k принимает иррациональные значения из интервала $(0, 1)$ или $4r \leqslant 3q$, или $\frac{4r-3q}{p} \geqslant 1$.

Случай $\frac{1}{p}\,(4r - 3q) \in (0, 1)$ в силу условия леммы исключается. Тогда из (3.5) следует справедливость оценки (3.1).

Лемма 2. *Пусть выполнена оценка (3.1) при* $n > n_0$. *Тогда при таких* n *для любых* $y \in [-\alpha, \beta]$ *справедливы оценки:*

$$|u_n(y)| \leqslant C_1(|\varphi_n| + |\psi_n|), \tag{3.8}$$

$$|u_n^{'}(y)| \leqslant C_2 n(|\varphi_n| + |\psi_n|), \tag{3.9}$$

$$|u_n^{''}(y)| \leqslant C_3 n^2(|\varphi_n| + |\psi_n|), \tag{3.10}$$

C_i *– здесь и далее положительные постоянные.*

Доказательство. На основании формул (2.21) с учетом оценки (3.1) найдем

$$\begin{gathered}|u_n(y)| \leqslant \tfrac{1}{|\triangle(n,\alpha,\beta)|}\left[|\varphi_n|(sh\lambda_n\beta + ch\lambda_n\beta) + |\psi_n|sh\lambda_n\beta\right] \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{C_0 e^{\lambda_n\beta}}\left[|\varphi_n|(sh\lambda_n\beta + ch\lambda_n\beta) + |\psi_n|sh\lambda_n\beta\right] \leqslant \widetilde{C_1}[|\varphi_n| + |\psi_n|], \quad y > 0,\end{gathered} \tag{3.11}$$

$$|u_n(y)| \leqslant \frac{1}{C_0 e^{\lambda_n\beta}}\left[|\varphi_n| + |\psi_n|(sh\lambda_n\beta + ch\lambda_n\beta)\right] \leqslant \widetilde{C_2}[|\varphi_n| + |\psi_n|], \quad y < 0. \tag{3.12}$$

Тогда при всех $y \in [-\alpha, \beta]$ и $n > n_0$

$$|u_n(y)| \leqslant C_1(|\varphi_n| + |\psi_n|), \tag{3.13}$$

здесь $C_1 = max\{\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}\}$.

На основании формул (2.21) вычислим

$$u_n^{'}(y) = \begin{cases} \frac{\lambda_n}{\triangle(n,\alpha,\beta)}\left[\varphi_n(\cos\lambda_n\alpha ch\lambda_n y + \sin\lambda_n\alpha sh\lambda_n y) - \psi_n ch\lambda_n(\beta - y)\right], & y > 0, \\ \frac{\lambda_n}{\triangle(n,\alpha,\beta)}\left[\varphi_n\cos\lambda_n(y+\alpha) - \psi_n(sh\lambda_n\beta\sin\lambda_n y + ch\lambda_n\beta\cos\lambda_n y)\right], & y < 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Аналогично, исходя из равенств (3.1) и (3.14), получим

$$\begin{gathered}|u_n^{'}(y)| \leqslant \tfrac{n}{C_0 e^{\lambda_n\beta}}\left[|\varphi_n|(ch\lambda_n\beta + sh\lambda_n\beta) - |\psi_n|ch\lambda_n\beta\right] \leqslant n\widetilde{C_3}(|\varphi_n| + |\psi_n|), \quad y > 0, \\ |u_n^{'}(y)| \leqslant \tfrac{n}{C_0 e^{\lambda_n\beta}}\left[|\varphi_n| - |\psi_n|(sh\lambda_n\beta + ch\lambda_n\beta)\right] \leqslant n\widetilde{C_4}(|\varphi_n| + |\psi_n|), \quad y < 0.\end{gathered} \tag{3.15}$$

Тогда при всех $y \in [-\alpha, \beta]$ и $n > n_0$

$$|u_n(y)| \leqslant nC_2(|\varphi_n| + |\psi_n|), \tag{3.16}$$

где $C_2 = max\{\widetilde{C_3}, \widetilde{C_4}\}$.

Для второй производной справедливо тождество

$$u_n^{''}(y) = -(\text{sgn y})\lambda_n^2 u_n(y), \quad y \in [-\alpha, 0) \cup (0, \beta].$$

Отсюда в силу оценки (3.13) следует, что

$$|u_n^{''}(y)| \leqslant \lambda_n^2|u_n(y)| \leqslant C_3 n^2(|\varphi_n| + |\psi_n|).$$

Лемма 3. *Для достаточно больших n и при всех $x \in [0,l]$ справедливы оценки:*

$$|X_n(x)| \leqslant C_5 n^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.17}$$

$$|X_n^{'}(x)| \leqslant C_6 n^{\frac{1}{2}}, \tag{3.18}$$

$$|X_n^{''}(x)| \leqslant C_7 n^{\frac{3}{2}}. \tag{3.19}$$

где C_i – положительные постоянные.

Доказательство проводится аналогично работе [16].

Лемма 4. *Если функции $\varphi(x) \in C^4[0,l]$ и $\psi(x) \in C^4[0,l]$ и $\varphi(0) = \psi(0) = \varphi^{'}(0) = \psi^{'}(0) = \varphi^{''}(0) = \psi^{''}(0) = 0$, $\varphi(l) = \psi(l) = \varphi^{'}(l) = \psi^{'}(l) = \varphi^{''}(l) = \psi^{''}(l) = 0$, то справедливы оценки:*

$$|\varphi_n| \leqslant \frac{C_8}{n^4}, \quad |\psi_n| \leqslant \frac{C_9}{n^4}. \tag{3.20}$$

Доказательство. Интегрируя два раза по частям в интеграле (2.15) с учетом равенства (2.1), имеем

$$\begin{aligned}
\varphi_n &= \textstyle\int_0^l \varphi(x) x^k X_n(x)dx = -\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^l \varphi(x)(x^k X_n^{'}(x))^{'}dx = \\
&= \textstyle\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^l \varphi^{'}(x) x^k X_n^{'}(x)dx = -\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^l (\varphi^{'}(x)x^k)^{'} X_n(x)dx = \\
&= \textstyle -\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^l \varphi^{''}(x) x^k X_n(x)dx - \frac{k}{\lambda_n^2}\int_0^l \frac{\varphi^{'}(x)}{x} x^k X_n(x)dx.
\end{aligned}$$

Отсюда получим представление

$$\varphi_n = -\frac{1}{\lambda_n^2}\varphi_n^{(2)} - \frac{k}{\lambda_n^2}\varphi_{1n}, \tag{3.21}$$

где

$$\varphi_n^{(2)} = \int_0^l \varphi^{''}(x) x^k X_n(x)dx, \quad \varphi_{1n} = \int_0^l \frac{\varphi^{'}(x)}{x} x^k X_n(x)dx.$$

Аналогично получим представления для

$$\varphi_n^{(2)} = -\frac{1}{\lambda_n^2}\varphi_n^{(4)} - \frac{k}{\lambda_n^2}\varphi_{3n}, \tag{3.22}$$

$$\varphi_{1n} = -\frac{1}{\lambda_n^2}\varphi_{1n}^{(2)} - \frac{k}{\lambda_n^2}\varphi_{2n}, \tag{3.23}$$

где

$$\varphi_n^{(4)} = \int_0^l \varphi^{(4)}(x) x^k X_n(x)dx, \quad \varphi_{3n} = \int_0^l \frac{\varphi^{'''}(x)}{x} x^k X_n(x)dx,$$

$$\varphi_{1n}^{(2)} = \int_0^l \varphi_1^{''}(x) x^k X_n(x)dx, \quad \varphi_{2n} = \int_0^l \frac{\varphi_1^{'}(x)}{x} x^k X_n(x)dx, \quad \varphi_1(x) = \varphi^{'}(x)/x.$$

Подставляя (3.22) и (3.23) в (3.21), получим

$$\varphi_n = \frac{1}{\lambda_n^4}\varphi_n^{(4)} + \frac{k}{\lambda_n^4}\varphi_{3n} + \frac{k}{\lambda_n^4}\varphi_{1n}^{(2)} + \frac{k^2}{\lambda_n^4}\varphi_{2n}. \tag{3.24}$$

Из представления (3.24) следует первая оценка из (3.20). Аналогично доказывается справедливость второй оценки из (3.20).

Если выполнены условие (2.18) и оценка (3.1), то на основании частных решений (2.3) и (2.21) решение задачи (1.2)–(1.5) можно представить в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(y) X_n(x), \tag{3.25}$$

где функции $u_n(y)$ определены по формуле (2.21), а функции $X_n(x)$ – по формуле (2.3).

Формально из ряда (3.25) почленным дифференцированием составим ряды:

$$u_y(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^{'}(y)X_n(x),\quad u_x(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(y)X_n^{'}(x). \tag{3.26}$$

$$u_{yy}(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^{''}(y)X_n(x),\quad u_{xx}(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(y)X_n^{''}(x). \tag{3.27}$$

Ряды (3.25) и (3.26) при любом $(x,y)\in\overline{D}$ мажорируются рядом

$$C_{10}\sum_{n=0}^{+\infty}n^{\frac{1}{2}}(|\varphi_n|+|\psi_n|), \tag{3.28}$$

а ряды (3.27) при любом $(x,y)\in\overline{D^+}\cup\overline{D^-}$ – рядом

$$C_{11}\sum_{n=0}^{+\infty}n^{\frac{3}{2}}(|\varphi_n|+|\psi_n|). \tag{3.29}$$

Согласно лемме 4 ряды из (3.28) и (3.29) оцениваются соответственно числовыми рядами

$$C_{12}\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-\frac{7}{2}},\quad C_{13}\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-\frac{5}{2}}. \tag{3.30}$$

На основании сходимости рядов (3.30) в силу признака Вейерштрасса сходятся равномерно ряды (3.25), (3.26) на замкнутой области $\overline{D}$, а ряды (3.27) соответственно на замкнутых областях $\overline{D^+}$ и $\overline{D^-}$. Поэтому функция $u(x,y)$, определенная рядом (3.25), удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3).

Если для указанных в лемме 1 чисел $\widetilde{\alpha}$ при некоторых $n=m=s_1,s_2,...,s_h$, где $1\leqslant s_1<s_2<...<s_h\leqslant n_0$, s_h и h – заданные натуральные числа, $\triangle(m,\alpha,\beta)=0$. Тогда для разрешимости системы (2.17) достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\varphi_m=0,\psi_m=0,m=s_1,s_2,...,s_h. \tag{3.31}$$

В этом случае решение задачи (1.2)–(1.5) определяется в виде

$$u(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{s_1-1}+...+\sum_{n=s_{h-1}+1}^{s_h-1}+\sum_{n=s_h+1}^{+\infty}\right)u_n(y)X_n(x)+\sum_{m}u_m(x,y), \tag{3.32}$$

здесь в последней сумме m принимает значения $s_1,s_2,...,s_h$, функция $u_m(x,y)$ определяется по формуле (2.23).

Итак, доказана

Теорема 2. *Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4 и выполнена оценка (3.1) при $n>n_0$. Тогда если $\triangle(n,\alpha,\beta)\neq 0$ при всех $n==\overline{1,n_0}$, то существует единственное решение задачи (1.2)–(1.5), и это решение определяется рядом (3.25); если $\triangle(n,\alpha,\beta)=0$ при некоторых $n=s_1,s_2,...,s_h$, то задача (1.2) – (1.5) разрешима только тогда, когда выполняются условия (3.31), и решение в этом случае определяется рядом (3.32).*

Литература

[1] Пулькин С.П. О единственности решения сингулярной задачи Геллерстеда // Изв. вузов. Сер.: Математика. 1960. № 6(19). С. 214–225.

[2] Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 711 с.

[3] Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа // ДАН СССР. 1953. Т. 122. № 2. С. 167–170.

[4] Шабат Б.В. Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа // ДАН СССР. 1957. Т. 112. № 3. С. 386–389.

[5] Вахания Н.Н. Об одной особой задаче для уравнения смешанного типа // Тр. АН Груз. ССР. 1963. Т. 3. С. 69–80.

[6] Cannon J.R. Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontininius coefficient // Ann. Math. pura ed appl. 1963. Vol. 62. P. 371–377.

[7] Нахушев А.М. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6. № 1. С. 190–191.

[8] Хачев М.М. Задача Дирихле для уравнения Трикоми в прямоугольнике // Диференцальные уравнения. 1975. Т. 11. № 1. С. 151–160.

[9] Хачев М.М. О задаче Дирихле для одного уравнения смешанного типа // Диференцальные уравнения. 1976. Т. 12. № 1. С. 137–143.

[10] Солдатов А.П. Задача типа Дирихле для уравнения Лаврентьева – Бицадзе. I. Теоремы единственности // ДАН. 1993. Т. 332. № 6. С. 696–698.

[11] Солдатов А.П. Задача типа Дирихле для уравнения Лаврентьева – Бицадзе. II. Теоремы существования // ДАН. 1993. Т. 333. № 1. С. 16–18.

[12] Хачев М.М. Первая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа. Нальчик: Эльбрус, 1998. 168 с.

[13] Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // ДАН. 2007. Т. 413. № 1. С. 23–26.

[14] Сабитов К.Б., Сулейманова А.Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области // Изв. вузов. Сер.: Математика. 2007. № 4. С. 45–53.

[15] Сабитов К.Б., Сулейманова А.Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением в прямоугольной области // Изв. вузов. Сер.: Математика. 2009. № 11. С. 43–52.

[16] Сабитов К.Б., Вагапова Э.В. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в прямоугольной области // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 1. С. 68–78.

[17] Хайруллин Р.С. К задаче Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода с сильным вырождением // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 528–534.

[18] Сафина Р.М. Критерий единственности решения задачи Дирихле с осевой симметрией для трехмерного уравнения смешанного типа с оператором Бесселя // Изв. вузов. Сер.: Математика. 2014. № 6. С. 78–83.

[19] Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Мир, 1986. 381 с.

References

[1] Pulkin S.P. Uniqueness of solution of a singular problem of Gellerstedt. *Izvestiia vuzov. Matematika* [*News of Higher Educational Institutions. Mathematics*], 1960, no. 6, pp. 214–225 [in Russian].

[2] Frankl F.I. The selected works on gas dynamics. M., Nauka, 1973, 711 p. [in Russian].

[3] Bitsadze A.V. Incorrectness of the Dirichlet problem for the equations of mixed type. *DAN SSSR* [*DAN of USSR*], 1953, Vol. 122, no. 2, pp. 167–170 [in Russian].

[4] Shabat B.V. The examples of solutions of the Dirichlet problem for mixed-type equation. *DAN SSSR* [*DAN of USSR*], 1957, Vol. 112, no. 3, pp. 386–389 [in Russian].

[5] Vakhaniya N.N. On one singular problem for the equation of mixed type. *Tr. AN GRUZSSR* [*Proceedings of AS of the Georgian Soviet Socialist Republic*], 1963, Vol. 3, pp. 69–80 [in Russian].

[6] Cannon J.R. Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontininius coefficient. *Ann. Math. pura ed appl.*, 1963, Vol. 62, pp. 371–377.

[7] Nakhushev A.M. Criterion of uniqueness of solution of Dirichlet problem for the equation of the mixed type in the cylindrical domain. *Differentsial'nye uravneniia* [*Differential equations*], 1970, Vol. 6, no. 1, pp. 190–191 [in Russian].

[8] Hachev M.M. Dirichlet problem for the Tricomi equation in a rectangle. *Differentsial'nye uravneniia* [*Differential equations*], 1975, Vol. 11, no. 1, p. 151–160 [in Russian].

[9] Hachev M.M. About the Dirichlet problem for an equation of a mixed type. *Differentsial'nye uravneniia* [*Differential equations*], 1976, Vol. 12, no. 1, pp. 137–143 [in Russian].

[10] Soldatov A.P. Dirichlet type problem for the equation of Lavrentiev — Bitsadze. I. The uniqueness theorems. *DAN SSSR* [*DAN of USSR*], 1993, Vol. 332, no. 6, pp. 696–698 [in Russian].

[11] Soldatov A.P. Dirichlet type problem for the equation of Lavrentiev — Bitsadze. II. The existence theorems. *DAN SSSR* [*DAN of USSR*], 1993, Vol. 333, no. 1, pp. 16–18 [in Russian].

[12] Hachev M.M. The first boundary value problem for the equations of the mixed type. Nalchik: Izd. Elbrus, 1998, 168 p. [in Russian].

[13] Sabitov K.B. The Dirichlet problem for mixed-type equation in a rectangular domain. *DAN SSSR* [*DAN of USSR*], 2007, Vol. 413, no. 1, pp. 23–26 [in Russian].

[14] Sabitov K.B., Suleimanova A.Kh. The Dirichlet problem for a mixed-type equation of the second kind in a rectangular domain. *Izvestiia vuzov. Matematika* [*News of Higher Educational Institutions. Mathematics*], 2007, no. 4, pp. 45–53 [in Russian].

[15] Sabitov K.B., Suleimanova A.Kh. The Dirichlet problem for a mixed-type equation with characteristic degeneration in a rectangular domain. *Izvestiia vuzov. Matematika* [*News of Higher Educational Institutions. Mathematics*], 2009, no. 11, pp. 43–52 [in Russian].

[16] Sabitov K.B., Vagapova E.V. Dirichlet problem for an equation of mixed type with two degeneration lines in a rectangular domain. *Differentsial'nye uravneniia* [*Differential equations*], 2013, Vol. 49, no. 1, pp. 68–78 [in Russian].

[17] Khairyllin R.S. On the Dirichlet problem for mixed-type equation of the second kind with strong degeneration. *Differentsial'nye uravneniia* [*Differential equations*], 2013, Vol. 49, no. 4, pp. 528–534 [in Russian].

[18] R.M. Safina. A criterion of uniqueness of solution to the Dirichlet problem with the axial symmetry for the three-dimensional mixed type equation with the Bessel operator. *Izvestiia vuzov. Matematika* [*News of Higher Educational Institutions. Mathematics*], 2014, no. 6, pp. 78–83 [in Russian].

[19] Olver F. Introduction to asymptotic methods and special functions. M., Izd-vo Mir, 1986, 381 p. [in Russian].

R.M. Safina[2]

DIRICHLET PROBLEM FOR PULKIN'S EQUATION IN A RECTANGULAR DOMAIN

In the given article for the mixed-type equation with a singular coefficient the first boundary value problem is studied. On the basis of property of completeness of the system of own functions of one-dimensional spectral problem the criterion of uniqueness is established. The solution the problem is constructed as the sum of series of Fourier — Bessel. At justification of convergence of a row there is a problem of small denominators. In connection with that the assessment about apartness of small denominator from zero with the corresponding asymptotic which allows to prove the convergence of the series constructed in a class of regular solutions under some restrictions is given.

Key words: equation of a mixed type, Dirichlet problem, spectral method, series of Fourier — Bessel, uniqueness, existence.

Статья поступила в редакцию 6/*VII*/2014.

The article received 6/*VII*/2014.

[2] *Safina Rimma Marselevna* (`rimma77705@mail.ru`), Department of Physical and Mathematical Disciplines and Information Technologies, Volga Region State Academy of Physical Culture, Sport and Tourism, Kazan, 420138, Russian Federation.