МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

И.В. Асташова[1]

О КОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА – ФАУЛЕРА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА[2]

Исследуется существование и поведение колеблющихся решений нелинейных уравнений с регулярной и сингулярной степенной нелинейностью. В частности, доказывается существование колеблющихся решений уравнения

$$y^{(n)} + P(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})|y|^k \ \operatorname{sign} y = 0,$$

$$n \geqslant 2,\ \ k \in \mathbb{R},\ \ k > 1,\ \ P \neq 0,\ \ \ P \in C(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Приводится критерий колеблемости всех решений квазилинейного уравнения четного порядка

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_j(x)\, y^{(i)} + p(x)\ |y|^k \ \operatorname{sign} y = 0,$$

$$p \in C(\mathbb{R}),\ a_j \in C(\mathbb{R}),\ \ j = 0, \dots, n-1,\ \ k > 1,\ n = 2m,\ m \in \mathbb{N},$$

обобщающий известные критерии Аткинсона и Кигурадзе.

Доказывается существование квазипериодических колеблющихся решений уравнения

$$y^{(n)} + p_0\,|y|^k \ \operatorname{sign} y = 0,\ n > 2,\ k \in \mathbb{R},\ k > 0,\ k \neq 1,\ p_0 \in \mathbb{R},$$

в случае регулярной ($k > 1$) и сингулярной ($0 < k < 1$) нелинейности при $(-1)^n p_0 > 0$.

Приводится результат о существовании периодических решений этого уравнения при $n = 4,\ k > 0,\ k \neq 1,\ p_0 < 0$.

Ключевые слова: квазилинейное дифференциальное уравнение, степенная нелинейность, колеблемость решений, критерий колеблемости, периодические решения, квазипериодические решения.

Асташова Ирина Викторовна (ast@diffiety.ac.ru), кафедра дифференциальных уравнений, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1.
[2]Статья подготовлена по докладу конференции "СамДиф-2015".

1. Краткие предварительные сведения

Рассматриваются дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + P(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})|y|^k \ \operatorname{sign} y = 0, \tag{1.1}$$

$$n \geqslant 2,\ \ k \in \mathbb{R},\ \ k > 0,\ \ k \neq 1,\ \ P \neq 0,\ \ \ P \in C(\mathbb{R}^{n+1}),$$

и его частные случаи

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_j(x)\, y^{(i)} + p(x)\ |y|^k \ \operatorname{sign} y = 0, \tag{1.2}$$

$$p \in C(\mathbb{R}),\ a_j \in C(\mathbb{R}),\ \ j = 0, \ldots, n-1,\ \ k > 1,$$

и

$$y^{(n)} + p_0\, |y|^k \ \operatorname{sign} y = 0,\ n > 2,\ k \in \mathbb{R},\ k > 0,\ \ k \neq 1,\ p_0 \in \mathbb{R},\ \ p_0 \neq 0. \tag{1.3}$$

Определение 1.1. Решение $y(x)$ дифференциального уравнения, определенное на интервале (x_0, ∞), называется *колеблющимся на бесконечности*, если для любого $x_1 > x_0$ существуют такие $x_2^+ > x_1$, и $x_2^- > x_1$, что $y(x_2^+) > 0$, и $y(x_2^-) < 0$.

Определение 1.2. Решение дифференциального уравнения, определенное в некоторой полуокрестности U точки $x_0 \in \mathbb{R}$, называется *колеблющимся в окрестности точки* x_0, если сколь угодно близко к x_0 существуют такие $x_2^+ \in U$ и $x_2^- \in U$, что $y(x_2^+) > 0$, и $y(x_2^-) < 0$.

В работах В.А. Кондратьева [1–6] исследуются свойства колеблемости линейных дифференциальных уравнений, в частности, доказывается критерий колеблемости всех решений линейного дифференциального уравнения второго порядка [1; 2], доказываются теоремы типа Штурма о расположении нулей колеблющихся решений линейных уравнений третьего, четвертого порядков [3; 5] и уравнений порядка $n > 4$ [4; 6]. В работе [7] сформулирован результат об отсутствии продолжаемых на всю числовую прямую колеблющихся решений уравнения $y^{(2m+1)} + |y|^{k-1} y = 0,\ k > 1,\ m \in \mathbf{N}$.

Исследование свойств колебющихся решений нелинейных дифференциальных уравнений типа Эмдена – Фаулера при $n = 3, 4$ продолжено в работах [9; 10; 14, гл. 6; 18]. В этих работах детально описано поведение колеблющихся решений. В работе [17] для любого интервала доказано существование решения с любым наперед заданным числом нулей. В работе [9] сформулировано, а в работах [10; 14, гл. 6], доказано существование периодического решения уравнения (1.3) четвертого порядка с регулярной нелинейностью и $p_0 < 0$.

В случае, когда $n > 4$, в работе [15] доказывается существование колеблющихся решений специального вида.

В работе [8] доказывается критерий колеблемости всех решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена – Фаулера второго порядка, обобщенный в работах [11–13] на случай уравнения произвольного порядка, содержащего младшие члены.

Многие результаты об асимптотическом поведении решений уравнения (1.1) и его модификаций подробно описаны в [11] и [14].

2. Существование колеблющихся решений уравнения (1.1)

Докажем для уравнения (1.1) существование колеблющихся на бесконечности решений.

Теорема 1. ([14], гл. 6.) *При $n > 2$, $k > 1$ уравнение (1.1), в котором непрерывная функция $P(x, y_0, \dots, y_{n-1})$ удовлетворяет условию*

$$0 < p_{\min} \leqslant -P(x,\, y_0,\, \dots, y_{n-1}) \leqslant p_{\max} < +\infty. \tag{2.1}$$

и условию Липшица по y_0, …, y_{n-1}, имеет колеблющиеся на бесконечности решения.

Доказательство. Доказательство теоремы базируется на следующих леммах, которые приведем без доказательства.

Лемма 1 [14, гл. 5]. Пусть функция $P(x,\, y_0,\, \dots, y_{n-1}) < 0$ является непрерывной и при всех x, $y_0, \dots, y_{n-1}$ удовлетворяет условию (2.1). Пусть $y(x)$ — решение уравнения (1.1), заданное на $[x_0,\, x^*)$, $x^* \leqslant \infty$, причем в случае $x^* < \infty$ оно предполагается не продолжаемым вправо. Тогда следующие условия равносильны:

(i) $x^* < \infty$ и $|y(x)| \to \infty$ при $x \to x^* - 0$;

(ii) существует такое $x_1 \in [x_0,\, x^*)$, что значения $y^{(j)}(x_1), j = 0, \dots, n-1$, либо все положительны, либо все отрицательны.

Лемма 2 [14, гл. 5]. *При выполнении условий леммы 1 все решения уравнения (1.1), знакопостоянные (неотрицательные или неположительные), начиная с некоторого момента, имеют вертикальную асимптоту либо стремятся к нулю вместе со всеми своими производными до порядка n. Второй случай (для нетривиальных решений) может иметь место только для четных n, при этом функции $y^{(j)}(x)$, $j = 1, \dots, n$, на всей области определения имеют тот же знак, что и $y(x)$, если j четно, и противоположный, если j нечетно.*

Доказательство теоремы 1.

Рассмотрим $Y \subset \mathbb{R}^n$ — множество данных Коши в точке x_0, для которых решение уравнения (1.1) имеет вертикальную асимптоту справа от x_0. Множество Y можно представить в виде объединения двух непересекающихся подмножеств Y_+ и Y_-, для которых соответствующие решения уравнения (1.1) стремятся к $+\infty$ и $-\infty$.

Докажем сначала, что множества Y_+ и Y_- открыты. Проведем доказательство для множества Y_+. Рассмотрим произвольную точку $a = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in Y_+$. Тогда решение $y(x)$ уравнения (1.1) с начальными данными

$$y(x_0) = a_0, \quad y'(x_0) = a_1, \quad \dots, \quad y^{n-1}(x_0) = a_{n-1}$$

имеет вертикальную асимптоту, и по лемме 1 существует такое $x_1 > x_0$, что числа $b_0 = y(x_1)$, …, $b_{n-1} = y^{(n-1)}(x_1)$ положительны. У точки $b = (b_0, \dots, b_{n-1})$ существует окрестность V, все точки которой также имеют положительные координаты. По теореме о непрерывной зависимости решения уравнения от начальных условий у точки $a \in Y_+$ существует такая окрестность U, что для любого решения $\tilde{y}(x)$ уравнения (1.1) из условия

$$\Big(\tilde{y}(x_0), \tilde{y}'(x_0), \dots, \tilde{y}^{(n-1)}(x_0)\Big) \in U$$

следует условие

$$\Big(\tilde{y}(x_1), \tilde{y}'(x_1), \dots, \tilde{y}^{(n-1)}(x_1)\Big) \in V$$

и, в частности,

$$\tilde{y}(x_1) > 0, \quad \tilde{y}'(x_1) > 0, \quad \ldots, \quad \tilde{y}^{(n-1)}(x_1) > 0.$$

Таким образом, в силу леммы 1, любая точка $a \in Y_+$ принадлежит множеству Y_+ вместе с некоторой окрестностью. Другими словами, множество Y_+ (и аналогично Y_-) открыто, что и требовалось доказать.

Рассмотрим множество $A \subset \mathbb{R}^n$, которое при четных n является дополнением к множеству

$$\{y_0 \geqslant 0, y_1 \leqslant 0, y_2 \geqslant 0, \ldots\} \cup \{y_0 \leqslant 0, y_1 \geqslant 0, y_2 \leqslant 0, \ldots\},$$

а при нечетных — к одноточечному множеству $\{0\}$.

В случае $n > 2$ получим связное множество. В силу леммы 2 среди рассматриваемых данных Коши нет таких, которые соответствуют решениям, стремящимся к нулю при $x \to \infty$. А так как Y_+, Y_- — открытые множества, то в множестве A существует точка, не принадлежащая ни Y_+, ни Y_-, и которая в качестве набора данных Коши порождает решение, не являющееся знакопостоянным (положительным или отрицательным). Другими словами, при любом $n > 2$ уравнение (1.1) имеет колеблющиеся на бесконечности решения. Теорема 1 доказана.

Замечание. Отметим, что в [11] существование колеблющихся решений доказано в более общем случае другим методом.

3. Критерий колеблемости всех решений уравнения (1.2)

Теорема 2 [13; 14, гл. 3]. *Пусть в уравнении (1.2) n четно, $p(x) > 0$, функции $a_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, удовлетворяют условиям*

$$\int_x^{\infty} x^{n-j-1}\, |a_j(x)|\, dx \, < \infty. \tag{3.1}$$

Тогда все решения уравнения (1.2) являются колеблющимися тогда и только тогда, когда

$$\int_x^{\infty} x^{n-1}\, p(x)\, dx \, = \infty. \tag{3.2}$$

Для доказательства этого критерия уравнение (1.2) сводится к уравнению с квазипроизводной методом факторизации линейного дифференциального оператора, причем доказывается, что все функции, являющиеся коэффициентами оператора квазипроизводной, могут быть выбраны стремящимися к единице на бесконечности. Затем обосновывается критерий колеблемости для полученного уравнения, на основании которого доказывается теорема 2.

4. Существование квазипериодических решений у уравнения (1.3) с регулярной и сингулярной нелинейностью

Приведем результаты о существовании квазипериодических колеблющихся решений уравнения (1.3). При этом будет использоваться обозначение $\alpha = \frac{n}{k-1}$.

Теорема 3. *Для любого целого $n > 2$ и любого действительного $k > 1$ существует такая знакопеременная периодическая функция h, что для любых $p_0 > 0$ и $x^* \in \mathbb{R}$ функция*

$$y(x) = p_0^{-\frac{1}{k-1}} (x^* - x)^{-\alpha} h(\ln(x^* - x)), \qquad -\infty < x < x^* \tag{4.1}$$

является решением уравнения (1.3).

Доказательство.

Для любого $q = (q_0, \ldots, q_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ пусть $y_q(x)$ — максимально продолженное решение уравнения

$$y^{(n)}(x) + |y(x)|^k = 0, \tag{4.2}$$

удовлетворяющее начальным условиям $y^{(j)}(0) = q_j$, где $j = 0, \ldots, n-1$.

Для $0 \leqslant j < n$ положим $B_j = \frac{nk}{n+j(k-1)} > 1$ и $\beta_j = \frac{1}{B_j}$.

Рассмотрим функцию $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определяемую формулой

$$N(q_0, \ldots, q_{n-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} |q_j|^{B_j}, \tag{4.3}$$

и отображение $\tilde{N} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, задаваемое формулой

$$\tilde{N}(q)_j = N(q)^{-\beta_j} q_j, \qquad j = 0, \ldots, n-1$$

и удовлетворяющее уравнению $N\left(\tilde{N}(q)\right) = 1$ для всех $q \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Далее, рассмотрим подмножество $Q \subset \mathbb{R}^n$, состоящее изо всех $q \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $q_0 = 0$,

2) $q_j \geqslant 0$ для всех $j \in \{1, \ldots, n-1\}$,

3) $N(q) = 1$.

Ограничение проекции $(q_0, \ldots, q_{n-1}) \mapsto (q_1, \ldots, q_{n-2})$ на множество Q является гомеоморфизмом Q на выпуклое компактное подмножество

$$\left\{ (q_1, \ldots, q_{n-2}) : \sum_{j=1}^{n-2} |q_j|^{B_j} \leqslant 1; q_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n-2 \right\} \subset \mathbb{R}^{n-2}.$$

Приведем без доказательства следующее утверждение.

Лемма 3. *Для любого $q \in Q$ существует такое $a_q > 0$, что $y_q(a_q) = 0$ и $y_q^{(j)}(a_q) < 0$ для всех $j \in \{1, \ldots, n-1\}$.*

Заметим, что a_q это не только первый положительный нуль функции $y_q(x)$, но единственный положительный нуль. Действительно, все $y_q^{(j)}(x)$, где $0 < j < n$, отрицательны в точке a_q, следовательно, в соответствии с уравнением (4.2), все $y_q^{(j)}(x)$ при $0 \leqslant j < n$ убывают и отрицательны для всех $x > a_q$ в области определения $y_q(x)$.

Чтобы продолжить доказательство теоремы 3, рассмотрим функцию $\xi : q \mapsto a_q$, переводящую каждое $q \in Q$ в первый положительный нуль функции y_q. Чтобы доказать ее непрерывность, мы применяем теорему о неявной функции. Функция $\xi(q)$ может рассматриваться как локальное решение $X(q)$ уравнения $S_0\left(q, X\right) = 0$, где

$$S : (q, x) \mapsto \left(S_0\left(q, x\right), S_1\left(q, x\right), \ldots, S_{n-1}\left(q, x\right)\right) =$$

$$= \left(y_q(x), y_q'(x), \ldots, y_q^{(n-1)}(x)\right)$$

— отображение класса C^1, определенное в области, содержащей $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. Необходимое условие для теоремы о неявной функции $\frac{\partial S_0}{\partial X}\left(q_0, \ldots, q_{n-1}, a_q\right) \neq 0$ выполнено, так как левая часть последнего неравенства равна $y_q'(a_q) < 0$. Кроме того, любая функция $X(q)$, неявно заданная в окрестности точки (q_0, a_{q_0}), должна быть положительна в некоторой ее окрестности. Следовательно, $X(q)$ не может быть равна неположительному нулю функции $y_q(x)$. Она не может быть также равна второму, третьему нулю функции $y_q(x)$, так как таких просто не существует. Следовательно, локально $X(q)$ должна быть равна $\xi(q)$, поэтому $\xi(q)$ непрерывна, как и $X(q)$.

Рассмотрим далее отображение $\tilde{S} : q \mapsto \tilde{N}\left(-S\left(q, \xi(q)\right)\right)$, переводящее Q в себя. Так как $\tilde{S}$ непрерывна и Q гомеоморфно выпуклому компактному подмножеству $\mathbb{R}^{n-2}$, можно применять теорему Брауэра о неподвижной точке. Таким образом, существует такое $\hat{q} \in Q$, что $\tilde{S}\left(\hat{q}\right) = \hat{q}$.

В соответствии с определением функций $\tilde{N}$, S, и ξ из этого следует, что существует неотрицательное решение $\hat{y}(x) = y_{\hat{q}}(x)$ уравнения (4.2), определенное на отрезке $[0; a_1]$, где $a_1 = a_{\hat{q}}$, положительное на открытом интервале $(0; a_1)$ и такое, что

$$\lambda^{-\beta_j}\, \hat{y}^{(j)}(a_1) = -\hat{y}^{(j)}(0), \qquad j = 0, \ldots, n-1, \tag{4.4}$$

где

$$\lambda = N\left(S\left(\hat{q}, \xi(\hat{q})\right)\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \left|\hat{y}^{(j)}(a_1)\right|^{B_j} > 0. \tag{4.5}$$

Так как функция $\hat{y}(x)$ неотрицательна, она также является решением уравнения

$$y^{(n)}(x) + |y(x)|^k\, \operatorname{sign} y(x) = 0. \tag{4.6}$$

Заметим, что для любого решения $y_1(x)$ уравнения (4.6) и любых констант $b > 0$ и c функция $y_2(x) = -b^\alpha y_1(bx + c)$ также является решением уравнения (4.6).

Таким образом, функция $z(x) = -b^\alpha \hat{y}(bx - a_1 b)$ является решением уравнения (4.6) и определена на отрезке $[a_1; a_2]$, где $a_2 = a_1 + \frac{a_1}{b}$.

Положим $b = \lambda^{\frac{k-1}{nk}}$, где λ определяется формулой (4.5). Тогда

$$b^{\alpha+j} = \lambda^{\frac{k-1}{nk}\cdot\left(\frac{n}{k-1}+j\right)} = \lambda^{\frac{n+(k-1)j}{nk}} = \lambda^{\beta_j}.$$

Следовательно, принимая во внимание (4.4), получим

$$z^{(j)}\left(a_1\right) = -\lambda^{\beta_j}\, \hat{y}^{(j)}\left(0\right) = \hat{y}^{(j)}\left(a_1\right).$$

Таким образом, функция $z(x)$ может использоваться как продолжение решения $\hat{y}(x)$ на $[0; a_2]$. Так как $z(x)$ удовлетворяет условиям аналогичным (4.4), а именно

$$\lambda^{-\beta_j}\, z^{(j)}(a_2) = -\lambda^{-\beta_j}\, b^{\alpha+j}\, \hat{y}^{(j)}\left(a_1\right) = -z^{(j)}(a_1),$$

процедура продолжения может быть повторена на $[0; a_3]$, $[0; a_4]$, и т.д., где $a_{s+1} = a_s + \frac{a_s - a_{s-1}}{b}$. Таким же образом решение $\hat{y}(x)$ может быть продолжено влево. Его сужение на соседние отрезки удовлетворяет следующему равенству:

$$\hat{y}(x) = -b^{\alpha} \ \hat{y}\left(b(x - a_s) + a_{s-1}\right), \tag{4.7}$$

где $x \in [a_s; a_{s+1}]$, и, следовательно, $b(x - a_s) + a_{s-1} \in [a_{s-1};\, a_s]$.

Теперь предстоит выяснить, больше или меньше единицы значение b.

Пусть $a_{j,s}$ — нуль производной $\hat{y}^{(j)}(x)$, принадлежащий интервалу $(a_{s-1};\, a_s)$. Отметим, что в соответствии с рассмотренными выше комбинациями изменений знаков получим

$$a_{j+1,s} < a_{j,s} < \ldots < a_{0,s} = a_s < a_{n-1,s+1} < a_{n-2,s+1} < \ldots .$$

Приведем без доказательства следующую лемму, использование которой позволит завершить доказательство теоремы.

Лемма 4. *Функция $y(x) = \hat{y}(x)$ удовлетворяет следующим неравенствам:*

$$|y(a_{1,s})| < |y(a_{n-1,s+1})|, \tag{4.8}$$

$$|y(a_{j+1,s})| < |y(a_{j,s})|, \qquad 0 < j < n-1. \tag{4.9}$$

Из этой леммы следует, что $|\hat{y}(a_{1,s})| < |\hat{y}(a_{1,s+1})| = b^{\alpha} |\hat{y}(a_{1,s})|$, откуда $b > 1$ и $a_s - a_{s-1} = b\,(a_{s+1} - a_s) > a_{s+1} - a_s$.

Теперь видно, что

$$\sum_{s=-\infty}^{0} (a_{s+1} - a_s) = a_1 \sum_{s=0}^{\infty} b^s = \infty$$

и

$$\sum_{s=0}^{\infty} (a_{s+1} - a_s) = a_1 \sum_{s=0}^{\infty} b^{-s} = a^* < \infty.$$

Таким образом, решение $\hat{y}(x)$ оказалось продолженным на полуограниченный интервал $(-\infty; a^*)$ и не может быть продолжено за его пределы, так как

$$\limsup_{x \to a^*} |\hat{y}(x)| = \lim_{s \to +\infty} |\hat{y}(a_{1,s})| = |\hat{y}(a_{1,0})| \lim_{s \to +\infty} b^{s\alpha} = +\infty.$$

Рассмотрим функцию

$$h(t) = e^{t\alpha} \hat{y}\left(a^* - e^t\right). \tag{4.10}$$

Она является периодической. Действительно, если $a_* - e^t \in [a_s;\, a_{s+1}]$ для некоторого $s \in \mathbb{Z}$, то

$$h(t + \ln b) = e^{t\alpha} b^{\alpha}\, \hat{y}\left(a^* - be^t\right)$$

и в соответствии с (4.7)

$$h(t) = e^{\alpha t}\, \hat{y}\left(a^* - e^t\right) = -e^{\alpha t} b^{\alpha} \ \hat{y}\left(ba^* - be^t - ba_s + a_{s-1}\right).$$

Выражение в последних скобках равно

$$b\,(a^* - a_s) - be^t + a_{s-1} = b \cdot \frac{a_{s+1} - a_s}{1 - b^{-1}} - be^t + a_{s-1} = \frac{a_s - a_{s-1}}{1 - b^{-1}} + a_{s-1} - be^t = a^* - be^t.$$

Таким образом, $h(t + \ln b) = -h(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и, следовательно, функция $h(t)$ периодическая с периодом $2\ln b$.

Теперь, в соответствии с (4.10), мы можем выразить решение $\hat{y}(x)$ уравнения (4.6) следующим образом: $\hat{y}(x) = (a^* - x)^{-\alpha} h\left(\ln\left(a^* - x\right)\right)$. Умножая его на $p_0^{-\frac{1}{k-1}}$, мы получим решение уравнения (4.2), имеющее требуемый вид. Оно также будет оставаться решеием уравнения (4.2) после замены a^* произвольным $x^* \in \mathbb{R}$.

Замена $x \mapsto -x$ дает следующие утверждения.

Следствие 1. *Для любого четного $n > 2$ и любого действительного $k > 1$ существует такая знакопеременная периодическая функция h, что для любых $p_0 > 0$ и $x^* \in \mathbb{R}$ функция*

$$y(x) = p_0^{-\frac{1}{k-1}}(x - x^*)^{-\alpha} h(\ln(x - x^*)), \quad x^* < x < \infty, \tag{4.11}$$

является решением уравнения (1.3).

Следствие 2. *Для любого нечетного $n > 2$ и любого действительного $k > 1$ существует такая знакопеременная периодическая функция h, что для любых $p_0 < 0$ и $x^* \in \mathbb{R}$ функция*

$$y(x) = |p_0|^{-\frac{1}{k-1}}(x - x^*)^{-\alpha} h(\ln(x - x^*)), \quad x^* < x < \infty, \tag{4.12}$$

является решением уравнения (1.3).

Аналогично теореме 3 доказывается следующая

Теорема 4. *Для любого целого $n > 2$ и любого положительного $k < 1$ существует такая знакопеременная периодическая функция h, что для любого p_0, удовлетворяющего неравенству $(-1)^n p_0 > 0$, и любого $x^* \in \mathbb{R}$ функция*

$$y(x) = \mid p_0 \mid^{-\frac{1}{k-1}} (x^* - x)^{\gamma} h(\ln(x^* - x)), \qquad -\infty < x < x^*,$$

является решением уравнения (1.3).

5. Периодические решения

При получении результатов об асимптотической классификации решений уравнения (1.3) в случае отрицательной регулярной и сингулярной нелинейностей оказалось, что верна следующая

Теорема 5. Уравнение (1.3) при $n = 4$, $p_0 < 0$, $k > 0$, $k \neq 1$ имеет периодические решения. При этом для любого T существует периодическое решение с периодом T, и для любого A существует периодическое решение с амплитудой A (но не для любой заданной пары T, A).

Замечание Асимптотическая классификация решений уравнения (1.3) при $n = 3$ и $n = 4$ с регулярной нелинейностью (k>1) и некоторые результаты об асимптотическом поведении решений с сингулярной нелинейностью (0<k<1) содержатся в [9; 10; 14, гл. 7; 18].

Нерешенные задачи

1. Является ли условие (3.1) неулучшаемым?

2. Существуют ли периодические решения уравнения (1.3) при четных $n > 4$, $p_0 < 0$, $k > 0$, $k \neq 1$?

3. Существуют ли отличные от квазипериодических знакопеременные решения уравнения (1.3) при $(-1)^n p_0 > 0$?

Литература

[1] Кондратьев В.А. Элементарный вывод необходимого и достаточного условия неколеблемости решений линейного дифференциального уравнения второго порядка // УМН. 1957. Т. 12. № 3. С. 159–160.

[2] Кондратьев В.А. Достаточные условия неколеблемости и колеблемости решений уравнения $y'' + p(x)y = 0$ // ДАН СССР. 1957. Т. 113. № 4. С. 742–745.

[3] Кондратьев В.А. О колеблемости решения линейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядка // ДАН СССР. 1958. Т. 118. № 1. С. 22–24.

[4] Кондратьев В.А. О нулях решений уравнения $y^n + p(x)y = 0$ // ДАН СССР. 1958. Т. 120. № 6. С. 1180–1182.

[5] Кондратьев В.А. О колеблемости решений линейных уравнений третьего и четвертого порядка // Труды ММО. 1959. Т. 8. С. 259–281.

[6] Кондратьев В.А. О колеблемости решений уравнения $y^n + p(x)y = 0$ // Труды ММО. 1961. Т. 10. С. 419–436.

[7] Кондратьев В.А., Самовол В.С. О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена — Фаулера // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 4. С. 749–750.

[8] Atkinson F. V. On second order nonlinear oscillations // Pacif. J. Math. 1955. V. 5. № 1. P. 643–647.

[9] Асташова И.В. Об асимптотическом поведении знакопеременных решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядка // Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ имени И.Н. Векуа ТГУ. 1988. Т. 3. № 3. С. 9–12.

[10] Асташова И.В. Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 8. С. 3–33.

[11] Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990. 432 с.

[12] Кигурадзе И.Т. Критерий колеблемости для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 2. С. 207–219.

[13] Astashova I. On Existence of Non-oscillatory Solutions to Quasi-linear Differential Equations // Georgian Mathematical Journal. 2007. V. 14. № 2. P. 223–238.

[14] Асташова И. В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / под ред. И.В. Асташовой. М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012. С. 22–28.

[15] Astashova I. On quasi-periodic solutions to a higher-order Emden-Fowler type differential equation // Boundary Value Problems. 2014. № 174. P. 1–8.

[16] Асташова И. В. Об асимптотическом поведении решений нелинейных дифференциальных уравнений с сингулярной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 11. С. 847–848.

[17] Асташова И.В., Рогачев В.В. О числе нулей осциллирующих решений уравнений третьего и четвертого порядков со степенной нелинейностью // Нелінійні коливання (the Ukrainian for "Nonlinear Oscillations"), 2014. Т. 17. № 1. С. 16–31.

[18] Astashova I.V. On asymptotic classification of solutions to nonlinear third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity (Об асимптотической классификации решений нелинейных уравнений третьего и четвертого порядков со степенной нелинейностью) // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер.: Естественные науки. 2015. № 2. С. 3–25.

References

[1] Kondratiev V. A. Elementary proof of a nesessary and sufficient condition for non-oscillation of solution to linear second-order differential equation. UMN, 1957, Vol. 12, № 3, pp. 159–160 [in Russian].

[2] Kondratiev V. A. Sufficient conditions for non-oscillation and oscillation of solution to equation $y''+p(x)y=0$. *DAN SSSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR], 1957, Vol. 113, № 4, pp. 742–745 [in Russian].

[3] Kondratiev V. A. On oscillation of solutions to linear third- and fourth-order differential equations. *DAN SSSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR], 1958, Vol. 118, № 1, pp. 22–24 [in Russian].

[4] Kondratiev V. A. On zeros of solutions of the equation $y^n + p(x)y = 0$. *DAN SSSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR], 1958, Vol. 120, № 6, pp. 1180–1182 [in Russian].

[5] Kondratiev V. A. On oscillation of solutions for third and fourth order linear differential equations. *Trudy MMO* [Works of MMO], 1959, Vol. 8, pp. 259–282 [in Russian].

[6] Kondratiev V. A. On oscillation of solutions for the equation $y^{(n)} + p(x)y = 0$. *Trudy MMO* [Works of MMO], 1961, Vol. 10, pp. 419-436 [in Russian].

[7] Kondratiev V. A., Samovol V. S. On some asymptotic properties of solutions for the Emden-Fowler type equations. *Differents. uravneniia* [Differential equations], 1981, Vol. 17, No. 4, pp. 749-750 [in Russian].

[8] Atkinson F. V. On second order nonlinear oscillations. *Pacif. J. Math.*, 1955, Vol. 5, № 1, pp. 643–647 [in English].

[9] Astashova I. V. On asymptotic behavior of oscillating solutions for some nonlinear differential equations of the third and fourth order. *Doklady rasshirennykh zasedanii seminara IPM imeni I.N. Vekua TGU* [Reports of the expanded sessions of the I. N. Vekua Institute of Applied Mathematics, Tbilisi State University]. Tbilisi, TGU, 1988, Vol. 3, № 3, pp. 9-12 [in Russian].

[10] Astashova I. V. Application of dynamical systems to the study of asymptotic properties of solutions to nonlinear higher-order differential equations. [Modern mathematics and its applications], 2003, Vol. 8, pp. 3-33 [in Russian].

[11] Kiguradze I. T., Chanturia T. A. Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations. M., Nauka, 1993 [in Russian].

[12] Kiguradze I. T. On the oscillation criteria for one class ordinary differential equations. *Differents. uravneniia* [Differential equations], 1992, Vol. 28, № 2, pp. 207–219 [in Russian].

[13] Astashova I. On Existence of Non-oscillatory Solutions to Quasi-linear Differential Equations. *Georgian Mathematical Journal*, 2007, Vol. 14, № 2, pp. 223–238 [in English]

[14] Astashova I. V. Qualitative properties of solutions to quasilinear ordinary differential equations in: Qualitative properties of solutions to differential equations and related topics of spectral analysis: scientific edition. I.V. Astashkina (Ed.) M., UNITY-DANA, 2012, pp. 22–290 [in Russian].

[15] Astashova I. On quasi-periodic solutions to a higher-order Emden-Fowler type differential equation. *Boundary Value Problems*, 2014, № 174, pp. 1–8 [in English].

[16] Astashova I.V. On the asymptotic behavior of solutions of differential equations with a singular nonlinearity. *Differents. uravneniia* [Differential equations], 2014, Vol. 50, № 11, pp. 847–848 [in Russian].

[17] Astashova I.V., Rogachev V.V. On the number of zeros of oscillating solutions of the third- and fourth-order equations with power nonlinearities. Нелінійні коливання (Ukrainian for "Nonlinear Oscillations"), 2014, Vol. 17, №. 1, pp. 16–31 [in Russian].

[18] Astashova I.V. On asymptotic classification of solutions to nonlinear third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity. *Vestnik MGTU im. N.E.Baumana. Ser. "Estestvennye nauki"* [Vestnik of Moscow State Technical University], 2015, №2, pp. 3–25 [in Russian].

I.V. Astashova[3]

ON OSCILLATION OF SOLUTIONS TO QUASI-LINEAR EMDEN – FOWLER TYPE HIGHER-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Existence and behavior of oscillatory solutions to nonlinear equations with regular and singular power nonlinearity are investigated. In particular, the existence of oscillatory solutions is proved for the equation

$$y^{(n)} + P(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})|y|^k \ \operatorname{sign} y = 0,$$

$$n \geqslant 2,\ \ k \in \mathbb{R},\ \ k > 1,\ \ P \neq 0,\ \ P \in C(\mathbb{R}^{n+1}).$$

A criterion is formulated for oscillation of all solutions to the quasilinear even-order differential equation

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_j(x)\ y^{(i)} + p(x)\ |y|^k \operatorname{sign} y = 0,$$

$$p \in C(\mathbb{R}),\ a_j \in C(\mathbb{R}),\ \ j = 0, \dots, n-1,\ \ k > 1,\ n = 2m,\ m \in \mathbb{N},$$

which generalizes the well-known Atkinson's and Kiguradze's criteria.

The existence of quasi-periodic solutions is proved both for regular $(k > 1)$ and singular $(0 < k < 1)$ nonlinear equations

$$y^{(n)} + p_0\,|y|^k \operatorname{sign} y = 0, \quad n > 2, \quad k \in \mathbb{R}, \quad k > 0,\ \ k \neq 1, \quad p_0 \in \mathbb{R},$$

with $(-1)^n p_0 > 0$. A result on the existence of periodic oscillatory solutions is formulated for this equation with $n = 4,\ k > 0,\ k \neq 1,\ p_0 < 0$.

Key words: quasilinear differential equation, power nonlinearity, oscillatory solution, oscillatory criterion, periodic solutions, quasi-periodic solutions.

Статья поступила в редакцию 18/ *VII*/2015.

The article received 18/ *VII*/2015.

[3] *Astashova Irina Viktorovna* (`ast@diffiety.ac.ru`), Department of Differential Equations, Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation.