

Н.И. Клюев, О.П. Филатов<sup>1</sup>

## МОДЕЛИ ИЗМЕРЕНИЯ УРОВНЯ ЖИДКОСТИ В БАКЕ РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ

Исследуются модели измерения уровня вязкой несжимаемой жидкости в баке по уровню жидкости в измерительной трубке. Бак находится в гравитационном поле, и уровень жидкости в нем изменяется по некоторому закону. Базовая модель — первая краевая задача для нелинейного интегродифференциального уравнения параболического типа. Эмпирическая модель — задача Коши для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Численно установлено, что для линейного по времени убывания уровня жидкости в баке уровень жидкости в измерительной трубке колеблется относительно уровня в баке с затуханием амплитуды колебаний.

**Ключевые слова:** уровень жидкости, бак ракеты-носителя, нелинейное интегродифференциальное уравнение, параболический тип, первая краевая задача, обобщенное решение, глобальная разрешимость, обыкновенное дифференциальное уравнение, задача Коши.

### 1. Постановка задачи и базовая модель

Из бака в связанной с ним евклидовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$  забирается жидкость на уровне горизонтальной плоскости  $x_3 = 0$  по определенному закону,  $h(t)$  — высота столба жидкости в баке над горизонтальной плоскостью,  $t \in [0, T_0], T_0 > 0$ . Для контроля уровня жидкости в баке имеется вертикальная цилиндрическая трубка радиусом  $R > 0$  (ось  $Ox_3$  — ее ось симметрии, а начало координат  $O$  совпадает с нижним основанием трубки), которая сообщается с баком на уровне  $x_3 = 0$ , а ее верхний срез — с полостью бака, свободной от жидкости,  $l(t)$  — высота столба жидкости в трубке,  $l(0) = l_0 > 0$ . Вектор ускорения свободного падения параллелен оси  $Ox_3$  (направленной вертикально вниз), а его проекция на эту ось равна  $g = g(t)$ . В верхней полости бака давление газовой среды  $p_h(t)$  регулируется таким образом, чтобы на уровне  $x_3 = 0$  давление жидкости было постоянным и равным  $p_0 > 0$ . В результате выполняется равенство  $p_h(t) + \rho g(t)h(t) = p_0$ , где  $\rho$  — плотность жидкости, а на столб жидкости в трубке действует перепад давления  $p_0 - p_h(t) = \rho g(t)h(t)$ . Обозначим  $x = (x_1, x_2)$ ,

$$G = \{x : x_1^2 + x_2^2 < R^2\}, \quad G_T = G \times [0, T],$$

<sup>1</sup>© Клюев Н.И., Филатов О.П., 2015

Клюев Николай Ильич (nikolay\_klyuev@mail.ru), кафедра математического моделирования в механике, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Филатов Олег Павлович (filatov\_oleg@samaradom.ru), кафедра уравнений математической физики, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

$$\Gamma_T = \partial G \times [0, T], \quad D_T = \{(x, t) : x \in G, t = T\}.$$

Предполагается, что вектор скорости  $v = (v_1, v_2, v_3)$  несжимаемой жидкости в трубке удовлетворяет условиям  $v_1 = 0, v_2 = 0$ . Координату  $v_3$  обозначим через  $u = u(x, t)$ . Тогда уравнение Навье – Стокса с учетом уравнения неразрывности принимает вид [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = g(t) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3},$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости жидкости. Проекция градиента давления жидкости  $p$  на ось  $Ox_3$  равна

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\rho g(t) h(t)}{l(t; u)}.$$

Здесь высота  $l(t)$  столба жидкости в трубке обозначается символом

$$l(t; u) = l_0 - \frac{1}{S} \int_0^t \int_G u(x, \tau) dx d\tau \quad (1.1)$$

с указанием поля скоростей  $u = u(x, t)$ ,  $S = \pi R^2$ . Обозначим

$$f(t; u) = g(t) \left(1 - \frac{h(t)}{l(t; u)}\right)$$

и рассмотрим первую краевую задачу для интегродифференциального уравнения параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = f(t; u), \quad u|_{D_0} = \varphi, \quad u|_{\Gamma_T} = 0 \quad (1.2)$$

в цилиндре  $G_T, T \in (0, T_0]$ .

Так как нас интересует интегральная характеристика модели  $l(t; u)$ , то используем гильбертово пространство функций  $u \in W^{1,0}(G_T)$ , принадлежащих пространству  $L_2(G_T)$  вместе с обобщенными производными  $u_{x_1}$  и  $u_{x_2}$  по переменным  $x_1$  и  $x_2$ . Скалярное произведение и норма в этом пространстве определяются соотношениями

$$\langle u, v \rangle_1 = \int_{G_T} (uv + \sum_{j=1}^m u_{x_j} v_{x_j}) dx dt, \quad \|u\|_1 = \sqrt{\langle u, u \rangle_1}, \quad m = 2.$$

Пространство  $W^1(G_T)$  отличается от пространства  $W^{1,0}(G_T)$  тем, что ее элементы дополнительно имеют обобщенную производную по  $t$  из  $L_2(G_T)$ .

Подпространство пробных функций из  $W^1(G_T)$ , след которых на множествах  $D_T$  и  $\Gamma_T$  равен 0, обозначим через  $\Theta_0$ . Определение обобщенного решения задачи (1.1) следует схеме, принятой для линейных задач [2; 3]. Функция  $u \in W^{1,0}(G_T), u|_{\Gamma_T} = 0$  называется обобщенным решением задачи (1.2), если  $l(t; u) > 0 \quad \forall t \in [0, T]$ , и для любой пробной функции  $\eta \in \Theta_0$  выполняется равенство

$$- \int_{G_T} u \eta_t dx dt + \int_{G_T} \langle \nabla u, \nabla \eta \rangle dx dt = \int_G \varphi(x) \eta(x, 0) dx + \int_{G_T} f(t; u) \eta_t dx dt,$$

где

$$\langle \nabla u, \nabla \eta \rangle = \sum_{j=1}^m u_{x_j} \eta_{x_j}.$$

Задача (1.2) определяет **базовую модель** измерения уровня жидкости.

## 2. Эмпирическая модель

Из (1.1) следует соотношение

$$\dot{l} = \frac{dl}{dt} = -\frac{1}{S} \int_G u(x, t) dx. \quad (2.1)$$

Если уравнение (1.2) разделить на  $S$ , а затем проинтегрировать по множеству  $G$ , то с учетом (2.1), теоремы Остроградского и элементарных преобразований получим

$$\ddot{l} = -\frac{\nu}{S} \int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - g(t) \left(1 - \frac{h(t)}{l}\right), \quad (2.2)$$

где  $n$  — внешняя единичная нормаль к границе области  $G$ . Смысл первого слагаемого в правой части равенства (2.2) можно получить из следующих элементарных рассуждений. Заметим, что в принятой системе координат  $x_3(t) = -l(t)$ . Рассмотрим слой жидкости между сечениями измерительной трубки  $x_3 = x_3(t) = const$  и  $x_3 + \Delta x_3 = const$  и запишем для него второй закон Ньютона. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta x_3 \rho \pi R^2 \ddot{x}_3 &= \pi R^2 p(t, x_3) - \pi R^2 p(t, x_3 + \Delta x_3) + \\ &+ \rho \Delta x_3 \pi R^2 g(t) - \tau s(\dot{x}_3) 2\pi R \Delta x_3 + o(\Delta x_3), \end{aligned}$$

где  $\tau$  — коэффициент трения,  $s(\dot{z})$  — знак скорости,  $o(\Delta x_3)/\Delta x_3 \rightarrow 0$  при  $\Delta x_3 \rightarrow 0$ . Если уравнение Ньютона разделить на  $\rho \pi R^2 \Delta x_3$  и перейти к пределу при  $\Delta x_3 \rightarrow 0$ , то получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x}_3 = -s(\dot{x}_3) \frac{2\tau}{\rho R} + g(t) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3}.$$

Так как  $\ddot{x}_3 = -\ddot{l}$ ,  $\dot{x}_3 = -\dot{l}$ , то уравнение принимает вид

$$\ddot{l} = -\frac{2\tau s(\dot{l})}{\rho R} - g(t) \left(1 - \frac{h(t)}{l}\right). \quad (2.3)$$

Сравнивая уравнения (2.2) и (2.3), приходим к равенству

$$\frac{\nu}{S} \int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = s(\dot{l}) \frac{2\tau}{\rho R}.$$

Таким образом, первое слагаемое в правой части уравнения (2.2) вполне определяется коэффициентом трения

$$\tau = \frac{\rho \lambda}{8} (\dot{l})^2, \quad (2.4)$$

где  $\lambda$  — коэффициент сопротивления измерительной трубки. Формула (2.4) широко используется в инженерных расчетах, поэтому ее использование при построении эмпирической модели вполне оправдано [4]. Дифференциальное уравнение (2.3) с учетом формулы (2.4) принимает вид

$$\ddot{l} = -\frac{\lambda}{4R} |\dot{l}| \dot{l} - g(t) \left(1 - \frac{h(t)}{l}\right), \quad t \in [0, T] \quad (2.5)$$

и дополняется начальными условиями

$$l(0) = l_0, \quad \dot{l}(0) = 0. \quad (2.6)$$

**Эмпирическая модель** (2.5), (2.6) измерения уровня жидкости построена.

### 3. Решение базовой задачи

Отвлечемся от физического смысла функций  $g$  и  $h$  и будем предполагать, что они измеримы на отрезке  $[0, T_0]$  и ограничены:

$$|g(t)| \leq g_0, \quad |h(t)| \leq h_0, \quad t \in [0, T_0], \quad (3.1)$$

где  $g_0, h_0$  — положительные постоянные. Далее используются приближенные решения  $u_1, u_2, \dots$ , которые строятся по следующему правилу. Пусть  $u_1 = 0$ , если построено решение  $u_{n-1}$ , то функция  $v = u_n$  — обобщенное решение задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v = f(t), \quad v|_{D_0} = \varphi, \quad v|_{\Gamma_T} = 0 \quad (3.2)$$

в цилиндре  $G_T$ , где  $f(t) = f(t; u_{n-1})$ . Такое решение заведомо существует и единственно [3, теоремы 2, 3, гл. VI, п. 2]. Без доказательства приведем две теоремы для задачи (1.2).

**Теорема 3.1.** Пусть выполняются неравенства (3.1) и  $l_0 > 0$ . Тогда для любой начальной функции  $\varphi \in L_2(G)$  при достаточно малом  $T > 0$  существует число  $q \in (0, 1)$  и единственное обобщенное решение  $u$  задачи (1.2) в цилиндре  $G_T$  с оценкой погрешности

$$\|u - u_n\|_1 \leq \frac{q^{n-1}}{1-q} \|u_2\|_1, \quad n = 1, 2, \dots$$

**Теорема 3.2.** Пусть выполняется условие (3.1) и  $l_0 > 0$ . Тогда для любой начальной функции  $\varphi \in L_2(G)$  существует число  $T_e \in (0, T_0]$  такое, что для любого  $T \in (0, T_e)$  существует единственное обобщенное решение  $u \in W^0(G_T)$  задачи (1.2), а при любом  $T > T_e$  не существует решения в цилиндре  $G_T$ .

Заметим, что теорема 3.2 имеет глобальный характер — предположение о малости числа  $T$  не используется.

Далее предполагаем, что начальная функция  $\varphi$  в полярной системе координат  $r, \psi$  зависит только от  $r \in [0, R]$ . В этом случае обобщенное решение задачи (3.2) можно найти методом Фурье, используя разложение

$$v(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{W_k(t) V_k(x)}{\|V_k\|_2^2}. \quad (3.3)$$

Здесь

$$W_k(t) = \Phi_k e^{-\lambda_k t} + C_k \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} f(s) ds, \quad (3.4)$$

$$\Phi_k = \int_G \varphi(x) V_k(x) dx, \quad C_k = \int_G V_k(x) dx, \quad (3.5)$$

а собственная функция  $V_k$  оператора Лапласа, отвечающая собственному числу  $(s_k/R)^2$ , в полярной системе координат имеет вид

$$V_k = J_0\left(r \frac{s_k}{R}\right),$$

где  $J_0(s)$  — функция Бесселя первого рода порядка 0,  $s_1 < s_2 < \dots < s_k < \dots$  — ее положительные нули,  $\lambda_k = \nu s_k^2/R^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Обоснование метода Фурье для задачи (3.2) следует из более общей теории решения линейных смешанных задач, подробно изложенной в [3, гл. VI]. На основании свойств функций Бесселя [5–10] имеем

$$\|V_k\|_{L_2(G)}^2 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R r J_0^2\left(r \frac{s_k}{R}\right) dr = \pi R^2 J_1^2(s_k), \quad (3.6)$$

$$C_k = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R r J_0\left(r \frac{s_k}{R}\right) dr = \frac{2\pi R^2}{s_k} J_1(s_k), \quad (3.7)$$

где  $J_1(s)$  — функция Бесселя первого рода порядка 1. Так как ряд (3.3) сходится в  $L_2(G)$ , то корректно определен секундный расход жидкости

$$Q(t; v) = \int_G v(t, x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k W_k(t)}{\|V_k\|_2^2} = Q_1(t; \varphi) + Q_2(t; v), \quad (3.8)$$

где первое слагаемое

$$Q_1(t; \varphi) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi_k e^{-\lambda_k t}}{s_k J_1(s_k)} \quad (3.9)$$

в правой части (3.8), на основании равенств (3.4)–(3.7), зависит только от начальной функции  $\varphi$ , а второе —

$$Q_2(t; v) = 4\pi R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s_k^2} \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} f(s) ds \quad (3.10)$$

не зависит. Так как

$$\left| \frac{\Phi_k e^{-\lambda_k t}}{s_k J_1(s_k)} \right| \leq \left| \frac{\Phi_k}{s_k J_1(s_k)} \right|,$$

а числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\Phi_k}{s_k J_1(s_k)} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\Phi_k}{\|V_k\|_2} \right| \left| \frac{\|V_k\|_2}{s_k J_1(s_k)} \right|$$

сходится, то функция  $Q(t; v)$  непрерывно зависят от  $t \in [0, T]$ . Из (3.8)–(3.10) с учетом соотношений (3.6), (3.7) получим формулу для вычисления уровня жидкости в трубке

$$l(t; v) = l_0 - K_1(t; \varphi) - K_2(t; v) \quad (3.11)$$

для приближенного решения  $v = u_n$ , где функция

$$K_1(t; \varphi) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^t Q_1(\tau) d\tau = \frac{2}{\pi \nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi_k}{s_k^3 J_1(s_k)} (1 - e^{-\lambda_k t}) \quad (3.12)$$

определяет изменение уровня жидкости в трубке за счет начальной скорости жидкости  $\varphi$ , а функция

$$K_2(t; v) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^t Q_2(\tau) d\tau = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s_k^2} \int_0^t \int_0^\tau e^{-\lambda_k(\tau-s)} f(s) ds d\tau \quad (3.13)$$

— за счет поля скоростей  $u_n$ , вычисляемого по предыдущему приближению  $u_{n-1}$ .

## 4. Численный эксперимент

Эксперимент проводился на отрезке времени  $[0, T]$ ,  $T = 200$  для случая линейного изменения уровня жидкости в баке  $h(t) = l_0 - v_0 t$ . Параметры  $l_0 = h(0) = 8,25$ ,  $R = 0,039$ ,  $\nu = 9,75 \cdot 10^{-7}$ ,  $g = 13$ ,  $\varphi = 0$  приведены в СИ и приближены к реальной конструкции.

В базовой задаче сначала на отрезке  $[0, b]$ ,  $b = 5$  формировалась сетка с шагом  $h = 0,05$ . Затем по формулам (3.11)–(3.13) строилась последовательность функций  $l(t; u_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  с использованием начальных коэффициентов

$$\Phi_k = \Phi_k^{(1)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

отвечающих начальной скорости  $\varphi = 0$ . Вычисления прекращались, если в равномерной метрике две соседние функции  $l(t; u_{n-1})$  и  $l(t; u_n)$  на сетке отрезка  $[0, b]$  отличались не более чем на  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Тогда функция  $l(t; u_n)$  определяла искомый уровень жидкости в трубке на первом отрезке  $[0, b]$ . Затем, согласно формулам (3.3)–(3.5), вычислялись коэффициенты

$$\Phi_k^{(2)} = W_k^{(1)}(b), \quad k = 1, 2, \dots$$

для начала счета на следующем отрезке  $[b, 2b]$  и т. д. Такой выбор "квантовой"

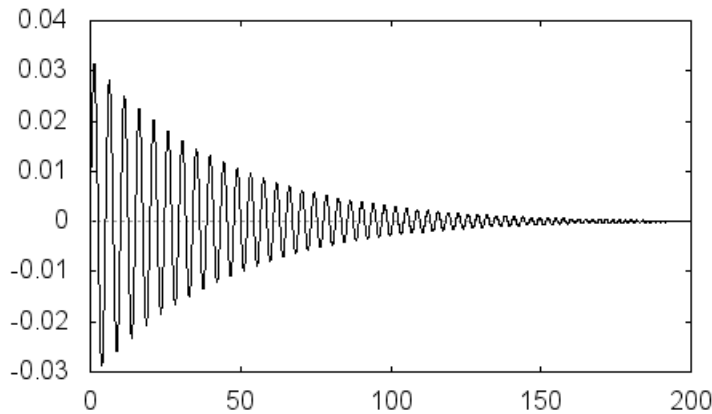


Рис. 1

длины  $b$  приводил практически к тем же результатам, что и выбор согласно требованиям теоремы 3.1. Более того, число  $b$  можно увеличить, так как итерационная последовательность сходилась и на больших отрезках, например, при  $b = 30$ .

Интегралы в правой части формулы (3.13) вычислялись следующим образом. Если правый конец отрезка вида  $[0, t]$  или  $[0, s]$  попадал на четный узел, то применялась формула Симпсона, если на нечетный узел, то на первом элементарном отрезке применялась формула трапеции, а для оставшегося отрезка — формула Симпсона. Ряды вида (3.12), (3.13) заменялись конечными суммами, которые содержали первые 100 членов ряда. Дальнейшее увеличение числа членов ряда практически не влияло на конечный результат. Программа реализована в свободно распространяемой системе аналитических вычислений wxMaxima-5.28.0., которая была установлена на компьютере с процессором AMD 3.4GHz.

На рис. 1 изображен график функции  $Z(t) = l(t) - h(t)$ . Время работы программы составило около 165 минут (точность приближений  $\varepsilon$  сильно влияет на время счета). Из рис. 1 видно, что с ростом времени амплитуда колебаний жидкости в трубке относительно уровня в баке  $h(t)$  уменьшается.

Для эмпирической модели коэффициент сопротивления измерительной трубки  $\lambda = 4,83 \cdot 10^{-2}$ . Задача Коши решалась методом Рунге — Кутты стандартного четвертого порядка точности с тем же шагом сетки  $h = 0,05$ , что и для базовой модели. На рис. 2 изображен график функции  $Z_e(t) = l_e(t) - h(t)$ , где  $l_e(t)$  — уровень жидкости в трубке, полученный в эмпирической модели. Время вычисления на четыре порядка меньше, чем в базовой модели — всего несколько секунд.

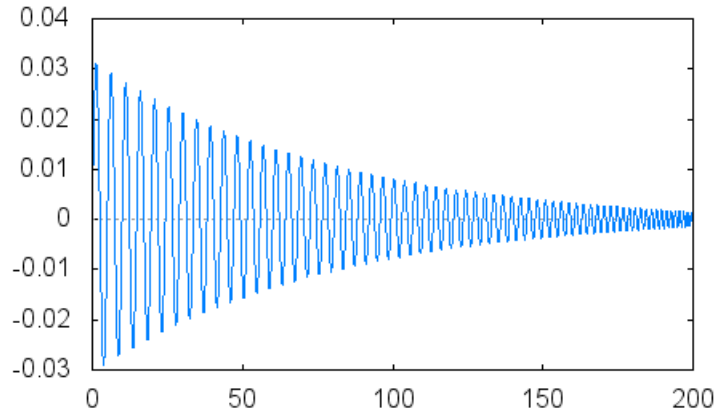


Рис. 2

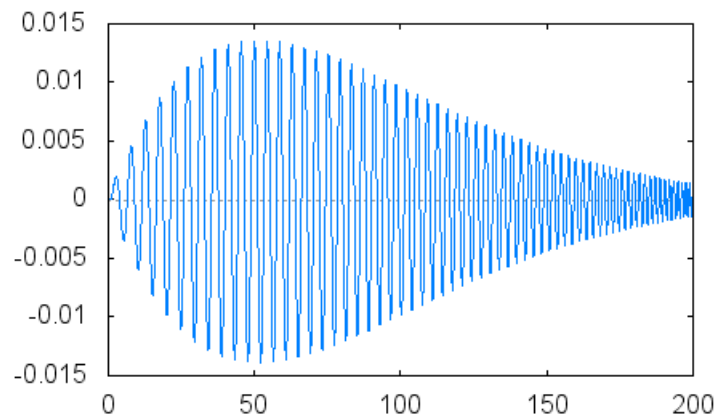


Рис. 3

На рис. 3 изображен график функции  $\delta(t) = l(t) - l_e(t)$ , который показывает, что модуль разности уровней жидкости в измерительной трубке для двух моделей не превосходит 14 мм, при этом максимальное отклонение

$$\max_{s \in [t, t+b]} \{|\delta(s)|\}, \quad t \in [0, T - b]$$

растет примерно до 50 с, а затем убывает с ростом времени  $t$ .

## Литература

- [1] Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005. 304 с.
- [2] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М: Наука, 1973. 408 с.

- [3] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М: Наука, 1976. 392 с.
- [4] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука. 848 с.
- [5] Уроев В.М. Уравнения математической физики. М.: ИФ "ЯУЗА", 1998. 373 с.
- [6] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М: Наука, 1981. 512 с.
- [7] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М: Наука, 1977. 736 с.
- [8] Русак В.Н. Математическая физика. М.: URSS, 2006. 248 с.
- [9] Арсенин В.Я. Математическая физика. М.: Наука, 1966. 367 с.
- [10] Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.

## References

- [1] Wallander S.V. Lectures on aerohydrodynamics. Izd-vo S.-Peterb. un-ta, 2005, 304 p. [in Russian].
- [2] Ladyzhenskaya O.A. Boundary-value problems of mathematical physics. M., Nauka, 1973, 408 p. [in Russian].
- [3] Mikhailov V.P. Partial differential equations. M., Nauka, 1976, 392 p. [in Russian].
- [4] Loitsiansky L.G. Fluid mechanics. M., Nauka, 1973, 848 p. [in Russian].
- [5] Uroev V.I. Equations of mathematical physics. M., IF "YaUZA", 1998, 373 p. [in Russian].
- [6] Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics. M., Nauka, 1981, 512 p. [in Russian].
- [7] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of mathematical physics. M., Nauka, 1977, 736 p. [in Russian].
- [8] Rusak V.N. Mathematical Physics. M., URSS, 2006, 248 p. [in Russian].
- [9] Arsenin V.Ya. Mathematical Physics. M., Nauka, 1966, 367 p. [in Russian].
- [10] Nikiforov A.F., Uvarov V.B. Special functions of mathematical physics. M., Nauka, 1984, 344 p. [in Russian].



*N.I. Klyuev, O.P. Filatov*<sup>2</sup>**MODELS FOR MEASURING THE LIQUID LEVEL  
IN THE TANK OF ROCKET CARRIER**

The models for measuring the level of a viscous incompressible fluid in the tank by liquid level in the measuring tube are considered. The tank is in the gravitational field and the level of liquid inside varies according to some law. The base model is the first boundary value problem for nonlinear integro-differential equation of parabolic type. The empirical model is Cauchy problem for nonlinear ordinary second order differential equation. It is numerically founded that for linear time-decreasing level of fluid tank fluid level in the measuring tube oscillates about level in the tank with damping amplitude.

**Key words:** fluid level tank, rocket carrier, nonlinear integro-differential equation, parabolic type, first boundary value problem, generalized solution, global solvability, ordinary differential equation, Cauchy problem.

Статья поступила в редакцию 18/II/2015.

The article received 18/II/2015.

---

<sup>2</sup>*Klyuev Nikolay Ilyich* ([nikolay\\_klyuev@mail.ru](mailto:nikolay_klyuev@mail.ru)), Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara State University, 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.  
*Filatov Oleg Pavlovich* ([filatov\\_oleg@samaradom.ru](mailto:filatov_oleg@samaradom.ru)), Department of Equations of Mathematical Physics, Samara State University, 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.