УДК 517.946

Н.С. Попов[1]

О РАЗРЕШИМОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В настоящей статье исследуются разрешимости пространственно нелокальных краевых задач для линейных одномерных псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений с постоянными коэффициентами, но с общими нелокальными краевыми условиями А.А. Самарского и интегральными условиями с переменными коэффициентами. Доказательства теорем существования и единственности регулярных решений проведены методом Фурье. Исследование разрешимости в классах регулярных решений приводит к изучению системы интегральных уравнений Вольтерры второго рода. В частных случаях даются условия невырожденности полученных систем интегральных уравнений в явном виде.

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, псевдогиперболическое уравнение, пространство Соболева, начально-краевая задача, метод Фурье, регулярное решение, интегральное уравнение Вольтерры.

Введение

Начало систематических исследований нелокальных краевых задач – задач нахождения периодических решений для эллиптических уравнений было положено в статье А.В. Бицадзе и А.А. Самарского [1].

Общие нелокальные краевые задачи с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений общего вида изучались в работе [2]. Отметим также работы [3; 4] для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами, где методом Фурье были исследованы задачи с общими нелокальными краевыми условиями А.А. Самарского с постоянными коэффициентами.

Нелокальным задачам с интегральными граничными условиями для гиперболических уравнений посвящены работы А.И. Кожанова и Л.С. Пулькиной [7; 8]. дифференциальных уравнений различных классов внесли монографии А.Л. Скубачевского [9] и А.М. Нахушева [10; 11].

Таким образом, нелокальные краевые задачи, в частности задачи с интегральными условиями, представляют собой новый класс задач для уравнений с частными производными. На этот класс не всегда напрямую переносятся методы, ис-

Попов Николай Сергеевич (popovnserg@mail.ru), кафедра математического анализа, Северо-Восточный федеральный университет, 677000, Российская Федерация, г. Якутск, ул. Белинского, 58.

пользованные ранее при исследовании локальных краевых задач. Актуальность исследований, связанных с построением теории нелокальных краевых задач, объясняется как потребностями математики, так и потребностями математического моделирования. Отметим также, что подобные задачи часто возникают при исследовании разрешимости линейных и нелинейных обратных коэффициентных задач для уравнений математической физики [12; 13].

В настоящей работе методом Фурье изучаются одномерные псевдопараболические и псевдогиперболические уравнения с постоянными коэффициентами, но с общими нелокальными краевыми условиями А.А. Самарского и интегральными условиями с переменными коэффициентами.

1. Псевдопараболическое уравнение

Пусть Ω есть интервал $(0,1)$ оси Ox, Q есть прямоугольник $\Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$. В области Q рассматривается уравнение

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1.1}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= \alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)u(1,t) + \int\limits_0^1 K_1(x)u(x,t)\,dx, \\ u_x(1,t) &= \beta_1(t)u(0,t) + \beta_2(t)u(1,t) + \int\limits_0^1 K_2(x)u(x,t)\,dx, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $f(x,t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$, $K_1(x)$, $K_2(x)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega} = [0,1]$, $t \in [0,T]$, α — постоянная.

Краевая задача 1. *Найти функцию $u(x,t)$ являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (1.1)*, и такую, что для нее выполняются нелокальные краевые условия* (1.2)*, а также начальные условия*

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{1.3}$$

При $k \geqslant 1$ введем обозначения

$$a_i = \frac{1}{2}\int_0^1 K_i(x)x^2\,dx, \quad b_i = \int_0^1 K_i(x)x\,dx, \quad c_i = \int_0^1 K_i(x)\,dx, \quad i = 1,2,$$

$$(1+\pi^2k^2)N_{1k}(t) = \sqrt{2}\alpha_1(t) + \sqrt{2}(-1)^k\alpha_2(t) + \sqrt{2}\int\limits_0^1 K_1(x)\cos(\pi kx)\,dx,$$

$$(1+\pi^2k^2)N_{2k}(t) = \sqrt{2}\beta_1(t) + \sqrt{2}(-1)^k\beta_2(t) + \sqrt{2}\int\limits_0^1 K_2(x)\cos(\pi kx)\,dx,$$

$$A_k = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2k^2}, \qquad B_k = (-1)^{k-1}A_k,$$

$$p_{11}(t) = b_1 - a_1 - \frac{8}{3}c_1 - \frac{13}{6}\alpha_2(t) - \frac{8}{3}\alpha_1(t) - 1 + \sum_{k=1}^{\infty} N_{1k}(t)A_k,$$

$$p_{12}(t) = a_1 + \frac{5}{3}c_1 + \frac{13}{6}\alpha_2(t) + \frac{5}{3}\alpha_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} N_{1k}(t)B_k,$$

$$p_{21}(t) = b_2 - a_2 - \frac{8}{3}c_2 - \frac{13}{6}\beta_2(t) - \frac{8}{3}\beta_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} N_{2k}(t)A_k,$$

$$p_{22}(t) = a_2 + \frac{5}{3}c_2 + \frac{13}{6}\beta_2(t) + \frac{5}{3}\beta_1(t) - 1 + \sum_{k=1}^{\infty} N_{2k}(t)B_k.$$

Введем матрицу

$$P_1(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Пусть V_0 есть пространство:

$$V_0 = \{v(x,t) : v(x,t), v_t(x,t), v_{xx}(x,t), v_{xxt}(x,t) \in L_2(Q),$$
$$v_x(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^1(0,1)\},$$

норму в этом пространстве определим следующим образом:

$$\|v\|_{V_0} = \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|v_{xxt}\|_{L_2(Q)} + \|v_x\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))}.$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$\begin{gathered} \alpha_i(t) \in C^1([0,T]), \quad \beta_i(t) \in C^1([0,T]), \quad i = 1,2\,; \\ K_p(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad p = 1,2; \\ \det|P_1(t)| \neq 0, \quad \forall t \in [0;T], \end{gathered} \tag{1.4}$$

$$f(x,t) \in L_2(Q). \tag{1.5}$$

Тогда существует единственная функция $u(x,t)$ из пространства V_0, являющаяся в прямоугольнике Q решением краевой задачи 1.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$u_{0t} - u_{0xxt} - \alpha u_{0xx} = f(x,t), \tag{1.6}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\begin{gathered} u_0(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \\ u_{0x}(0,t) = u_{0x}(1,t) = 0, \quad 0 < t < T. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Краевая задача (1.6), (1.7) при выполнении условий (1.5) разрешима в пространстве V_0 (см. [18; 19]).

Рассмотрим вспомогательную функцию $V(x,t) = \frac{1}{2}[\psi(t) - \varphi(t)]x^2 + \varphi(t)x$, удовлетворяющую краевым условиям $V_x(0,t) = \varphi(t)$, $V_x(1,t) = \psi(t)$ с неизвестными функциями $\varphi(t)$, $\psi(t)$.

Решение краевой задачи 1 будем искать в виде [2]

$$u(x,t) = u_0(x,t) + V(x,t) + w(x,t),$$

где функцию $w(x,t)$ будем подбирать таким образом, чтобы для $u(x,t)$ выполнялось исходное уравнение (1.1).

Имеем $w_t - w_{xxt} - \alpha w_{xx} = -V_t + V_{xxt} + \alpha V_{xx}$ или

$$\begin{aligned} & w_t - w_{xxt} - \alpha w_{xx} = \\ & = -\tfrac{1}{2}[\psi'(t) - \varphi'(t)]x^2 - \varphi'(t)x + \psi'(t) - \varphi'(t) + \alpha[\psi(t) - \varphi(t)] = \\ & = \varphi'(t)\left(\tfrac{x^2}{2} - x - 1\right) - \psi'(t)\left(\tfrac{x^2}{2} - 1\right) + \alpha[\psi(t) - \varphi(t)] \equiv g(x,t). \end{aligned}$$

Таким образом, рассматриваем уравнение

$$w_t - w_{xxt} - \alpha w_{xx} = g(x,t) \tag{1.8}$$

с однородными краевыми условиями

$$\begin{array}{l} w(x,0)=0, \quad x\in\Omega, \\ w_x(0,t)=w_x(1,t)=0. \end{array} \tag{1.9}$$

Решение краевой задачи (1.8), (1.9) ищем методом Фурье в виде следующего ряда:

$$w(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(t)\omega_k(x), \tag{1.10}$$

где $\omega_k(x)$ — решение спектральной задачи:

$$\omega_k''=\lambda_k\omega_k, \quad \omega_k'(0)=\omega_k'(1)=0. \tag{1.11}$$

Решение (1.11) имеет вид: $\omega_k(x)=\sqrt{2}\cos(\pi kx)$, $\lambda_k=-(\pi k)^2$.

Имеем

$$g(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k(t)\omega_k(x),$$

где

$$A_k=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-x-1\right)\omega_k(x)\,dx, \quad B_k=-\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-1\right)\omega_k(x)\,dx,$$

$$A_0=-\frac{4\sqrt{2}}{3}, \quad B_0=\frac{5\sqrt{2}}{6}, \quad C_0=\alpha\sqrt{2},$$

$$C_k=\alpha\int_0^1\omega_k(x)\,dx=0 \quad (k\geqslant 1),$$

$$g_0(t)=A_0\varphi'(t)+B_0\psi'(t)+C_0[\psi(t)-\varphi(t)],$$

$$g_k(t)=\int_0^1 g(x,t)\omega_k(x)\,dx=A_k\varphi'(t)+B_k\psi'(t) \quad (k\geqslant 1).$$

Тогда для определения коэффициентов $c_k(t)$ ряда (1.10) получим следующую краевую задачу:

$$\begin{array}{l} (1-\lambda_k)c_k'(t)-\alpha\lambda_k c_k(t)=g_k(t), \\ c_k(0)=0. \end{array} \tag{1.12}$$

Решение краевой задачи (1.12) можно найти явно

$$\begin{array}{l} c_k(t)=\frac{e^{p_k t}}{1-\lambda_k}\int_0^t e^{-p_k\tau}g_k(\tau)\,d\tau= \\ =\frac{1}{1-\lambda_k}\int_0^t e^{-p_k(\tau-t)}[A_k\varphi'(\tau)+B_k\psi'(\tau)]\,d\tau, \end{array} \tag{1.13}$$

где $p_k=\frac{\alpha\lambda_k}{1-\lambda_k}$.

Из равенства (1.13) при выполнении условий $\varphi(0)=\psi(0)=0$, интегрируя по частям, получим

$$c_k(t)=\frac{1}{1-\lambda_k}\int_0^t e^{-p_k(\tau-t)}(A_k\varphi'(\tau)+B_k\psi'(\tau))\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{1-\lambda_k}\left[A_k\varphi(t)+B_k\psi(t)+\int_0^t e^{-p_k(\tau-t)}(A_kp_k\varphi(\tau)+B_kp_k\psi(\tau))\,d\tau\right],$$

где

$$\frac{B_k}{1-\lambda_k}=\frac{(-1)^{k-1}A_k}{1-\lambda_k}=\frac{(-1)^{k-1}\sqrt{2}}{\pi^2k^2(1+\pi^2k^2)}, \quad B_kp_k=(-1)^{k-1}A_kp_k=\frac{(-1)^k\sqrt{2}\,\alpha}{1+\pi^2k^2}.$$

Отметим, что

$$\sqrt{2}c_0(t) = \sqrt{2}\int_0^t g_0(\tau)\,d\tau = -\frac{8}{3}\varphi(t) + \frac{5}{3}\psi(t) + 2\alpha\int\limits_0^t [\psi(\tau) - \varphi(\tau)]\,d\tau.$$

В силу сказанного выше, функция $u(x,t) = u_0(x,t) + V(x,t) + \omega(x,t)$ является решением краевой задачи

$$\begin{array}{l} u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \\ u_x(0,t) = \varphi(t), \quad u_x(1,t) = \psi(t), \quad t \in (0,T), \\ u(x,0) = 0 \quad x \in \Omega. \end{array} \tag{1.14}$$

Подставляя решение $u(x,t)$ в условия (1.2), получим систему интегральных уравнений Вольтерры относительно неизвестных функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$:

$$P_1(t)\vec{\phi}(t) + \int_0^t G(t,\tau)\vec{\phi}(\tau)\,d\tau = \vec{F}(t), \quad \vec{\phi}(t) = (\varphi(t), \psi(t)), \tag{1.15}$$

где матрицы $P_1(t)$, $G(t,\tau)$ и правая часть $\vec{F}(t)$ находятся из следующих равенств:

$$\begin{array}{l} \varphi(t) = \alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)u(1,t) + \int\limits_0^1 K_1(x)u(x,t)\,dx = \\ = \alpha_1(t)[u_0(0,t) + \sqrt{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(t)] + \\ + \alpha_2(t)[u_0(1,t) + \frac{1}{2}(\psi(t) + \varphi(t)) + \sqrt{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k c_k(t)] + \\ + \int\limits_0^1 K_1(x)u_0(x,t)\,dx + \int\limits_0^1 K_1(x)\left[\frac{x^2}{2}(\psi(t) - \varphi(t)) + \varphi(t)x\right]dx + \\ + \int\limits_0^1 K_1(x)[\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(t)\omega_k(x)]\,dx, \\ \\ \psi(t) = \beta_1(t)u(0,t) + \beta_2(t)u(1,t) + \int\limits_0^1 K_2(x)u(x,t)\,dx = \\ = \beta_1(t)[u_0(0,t) + \sqrt{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(t)] + \\ + \beta_2(t)[u_0(1,t) + \frac{1}{2}(\psi(t) + \varphi(t)) + \sqrt{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k c_k(t)] + \\ + \int\limits_0^1 K_2(x)u_0(x,t)\,dx + \int\limits_0^1 K_2(x)\left[\frac{x^2}{2}(\psi(t) - \varphi(t)) + \varphi(t)x\right]dx + \\ + \int\limits_0^1 K_2(x)[\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(t)\omega_k(x)]\,dx. \end{array} \tag{1.16}$$

Введем обозначения

$$m_{11}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k A_k N_{1k}(t), \quad m_{12}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k B_k N_{1k}(t),$$

$$m_{21}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k A_k N_{2k}(t), \quad m_{22}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k B_k N_{2k}(t),$$

$$m_1(t) = 2\alpha(\alpha_2(t) + \alpha_1(t) + c_1), \quad m_2(t) = 2\alpha(\beta_2(t) + \beta_1(t) + c_2),$$

$$-F_1(t) = \alpha_1(t)u_0(0,t) + \alpha_2(t)u_0(1,t) + \int\limits_0^1 K_1(x)u_0(x,t)\,dx,$$

$$-F_2(t)=\beta_1(t)u_0(0,t)+\beta_2(t)u_0(1,t)+\int\limits_0^1 K_2(x)u_0(x,t)\,dx,$$

$$G(t,\tau)=\begin{pmatrix} m_{11}(t) & m_{12}(t)\\ m_{21}(t) & m_{22}(t)\end{pmatrix} e^{-p_k(\tau-t)}+\begin{pmatrix} -m_1(t) & m_1(t)\\ -m_2(t) & m_2(t)\end{pmatrix}=$$
$$=M(t)e^{-p_k(\tau-t)}+m(t),\quad \vec{F}(t)=(F_1(t),F_2(t)).$$

Отметим, что в силу явных формул для A_k, B_k очевидно, что ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} N_{ik}(t)A_k,\quad \sum_{k=0}^{\infty} N_{ik}(t)B_k,\quad \sum_{k=0}^{\infty} N_{ik}(t)A_kp_k,\quad \sum_{k=0}^{\infty} N_{ik}(t)B_kp_k,\quad i=1,2$$

являются сходящимися, причем абсолютно.

Систему (1.15) при условии (1.4) можно переписать в виде

$$\vec{\phi}(t)+P_1^{-1}(t)\int_0^t [M(t)e^{-p_k(\tau-t)}+m(t)]\vec{\phi}(\tau)\,d\tau=P_1^{-1}(t)\vec{F}(t), \tag{1.17}$$

где

$$P_1^{-1}(t)[M(t)e^{-p_k(\tau-t)}+m(t)]=\overline{M}(\tau,t)=\begin{pmatrix} \overline{m}_{11}(\tau,t) & \overline{m}_{12}(\tau,t)\\ \overline{m}_{21}(\tau,t) & \overline{m}_{22}(\tau,t)\end{pmatrix}.$$

Разрешимость системы (1.17) относительно неизвестных $\varphi(t)$, $\psi(t)$ следует из общей теории. В самом деле, в ядро системы (1.17) можно ввести параметр $\lambda\in[0,1]$

$$\overline{M}(\tau,t,\lambda)=\begin{pmatrix} \overline{m}_{11}(\tau,t) & \lambda\overline{m}_{12}(\tau,t)\\ \lambda\overline{m}_{21}(\tau,t) & \overline{m}_{22}(\tau,t)\end{pmatrix}.$$

Тогда при $\lambda=0$ система (1.17) распадается относительно неизвестных $\varphi(t)$, $\psi(t)$, разрешимость которых следует из общей теории [14]. Согласно очевидной оценке

$$\|\vec{\phi}(t)\|_{L_2}\leqslant C_2,$$

нетрудно показать регулярную разрешимость интегрального уравнения при $\lambda=1$. Теорема доказана.

Замечание 1. Аналогично можно исследовать пространственно нелокальные краевые задачи, рассмотренные в работах [15; 16].

Замечание 2. Рассмотрим случай, когда определитель матрицы $P_1(t)$ может обращаться в нуль в интервале $[0,T]$. Пусть

$$\alpha_1(t)=\alpha_2(t)=\beta_1(t)=\beta_2(t)=0\quad \forall t\in[0;T];\quad K_1(x)\equiv 0\quad \forall x\in[0;1].$$

Имеем следующее интегральное уравнение:

$$p\psi(t)+\int\limits_0^t m(t,\tau)\psi(\tau)\,d\tau=F_2(t), \tag{1.18}$$

где

$$p\equiv p_{22}=\int\limits_0^1 K_2(x)\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{1-\lambda_k}\omega_k(x)\right)dx-1,$$

$$m(t,\tau)\equiv m_2+m_{22}=2\alpha c_2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_kB_kn_k}{1-\lambda_k}e^{-p_k(\tau-t)},$$

$$n_k=\int\limits_0^1 K_2(x)w_k(x)\,dx,\quad F(t)=-\int\limits_0^1 K_2(x)u_0(x,t)\,dx.$$

Вычислим сумму тригонометрического ряда

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{1-\lambda_k}\omega_k(x) =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2(1+\pi^2k^2)}\cos(\pi kx) =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\cos(\pi kx) - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{1+\pi^2k^2}\cos(\pi kx).$$

Первый ряд найдем по формуле (12) [17, с. 726]

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\cos(\pi kx) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}x^2.$$

Второй ряд найдем по формуле (2) [17, с. 730]

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{1+\pi^2k^2}\cos(\pi kx) = 1 - \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} 1}.$$

Таким образом, получим

$$p + 1 = \int_0^1 K_2(x)\left[\frac{5}{6} + \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} 1}\right] dx,$$

откуда

$$p \neq 0 \Longleftrightarrow \int_0^1 K_2(x)\left[\frac{5}{6} + \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} 1}\right] dx \neq 1,$$

которое является условием невырожденности интегрального уравнения.

2. Псевдогиперболическое уравнение

В области Q рассматривается уравнение

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - u_{xxt} = f(x,t) \tag{2.1}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$u_x(0,t) = \int_0^1 K_1(x)u(x,t)\,dx, \quad u_x(1,t) = \int_0^1 K_2(x)u(x,t)\,dx, \tag{2.2}$$

где $f(x,t)$, $K_1(x)$, $K_2(x)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega} = [0,1]$, $t \in [0,T]$, α — постоянная.

Краевая задача 2. Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (2.1), и такую, что для нее выполняются нелокальные краевые условия (2.2), а также начальные условия

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{2.3}$$

Как и случае псевдопараболического уравнения, разрешимость краевой задачи 2 эквивалентно редуцируется к разрешимости системы интегральных уравнений Вольтерры относительно неизвестных функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$.

При $k \geqslant 1$ введем обозначения

$$a_i = \frac{1}{2}\int_0^1 K_i(x)x^2\,dx, \quad b_i = \int_0^1 K_i(x)x\,dx, \quad c_i = \int_0^1 K_i(x)\,dx, \quad i = 1, 2,$$

$$N_{1k} = \sqrt{2}\int\limits_0^1 K_1(x)\cos(\pi kx)\,dx, \quad N_{2k} = \sqrt{2}\int\limits_0^1 K_2(x)\cos(\pi kx)\,dx,$$

$$A_k = (-1)^{k-1}B_k = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 k^2},$$

$$p_{11}(t) = 1 + a_1 - b_1 + \frac{8}{3}c_1 - \sum_{k=1}^{\infty} N_{1k}A_k,$$

$$p_{12}(t) = -a_1 - \frac{5}{3}c_1 - \sum_{k=1}^{\infty} N_{1k}B_k,$$

$$p_{21}(t) = a_2 - b_2 + \frac{8}{3}c_2 - \sum_{k=1}^{\infty} N_{2k}A_k,$$

$$p_{22}(t) = 1 - a_2 - \frac{5}{3}c_2 - \sum_{k=1}^{\infty} N_{2k}B_k,$$

Пусть

$$P_2(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Определим пространства V_1:

$$V_1 = \{v(x,t) : \quad v(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega)),$$

$$v_t(x,t) \in L_2(0,T; W_2^2(\Omega)) \cap L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega)), \quad v_{tt}(x,t) \in L_2(Q)\},$$

нормы в этом пространствах определим так

$$\|v\|_{V_1} = \|v\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))} + \|v_{tt}\|_{L_2(Q)}.$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия

$$\begin{array}{c} K_p(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad p = 1, 2; \\ \det|P_2(t)| \neq 0, \quad \forall t \in [0; T], \end{array} \tag{2.4}$$

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad f(x,0) = f_t(x,0) = 0. \tag{2.5}$$

Тогда существует единственная функция $u(x,t)$ из пространства V_1, являющаяся в прямоугольнике Q решением краевой задачи 2.

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 1. Рассматривается вспомогательная краевая задача

$$\begin{array}{l} u_{0t} - u_{0xxt} - \alpha u_{0xx} = f(x,t), \\ u_0(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \\ u_{0x}(0,t) = u_{0x}(1,t) = 0, \quad 0 < t < T. \end{array} \tag{2.6}$$

Краевая задача (2.6) при выполнении условий теоремы 2 на входные данные регулярно разрешима в пространстве V_1 [18; 19]. Пусть, как и выше, $V(x,t) = \frac{1}{2}[\psi(t) - \varphi(t)]x^2 + \varphi(t)x$. Решение ищется в виде $u(x,t) = u_0(x,t) + V(x,t) + w(x,t)$, где функция $w(x,t)$ подбирается так, чтобы для $u(x,t)$ выполнялось исходное уравнение (2.1).

Имеем

$$w_{tt} - w_{xxt} - \alpha w_{xx} = -V_{tt} + V_{xxt} + \alpha V_{xx},$$

или

$$w_{tt} - w_{xxt} - \alpha w_{xx} = -\frac{1}{2}[\psi''(t) - \varphi''(t)]x^2 - \varphi''(t)x + \psi'(t) - \varphi'(t) +$$

$$+\alpha[\psi(t) - \varphi(t)] = \varphi''(t)\left(\frac{x^2}{2} - x\right) - \psi''(t)\frac{x^2}{2} + \psi'(t) + \alpha[\psi(t) - \varphi(t)] \equiv g(x,t).$$

Таким образом, для определения w получаем краевую задачу

$$\begin{aligned} &w_{tt} - w_{xxt} - \alpha w_{xx} = g(x,t), \\ &w(x,0) = w_t(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \\ &w_x(0,t) = w_x(1,t) = 0, \quad 0 < t < T. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Решение краевой задачи (2.7) ищется методом Фурье в виде ряда

$$w(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t)\omega_k(x), \tag{2.8}$$

где $\omega_k(x)$ — решение спектральной задачи $\omega_k'' = \lambda_k \omega_k$, $\omega_k'(0) = \omega_k'(1) = 0$. Отсюда $\omega_k(x) = \sqrt{2}\cos(\pi k x)$, $\lambda_k = -(\pi k)^2$ при $k = 1, 2, \ldots$.

$$g(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(t)\omega_k(x),$$

где

$$g_k(t) = \int_0^1 g(x,t)\omega_k(x)\,dx = A_k\varphi''(t) + B_k\psi''(t) + C_k[\varphi'(t) + \alpha(\psi(t) - \varphi(t))],$$

$$A_k = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\omega_k(x)\,dx, \quad B_k = -\int_0^1 \frac{x^2}{2}\omega_k(x)\,dx, \quad C_k = \int_0^1 \omega_k(x)\,dx = 0.$$

При этом $A_0 = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, $B_0 = -\frac{\sqrt{2}}{6}$, $C_0 = \sqrt{2}$.

Для определения коэффициентов $c_k(t)$ $(k = 1, 2\ldots)$ имеем

$$\begin{aligned} &c_k''(t) - \lambda_k c_k'(t) - \alpha\lambda_k c_k(t) = g_k(t), \\ &c_k(0) = c_k'(0) = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Решение краевой задачи (2.9) имеет вид

$$c_k(t) = e^{\gamma_2 t}\int_0^t e^{\gamma_1\tau}\frac{g_k(\tau)}{\triangle(\tau)}\,d\tau - e^{\gamma_1 t}\int_0^t e^{\gamma_2\tau}\frac{g_k(\tau)}{\triangle(\tau)}\,d\tau,$$

где γ_1, γ_2 — корни квадратного трехчлена $\gamma^2 - \lambda_k\gamma - \alpha\lambda_k = 0$, $\triangle(t) = (\gamma_2 - \gamma_1)e^{(\gamma_1+\gamma_2)t}$. При этом $\gamma_2 = \frac{1}{2}\lambda_k + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_k^2 + 4\alpha\lambda_k}$, $\gamma_1 = \frac{1}{2}\lambda_k - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_k^2 + 4\alpha\lambda_k}$ и $\gamma_2 + \gamma_1 = \lambda_k$, $\gamma_2 - \gamma_1 = \sqrt{\lambda_k^2 + 4\alpha\lambda_k}$, откуда

$$\triangle(t) = e^{\lambda_k t}\sqrt{\lambda_k^2 + 4\alpha\lambda_k}, \quad \alpha < 0.$$

Отсюда c_k имеет вид

$$c_k(t) = -\frac{2}{p_k}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\lambda_k(\tau - t)}\,\mathrm{sh}\left(\frac{p_k(\tau - t)}{2}\right)g_k(\tau)\,d\tau, \quad p_k = \sqrt{\lambda_k^2 + 4\alpha\lambda_k},$$

$$g_k(t) = A_k\varphi''(t) + B_k\psi''(t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 k^2}(\varphi''(t) + (-1)^{k-1}\psi''(t)) \quad (k \geqslant 1),$$

$$g_0(t) = A_0\varphi''(t) + B_0\psi''(t) + C_0[\varphi'(t) + \alpha(\psi(t) - \varphi(t))].$$

При $k = 0$ имеем $c_0''(t) = g_0(t)$, отсюда при выполнении условий $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ получим

$$c_0(t) = \int_0^t \int_0^\tau g_0(\xi)\, d\xi d\tau = A_0\varphi(t) + B_0\psi(t) +$$

$$+C_0 \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau + \alpha C_0 \int_0^t (t-\tau)(\psi(\tau) - \varphi(\tau))\, d\tau.$$

Функция $u(x,t) = u_0(x,t) + V(x,t) + \omega(x,t)$ будет решением уравнения (2.1) с краевыми условиями

$$\begin{array}{l} u_x(0,t) = \varphi(t), \quad u_x(1,t) = \psi(t), \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \quad x \in \Omega. \end{array} \tag{2.10}$$

где $f(x,t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega} = [0,1]$, $t \in [0,T]$.

Подставляя решение $u(x,t)$ в условия (2.2), как и выше, получим систему интегральных уравнений Вольтерры относительно неизвестных функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$:

$$P_2(t)\vec{\phi}(t) + \int_0^t G(t,\tau)\vec{\phi}(\tau)\, d\tau = \vec{F}, \quad \vec{\phi}(t) = (\varphi(t), \psi(t)), \tag{2.11}$$

где матрицы $P(t)$, $G(t,\tau)$ и вектор $\vec{F}$ находятся из следующих равенств:

$$\varphi(t) = \int\limits_0^1 K_1(x)u(x,t)\, dx = \int_0^1 K_1(x)u_0(x,t)\, dx +$$

$$+\int_0^1 K_1(x)\left[\frac{x^2}{2}(\psi(t) - \varphi(t)) + \varphi(t)x\right] dx + \int_0^1 K_1(x)[\sum_{k=0}^{\infty} c_k(t)\omega_k(x)]\, dx,$$

$$\psi(t) = \int\limits_0^1 K_2(x)u(x,t)\, dx = \int_0^1 K_2(x)u_0(x,t)\, dx +$$

$$+\int_0^1 K_2(x)\left[\frac{x^2}{2}(\psi(t) - \varphi(t)) + \varphi(t)x\right] dx + \int_0^1 K_2(x)[\sum_{k=0}^{\infty} c_k(t)\omega_k(x)]\, dx.$$

Интегрируя по частям, преобразуем выражение при $k = 1, 2, \ldots$

$$c_k(t) = -\frac{2}{p_k}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\lambda_k(\tau-t)} \operatorname{sh}\left(\frac{p_k(\tau-t)}{2}\right) g_k(\tau)\, d\tau =$$

$$= -\frac{2}{p_k}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\lambda_k(\tau-t)} \operatorname{sh}\left(\frac{p_k(\tau-t)}{2}\right)(A_k\varphi''(\tau) + B_k\psi''(\tau))\, d\tau =$$

$$= A_k\varphi(t) + B_k\psi(t) - \frac{1}{2p_k}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\lambda_k(\tau-t)}[(\lambda_k^2 + p_k^2)\operatorname{sh}(\frac{p_k}{2}(\tau-t)) -$$

$$-2\lambda_k p_k \operatorname{ch}(\frac{p_k}{2}(\tau-t))](A_k\varphi(\tau) + B_k\psi(\tau))\, d\tau.$$

Отсюда получим систему интегральных уравнений Вольтерры (2.11), где

$$G(t,\tau) \equiv M(\tau-t) = \begin{pmatrix} m_{11}(\tau-t) & m_{12}(\tau-t) \\ m_{21}(\tau-t) & m_{22}(\tau-t) \end{pmatrix},$$

$$m_{11}(\tau-t) = -2c_1[1+\alpha(\tau-t)] + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda_k(\tau-t)} m_k(\tau-t) A_k N_{1k},$$

$$m_{12}(\tau-t) = 2c_1\alpha(\tau-t)] + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda_k(\tau-t)} m_k(\tau-t) B_k N_{1k},$$

$$m_{21}(\tau-t) = -2c_2[1+\alpha(\tau-t)] + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda_k(\tau-t)} m_k(\tau-t) A_k N_{2k},$$

$$m_{22}(\tau-t) = 2c_2\alpha(\tau-t)] + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda_k(\tau-t)} m_k(\tau-t) B_k N_{2k},$$

$$m_k(\tau-t) = -\frac{1}{2p_k}[(\lambda_k^2+p_k^2)\operatorname{sh}(\frac{p_k}{2}(\tau-t)) - 2\lambda_k p_k \operatorname{ch}(\frac{p_k}{2}(\tau-t))],$$

$$F_1(t) = \int_0^1 K_1(x)u_0(x,t)\,dx, \quad F_2(t) = \int_0^1 K_2(x)u_0(x,t)\,dx.$$

Систему (2.11) перепишем в виде

$$P_2(t)\vec{\phi}(t) + \int_0^t M(\tau-t)\vec{\phi}(\tau)\,d\tau = \vec{F}(t), \tag{2.12}$$

где $\vec{F}(t) = (F_1(t), F_2(t))$.

В силу явных представлений A_k, B_k ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} N_{ik}A_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} N_{ik}B_k, \quad i=1,2$$

являются сходящимися, причем абсолютно.

Разрешимость интегральных уравнений Вольтерры (2.12) следует из общей теории при выполнении (2.4). В самом деле, тогда систему (2.12) можно переписать так:

$$\vec{\phi}(t) + \int_0^t P_2^{-1}(t)M(\tau-t)\vec{\phi}(\tau)\,d\tau = P_2^{-1}(t)\vec{F}(t), \tag{2.13}$$

где

$$P^{-1}(t)M(\tau-t) = \widetilde{M}(\tau,t) = \begin{pmatrix} \widetilde{m}_{11}(\tau,t) & \widetilde{m}_{12}(\tau,t) \\ \widetilde{m}_{21}(\tau,t) & \widetilde{m}_{22}(\tau,t) \end{pmatrix}.$$

В ядро интегрального уравнения (2.13) можно ввести параметр $\lambda \in [0,1]$

$$\widetilde{M}(\tau,t,\lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{m}_{11}(\tau,t) & \lambda\widetilde{m}_{12}(\tau,t) \\ \lambda\widetilde{m}_{21}(\tau,t) & \widetilde{m}_{22}(\tau,t) \end{pmatrix}.$$

Тогда при $\lambda = 0$ система (2.13) распадается относительно неизвестных $\varphi(t)$, $\psi(t)$, разрешимость которых следует из общей теории [14]. Согласно очевидной оценке

$$\|\vec{\phi}(t)\|_{L_2} \leqslant C_2,$$

как и выше, нетрудно показать регулярную разрешимость интегрального уравнения при $\lambda = 1$. Теорема доказана.

Замечание 3. Аналогично исследуются краевые задачи 2 с нелокальными краевыми условиями, рассмотренным в [16]. Более того, в случае многомерных краевых задач для псевдопараболических, псевдогиперболических уравнений с постоянными коэффициентами аналогичный подход метода Фурье также имеет смысл [20].

Замечание 4. Как в замечании 2, рассмотрим случай, когда $K_1(x) \equiv 0$ $\forall x \in [0;1]$. Имеем следующее интегральное уравнение:

$$p_{22}\psi(t) + \int\limits_0^t m_{22}(\tau - t)\psi(\tau)\,d\tau = F_2(t), \tag{2.14}$$

где

$$p_{22} = 1 - \int\limits_0^1 K_2(x)\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\cos(\pi k x)\right)dx =$$

$$= 1 - \frac{11}{6}\int\limits_0^1 K_2(x)\,dx.$$

Таким образом, получим

$$p_{22} \neq 0 \Longleftrightarrow \int\limits_0^1 K_2(x)\,dx \neq \frac{6}{11},$$

которое является условием невырожденности интегрального уравнения (2.14).

Литература

[1] Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях эллиптических задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.

[2] Кожанов А.И. Задачи с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений // Доклады Академии наук. 2014. Т. 457. № 2. С. 152–156.

[3] Lazetic N. On a classical solutions of mixed boundary problems for one-dimensional parabolic equation of second orde // Publ. de l'Institut Mathematique, Nouvelle Serie. 2000. V. 67(81). P. 53–75.

[4] Лажетич Н.Л. О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравннения. 2006. Т. 42. № 8. С. 1072–1077.

[5] Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 7. С. 887–892.

[6] Пулькина Л.С. Нелокальная задача с двумя интегральными условиями для гиперболического уравнения на плоскости // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: ИМ СО РАН. 2007. С. 232–236.

[7] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1116–1172.

[8] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений // Математический журнал. 2009. Т. 9. № 2(32). С. 78–92.

[9] Skubachevskii A.L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications // Operator Theory: Advances and Applications. Birkh*ä*user Verlag. Basel. 1997. V. 91.

[10] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.

[11] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012.

[12] Кожанов А.И. Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2004. Т. 76. Вып. 6. С. 840–853.

[13] Телешева Л.А. О разрешимости линейной обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20. Вып. 2. С. 186–196.

[14] Краснов М.Л. Интегральные уравнения. (Введение в теорию). М.: Физматлит, 1975.

[15] Кожанов А.И. О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. 2004. Вып. 30. С. 63–69.

[16] Кожанов А.И., Попов Н.С. О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10. Вып. 3. С. 63–75.

[17] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М: Наука, 1981.

[18] Якубов С.Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.

[19] Kozhanov A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems. Utrecht: VSP, 1999. 171 p.

[20] Попов Н.С. О разрешимости краевых задач для многомерных псевдопараболических уравнений с нелокальным граничным условием интегрального вида // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19. № 1. С. 82–95.

References

[1] Bitsadze A.V., Samarski A.A. About some of the simplest generalizations of elliptic tasks. *DAN SSSR*, 1969, Vol. 185, № 4, pp. 739–740 [in Russian].

[2] Kozhanov A.I. The problem with integral conditions for some classes of nonstationary equations. *Doklady Akademii Nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2014, Vol. 457, № 2, pp. 152–156 [in Russian].

[3] Lazeti N. On a classical solutions of mixed boundary problems for one-dimensional parabolic equation of second orde. *Publ. de l'Institut Mathematique, Nouvelle Serie*, 2000, Vol. 67(81), pp. 53–75.

[4] Lazetic N. On the classical solvability of the mixed problem for one-dimensional hyperbolic equations of the second order. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential equations], 2006, Vol. 42, № 8, pp. 1072–1077 [in Russian].

[5] Pulkina L.S. Nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equations. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential equations], 2004, Vol. 40, № 7, pp. 887–892 [in Russian].

[6] Pulkina L.S. Nonlocal problem with two integral conditions for hyperbolic equations in the plane. *Neklassicheskie uravneniia matematicheskoi fiziki* [Nonclassical equations of mathematical physics]. Novosibirsk, IM SO RAN, 2007, pp. 232–236 [in Russian].

[7] Kozhanov A.I., Pulkina L.S. On the solvability of boundary value problems with nonlocal boundary condition of integral type for multidimensional hyperbolic equations. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential equations], 2006, Vol. 42, № 9, pp. 1116–1172 [in Russian].

[8] Kozhanov A.I., Pulkina L.S. On the solvability of certain boundary value problems with offset for linear hyperbolic equations. *Matematicheskii zhurnal* [Mathematical journal]. Almaty, 2009, Vol.9, № 2(32), pp. 78–92 [in Russian].

[9] Skubachevskii A.L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997, Vol. 91.

[10] Nakhushev A.M. Tasks with offset for partial differential equations. M., Nauka, 2006, 287 p. [in Russian].

[11] Nakhushev A.M. Laden equations and their applications. M., Nauka, 2012 [in Russian].

[12] Kozhanov A.I. About one loaded nonlinear parabolic equation and associated inverse problem. *Mat. zametki* [Mathematical notes], 2004, Vol. 76, Issue 6, pp. 840–853 [in Russian].

[13] Telesheva L.A. On the solvability of a linear inverse problem for parabolic equations of high order. *Mat. zametki IaGU* [Mathematical notes of YaSU], 2013, Vol. 20, Issue 2, pp. 186–196 [in Russian].

[14] Krasnov M.L. Integral equations. (Introduction to the theory). M., Fizmatlit, 1975 [in Russian].

[15] Kozhanov A.I. About solvability of a regional problem with nonlocal boundary condition for linear parabolic equations. *Vestnik Samarskogo gos. tekhn. un-ta* [Vestnik of Samara State Technical University], 2004, Issue 30, pp.63–69 [in Russian].

[16] Kozhanov A.I., Popov N.S. On the solvability of some tasks with offset for pseudoparabolic equations. *Vestnik NGU. Seriia: Matematika, mekhanika, informatika* [Vestnik of NGU. Series: Mathematics, Mechanics, Informatics], 2010, Vol. 10, Issue 3, pp. 63–75 [in Russian].

[17] Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integrals and series. M., Nauka, 1981 [in Russian].

[18] Yakubov S.Ya. Linear differential–operator equations and their applications. Baku, Elm, 1985 [in Russian].

[18] Kozhanov A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems. Utrecht, VSP, 1999, 171 p.

[20] Popov N.S. On solvability of boundary value problems for multidimensional pseudoparabolic equations with nonlocal boundary condition of an integral type. *Mat. zametki IaGU* [Mathematical notes of YaSU], 2012, Vol.19, № 1, pp. 82–95 [in Russian].

N.S. Popov[2]

ON THE SOLVABILITY OF SPATIAL NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ONE-DIMENSIONAL PSEUDOPARABOLIC AND PSEUDOHYPERBOLIC EQUATIONS

In the present work we study the solvability of spatial nonlocal boundary value problems for linear one-dimensional pseudoparabolic and pseudohyperbolic equations with constant coefficients, but with general nonlocal boundary conditions by A.A. Samarsky and integral conditions with variables coefficients. The proof of the theorems of existence and uniqueness of regular solutions is carried out by the method of Fourier. The study of solvability in the classes of regular solutions leads to the study of a system of integral equations of Volterra of the second kind. In particular cases nongeneracy conditions of the obtained systems of integral equations in explicit form are given.

Key words: pseudoparabolic equation, pseudohyperbolic equation, Sobolev space, initial-boundary value problem, Fourier's method, regular solution, integral equation of Volterra.

Статья поступила в редакцию $28/I/2015$.

The article received $28/I/2015$.

[2] *Popov Nikolay Sergeevich* (popovnserg@mail.ru), Department of Mathematical Analysis, North-Eastern Federal University named after I.E. Ammosov, 58, Belinsky Street, Yakutsk, 677000, Russian Federation.