УДК 511.334

Г.В. Воскресенская[1]

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ МОДУЛЯРНЫХ ФОРМ В ВИДЕ ОДНОРОДНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ[2]

В статье изучаются пространства модулярных форм, каждый элемент которых является однородным многочленом от модулярных форм малых весов того же уровня. Известен классический факт, что это справедливо для уровня 1. Н. Коблиц указывает, что это верно для параболических форм уровня 4. Показано, что аналогичная ситуация имеет место для большинства уровней, соответствующих эта-произведениям с мультипликативными коэффициентами. Во всех рассматриваемых случаях базисные функции являются эта-частными, которые в каждом случае указываются явно. Размерности пространств вычисляются по формуле Коэна — Остерле, порядки модулярных форм в параболических вершинах — по формуле Биаджиоли.

Ключевые слова: модулярные формы, параболические формы, эта-функция Дедекинда, параболические вершины, ряды Эйзенштейна, дивизор функции, структурные теоремы, формула Коэна — Остерле.

Введение

В статье описывается структура пространств модулярных форм для тех значений уровня, которые соответствуют функциям Маккея веса, большего 1 (кроме $N = 11$, в этом случае нельзя построить базис из эта-частных). Основные обозначения теории модулярных форм в статье являются классическими и могут быть найдены в [1–4].

Хорошо известен классический факт: пространство модулярных форм уровня 1 состоит из однородных многочленов $g(z)$ от рядов Эйзенштейна $E_4(z)$ и $E_6(z)$, если $g(z)$ — параболическая форма, то она делится на дельта-функцию $\Delta(z) = \eta^{24}(z) = \frac{E_4^3(z)-E_6^2(z)}{1728}$ [1]. В той же монографии Нил Коблиц отмечает, что аналогичная ситуация имеет место для $S_{2k}(\Gamma_0(4))$: любой элемент из этого пространства является однородным многочленом от форм $\eta^{-8}(z)\eta^{20}(2z)\eta^{-8}(4z)$ и $\eta^{-4}(2z)\eta^{8}(4z)$ и делится на $\eta^{12}(2z)$ [1, с. 181]. В теореме 7 мы обобщаем пример Коблица.

Функции $\eta^{24}(z)$, $\eta^{12}(2z)$ принадлежат к специальному классу модулярных форм, состоящих из эта-произведений с мультипликативными коэффициентами.

Воскресенская Галина Валентиновна (galvosk@mail.ru), кафедра алгебры и геометрии, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.
[2]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 12-01-00137.

Их называют мультипликативными эта-произведениями или по имени ученого, открывшего их в 1985 году: функциями Маккея. Этих функций 28 целого веса и две полуцелого веса. Их свойства и полный список можно посмотреть в статьях [5; 6].

Мы укажем явно модулярные формы малых весов, многочленами от которых являются элементы рассматриваемых пространств. Будем использовать при необходимости (в основном при оформлении таблиц) общепринятое [4] сокращение при работе с эта-функциями: вместо $\prod_{j=1}^{s} \eta^{t_j}(a_j z)$ будем писать $\prod_{j=1}^{s} a_j^{t_j}$. Например, вместо $\eta(z)\eta(3z)\eta(5z)\eta(15z)$ будем писать $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 15$. Восстановление функции по такой символьной записи, которая называется фрейм-шейп (Frame-shape), очевидно и недоразумений не вызывает. Теоремы 1–3 в статье цитируются, теоремы 4-7 являются новыми.

1. Техническая основа

В этом пункте для удобства чтения приведем формулировку теоремы Коэна — Остерле — основной на сегодняшний день формулы для вычисления размерностей [7]. Исследования входящих в формулу слагаемых приведены в [8]. Также приведем формулу для вычисления порядков в параболических вершинах [9] и теорему об эта-частных [5].

1.1. Теорема Коэна — Остерле

Пусть χ — характер Дирихле, $\chi(-1) = (-1)^k$, f — его кондуктор. Если $p|N$, то обозначим через r_p максимальную степень, в которой p делит N, через s_p — максимальную степень, в которой p делит f.

$$\lambda(r_p, s_p, p) = \begin{cases} p^{r'} + p^{r'-1}, & 2s_p \leqslant r_p = 2r', \\ 2p^{r'}, & 2s_p \leqslant r_p = 2r'+1, \\ 2p^{r_p - s_p}, & 2s_p \geqslant r_p \end{cases}$$

$$\nu_k = \begin{cases} 0, & k \equiv 1 \ (mod\ 2), \\ -\frac{1}{4}, & k \equiv 2 \ (mod\ 4), \\ \frac{1}{4}, & k \equiv 0 \ (mod\ 4) \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} 0, & k \equiv 1 \ (mod\ 3), \\ -\frac{1}{3}, & k \equiv 2 \ (mod\ 3), \\ \frac{1}{3}, & k \equiv 0 \ (mod\ 3). \end{cases}$$

Теорема 1. *Если k — целое, χ — характер Дирихле по модулю N, $\chi(-1) = (-1)^k$, то*

$$dim_{\mathbf{C}}(S_k(\Gamma_0(N), \chi)) - dim_{\mathbf{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N), \chi)) =$$
$$= \frac{(k-1)N}{12} \prod_{p|N} (1+p^{-1}) - \frac{1}{2} \cdot \prod_{p|N} \lambda(r_p, s_p, p) + \nu_k \cdot \sum_{x: x^2+1 \equiv 0 (N)} \chi(x) + \mu_k \cdot \sum_{x: x^2+x+1 \equiv 0 (N)} \chi(x).$$

Если $k > 2$, то $dim_{\mathbf{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N), \chi)) = 0$. Левая часть становится равна $dim_{\mathbf{C}}(S_k(\Gamma_0(N), \chi))$. Если $k \leqslant 0$, то $dim_{\mathbf{C}}(S_k(\Gamma_0(N), \chi)) = 0$. Левая часть становится равна $-dim_{\mathbf{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N), \chi))$.

1.2. Эта-частные

η-функция Дедекинда определяется формулой:

$$\eta(z) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \ \ q = e^{2\pi i z}, \ \ z \in H.$$

Замечательно, что $\eta(z)$ не имеет нулей на верхней полуплоскости.

Определение. η-частным называется функция вида:

$$f(z) = \prod_{j=1}^{s} \eta^{t_j}(a_j z), \quad a_j \in \mathbf{N}, \ \ t_j \in \mathbf{Z}.$$

Если $t_j \in \mathbf{N}$ $\forall j$, то $f(z)$ называется **η-произведением.** Линейная комбинация η-частных называется η-полиномом.

Теорема 2. Пусть $f(z)$ является η-частным, $k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s} t_j \in \mathbf{Z}$.
При этом
1)

$$\sum_{j=1}^{s} a_j t_j \equiv 0 (mod \ 24);$$

2)

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{N}{a_j} t_j \equiv 0 (mod \ 24),$$

тогда $f(z)$ удовлетворяет условию

$$f(z) = \left(\frac{az+b}{cz+b}\right) = \chi(d)(cz+d)^k f(z),$$

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \chi(d) = \left(\frac{(-1)^k \ b}{d}\right), \quad b = \prod_{j=1}^{s} a_j^{t_j}.$$

Формулу для характера следует понимать так: если d — четное, то так как $(d, N) = 1$, заменяем d на $d + N$. Если b – дробное, то оно заменяется на натуральное b_1, которое получается из b домножением на квадрат натурального числа. Сделав при необходимости все нужные замены, вычисляем значение характера по свойствам символа Якоби.

1.3. Порядок в параболических вершинах

Эта теорема была доказана А. Биаджиоли в 1995 году [6].

Теорема 3. Пусть m, n, $N-$натуральные числа, $n|N$, $(m, n) = 1$.
Если $f(z)$ удовлетворяет условию теоремы 2, то порядок нуля в параболической вершине $\frac{m}{n}$ равен

$$\frac{N}{24} \sum_{\delta | N} \frac{(n, \delta)^2 r_\delta}{(n, \frac{N}{n}) n \delta}.$$

2. Уровни функций Маккея веса 2

При проведении исследований, результаты которых излагаются в следующем пункте, была полезна таблица мультипликативных эта-частных, приведенная в статье Ива Мартина [10].

2.1. Формулировка теоремы.

Теорема 4. *Любая модулярная форма* $f(z) \in M_k(\Gamma_0(N),\ \chi^k)$ *является однородным многочленом от* $f_1(z), ..., f_s(z)$; *если* $f(z)$ — *параболическая форма, то она делится на мультипликативное эта-произведение веса 2* $g(z)$. *Значения* $N,\ \chi,\ f_1(z), ..., f_s(z),\ g(z)$ *приведены в табл. 1.*

Таблица 1

N	χ	$f_1(z), ..., f_s(z)$	$g(z)$
36	$\left(\frac{-3}{d}\right)$	$3^{-1}\cdot 9^3;\ 4^3\cdot 12^{-1};\ 6^{-1}\cdot 18^3;\ 12^{-1}\cdot 36^3;$ $6^{-2}\cdot 12\cdot 18^6\cdot 36^{-3};\ 1^{-2}\cdot 2\cdot 3^6\cdot 6^{-3}$	6^4
32	$\left(\frac{-1}{d}\right)$	$4^{-2}\cdot 8^4;\ 4^4\cdot 8^{-2};\ 2^4\cdot 4^{-2};\ 1^{-1}\cdot 2^{10}\cdot 4^{-4}$	$4^2\cdot 8^2$
27	$\left(\frac{-3}{d}\right)$	$3^3\cdot 9^{-1};\ 1^3\cdot 3^{-1};\ 3^{-1}\cdot 9^3$	$3^2\cdot 9^2$
24	$\left(\frac{-6}{d}\right)$	$1\cdot 3^{-1}\cdot 4\cdot 6\cdot 8^{-1}\cdot 24;\ 1^{-1}\cdot 2\cdot 3\cdot 8\cdot 12\cdot 24^{-1};\ 2^{-4}\cdot 4^8;$ $6^{-4}\cdot 12^8;\ 12^{-4}\cdot 24^8;\ 4^{-2}\cdot 8^4\cdot 12^{-2}\cdot 24^4;\ 4^{-4}\cdot 8^8$	$2\cdot 4\cdot 6\cdot 12$
20	$\left(\frac{-5}{d}\right)$	$1\cdot 2\cdot 4^{-1}\cdot 5^{-1}\cdot 10\cdot 20;\ 1^{-1}\cdot 2\cdot 4\cdot 5\cdot 10\cdot 20^{-1};\ 2^{-4}\cdot 4^8;$ $10^{-4}\cdot 20^8;\ 2^{-2}\cdot 4^4\cdot 10^{-2}\cdot 20^4$	$2^2\cdot 10^2$
15	$\left(\frac{-15}{d}\right)$	$1^2\cdot 3^{-1}\cdot 5^{-1}\cdot 15^2;\ 1^{-1}\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 15^{-1};\ 1^3\cdot 3^{-1}\cdot 5^3\cdot 15^{-1}$	$1\cdot 3\cdot 5\cdot 15$
14	$\left(\frac{-7}{d}\right)$	$1^2\cdot 2^{-1}\cdot 7^2\cdot 14^{-1};\ 1^{-1}\cdot 2^2\cdot 7^{-1}\cdot 14^2;\ 1^5\cdot 2^{-3}\cdot 7^{-3}\cdot 14^5$	$1\cdot 2\cdot 7\cdot 14$

Мы разберем доказательство двух случаев, в которых используются различные приемы. Остальные случаи разбираются аналогично.

2.2. N=32. Доказательство

Введем для следующих функций обозначения:

$f_1(z) = \eta^{-2}(4z)\eta^4(8z)$; $f_2(z) = \eta^4(4z)\eta^{-2}(8z)$; $f_3(z) = \eta^4(2z)\eta^{-2}(4z)$; $f_4(z) = \eta^{-2}(z)\eta^{10}(2z)\eta^{-4}(4z)$.

Все эти функции не имеют нулей на верхней полуплоскости.

Заметим, что произведение $f_1(z)f_2(z) = \eta^2(4z)\eta^2(8z)$ является мультипликативным эта-произведением.

Относительно группы $\Gamma_0(32)$ существует 8 классов параболических вершин. Их представители $\infty,\ 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{7}{8},\ \frac{1}{16}$. Вычислим порядки в параболических вершинах для рассматриваемых функций и составим таблицу. Степень дивизора у этих функций равна 4.

Обозначим через $h(z) = f_1(z) + f_2(z)$. Базис пространства $M_1(\Gamma_0(32), \chi)$ образуют функции $f_1(z),\ f_2(z),\ f_3(z),\ f_4(z)$. Действительно, поведение в параболической вершине $s = \frac{1}{2}$ показывает их линейную независимость (разложения в ряд Фурье в этой точке начинаются с разных степеней локальной переменной), а размерность пространства равна 4 по формуле Коэна — Остерле.

Пусть утверждение теоремы выполняется для всех весов, меньших k и $f(z) \in M_k(\Gamma_0(32), \chi^k)$. Если $ord_{\frac{1}{2}} f(z) \geqslant 4$, то $\frac{f(z)}{f_4(z)} \in M_k(\Gamma_0(32), \chi^{k-1})$ и применим предположение индукции (табл. 2).

Таблица 2

s	$4^{-2}\cdot 8^4$	$4^4\cdot 8^{-4}$	$2^4\cdot 4^{-2}$	$1^{-4}\cdot 2^{10}\cdot 4^{-4}$
∞	1	0	0	0
0	0	1	2	0
$\frac{1}{2}$	0	1	2	4
$\frac{1}{4}$	0	1	0	0
$\frac{3}{4}$	0	1	0	0
$\frac{1}{8}$	1	0	0	0
$\frac{7}{8}$	1	0	0	0
$\frac{1}{16}$	1	0	0	0

В противном случае рассмотрим функцию

$$G(z)=f(z)-c_1f_1(z)h^{k-1}(z)-c_2f_1(z)f_2(z)h^{k-2}(z)-c_3f_1(z)f_3(z)h^{k-2}(z)-c_4f_2(z)f_3(z)h^{k-2}(z).$$

Числа $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4$ можно подобрать так, что $ord_{\frac{1}{2}}G(z)\geqslant 4$. Тогда $\frac{G(z)}{f_4(z)}$ является по предположению индукции однородным многочленом от $f_1(z),\ f_2(z),\ f_3(z),\ f_4(z)$, и утверждение теоремы справедливо для $f(z)$.

Мультипликативное эта-произведение $\eta^2(4z)\eta^2(8z) = f_1(z)f_2(z)$ в каждой параболической вершине имеет порядок 1. Следовательно, любой элемент из $S_k(\Gamma_0(32),\chi^k)$ делится на эту параболическую форму.

2.3. N=15. Доказательство

Базис пространства $M_1(\Gamma_0(15),\chi)$ образуют функции
$f_1(z)=\eta^2(z)\eta^{-1}(3z)\eta^{-1}(5z)\eta^2(15z)$ и
$f_2(z)=\eta^{-1}(z)\eta^2(3z)\eta^2(5z)\eta^{-1}(15z)$.

Эти функции являются мультипликативными эта-частными ([10]). Мультипликативное эта-произведение $\eta(z)\eta(3z)\eta(5z)\eta(15z) = f_1(z)f_2(z)$. Далее рассмотрим $f_3(z)=\eta^3(z)\eta^{-1}(3z)\eta^3(5z)\eta^{-1}(15z)$ — модулярную форму веса 2 уровня 15 с тривиальным характером. Она является отношением двух мультипликативных эта-произведений $\eta^4(z)\eta^4(5z)$ и $\eta(z)\eta(3z)\eta(5z)\eta(15z)$.

Базис $M_2(\Gamma_0(15))=\{f_1(z)f_2(z),\ \ f_1^2(z),\ \ f_2^2(z),\ \ f_3(z)\}$.

$dim\ \ S_2(\Gamma_0(15))=1$, это пространство порождается $f_1(z)f_2(z)$.

Покажем, что функции $f_1(z)f_2^3(z),\ f_1^3(z)f_2(z),\ f_1^3(z),\ f_2^3(z),\ f_1(z)f_3(z),\ f_2(z)f_3(z)$ образуют базис пространства $M_3(\Gamma_0(15),\chi)$. Первые две функции образуют базис $S_3(\Gamma_0(15),\chi)$. Составим табл. 3 поведения оставшихся четырех функций в параболических вершинах.

Таблица 3

s	$f_1^3(z)$	$f_2^3(z)$	$f_1(z)f_3(z)$	$f_2(z)f_3(z)$
∞	3	0	1	0
0	3	0	3	2
$\frac{1}{5}$	0	3	2	3
$\frac{1}{3}$	0	3	0	1

Докажем линейную независимость этих функций. Пусть

$$c_1f_1^3(z)+c_2f_2^3(z)+c_3f_1(z)f_3(z)+c_4f_2(z)f_3(z)=0.$$

Из второй строки следует, что $c_2 = 0$; затем из третьей строки получаем $c_1 = 0$; из четвертой строки: $c_3 = 0$; из первой строки: $c_4 = 0$. Если бы такая линейная комбинация являлась бы ненулевой параболической формой, то рассуждаем аналогично. Получаем

$$M_3(\Gamma_0(15),\chi) \cong S_3(\Gamma_0(15),\chi) \oplus < f_1^3(z) > \oplus < f_2^3(z) > \oplus < f_1(z)f_3(z) > \oplus < f_2(z)f_3(z) > .$$

Далее рассмотрим функцию $h(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

В параболических вершинах порядки функций $h^{k-3}(z)f_1^3(z)$, $h^{k-3}f_2^3(z)$, $h^{k-3}f_1(z)f_3(z)$, $h^{k-3}f_2(z)f_3(z)$ совпадают с порядками функций $f_1^3(z)$, $f_2^3(z)$, $f_1(z)f_3(z)$, $f_2(z)f_3(z)$ соответственно. Следовательно, получим

$$M_k(\Gamma_0(15),\chi) \cong S_k(\Gamma_0(15),\chi) \oplus < h^{k-3}(z)f_1^3(z) > \oplus < h^{k-3}(z)f_2^3(z) > \oplus$$
$$< h^{k-3}(z)f_1(z)f_3(z) > \oplus < h^{k-3}(z)f_2(z)f_3(z) > .$$

В силу этого для любой функции $f(z)$ из $M_k(\Gamma_0(15),\chi^k)$ существует однородный многочлен $G(z)$ от f_1, f_2, f_3 такой, что $f(z) - G(z) \in S_k(\Gamma_0(15),\chi)$. Так как $f_1(z)f_2(z)$ в каждой параболической вершине имеет порядок 1, а на верхней полуплоскости она нулей не имеет, то $\frac{f(z)-G(z)}{f_1(z)f_2(z)} \in M_{k-2}(\Gamma_0(15),\chi^k)$, и можно применить индукцию.

3. Уровни функций Маккея веса 3

Теорема 5. *Любая модулярная форма $f(z) \in M_{3l}(\Gamma_0(N),\ \chi^l)$ является однородным многочленом от $f_1(z),...,f_s(z)$ степени l; если $f(z)$ — параболическая форма, то она делится на мультипликативное эта-произведение веса 3 $g(z)$. Значения N, χ, $f_1(z),...,f_s(z)$, $g(z)$ приведены в табл. 4.*

Таблица 4

N	χ	$f_1(z),...,f_s(z)$	$g(z)$
16	$\left(\frac{-1}{d}\right)$	$4^6;\ 1^{-4}\cdot 2^6\cdot 4^4;\ 1^4\cdot 2^6\cdot 4^{-4};\ 2^{-4}\cdot 4^6\cdot 8^4;\ 2^4\cdot 4^6\cdot 8^{-4}$ $4^{-4}\cdot 8^6\cdot 16^4;\ 4^4\cdot 8^6\cdot 16^{-4}$	4^6
12	$\left(\frac{-3}{d}\right)$	$1^{-3}\cdot 3^9;\ 2^{-3}\cdot 6^9;\ 4^{-3}\cdot 12^9;\ 1^9\cdot 3^{-3};\ 2^9\cdot 6^{-3};\ 4^9\cdot 12^{-3}; 2^3\cdot 6^3$	$2^3\cdot 6^3$
8	$\left(\frac{-2}{d}\right)$	$1^{-2}\cdot 4^{11}\cdot 2^{-1}\cdot 8^{-2};\ 8^{-2}\cdot 2^{11}\cdot 4^{-1}\cdot 1^{-2}$ $1^{-6}\cdot 2^{13}\cdot 4^{-3}\cdot 8^2;\ 8^{-6}\cdot 4^{13}\cdot 2^{-3}\cdot 1^2;\ 1^2\cdot 2\cdot 4\cdot 8^2$	$1^2\cdot 2\cdot 4\cdot 8^2$
7	$\left(\frac{-7}{d}\right)$	$1^3\cdot 7^3;\ 1^{-1}\cdot 7^7;\ 7^{-1}\cdot 1^7$	$1^3\cdot 7^3$

Доказательство.

Проведем подробное доказательство для $N = 7$. В остальных случаях доказательство проводится аналогично, но требует больших вычислений.

Обозначим функции: $f_1(z) = \eta^{-1}(z)\eta^7(7z)$; $f_2(z) = \eta^7(z)\eta^{-1}(7z)$, $g(z) = \eta^3(z)\eta^3(7z)$.

Размерность $dimM_{3l}(\Gamma_0(7),\chi^l) = dimS_{3l}(\Gamma_0(7),\chi^l) + 2$.

Параболических вершин две: 0 и ∞.

Порядки: $ord_\infty f_1^l = 2l$, $ord_0 f_1^l = 0$, $ord_\infty f_2^l = 0$, $ord_0 f_2^l = 2l$.

В силу этого нетривиальная линейная комбинация функций f_1^l и f_2^l не может быть ни нулевой функцией, ни параболической формой. Следовательно,

$$M_{3l}(\Gamma_0(7),\chi^l) \cong S_{3l}(\Gamma_0(7),\chi^l) \oplus < f_1^l > \oplus < f_2^l > .$$

$$M_3(\Gamma_0(7),\chi) \cong < g(z) > \oplus < f_1^l > \oplus < f_2^l > .$$

Так как порядок в каждой параболической вершине функции $g(z)$ равен 1, то

$$S_{3l}(\Gamma_0(7),\chi^l) \cong g(z) \cdot M_{3l-3}(\Gamma_0(7),\chi^{l-1}).$$

Можно применить предположение индукции.

Если $f(z)$ не является параболической, то можно подобрать числа c_1 и c_2 так, что $G(z) = f(z) - c_1 f_1(z) - c_2 f_2(z)$ является параболической формой.

Тогда $\frac{G(z)}{g(z)} \in M_{3l-3}(\Gamma_0(7),\chi^{l-1})$, и можно применить предположение индукции. Следовательно, утверждение теоремы верно и для $f(z)$.

4. Уровни функций Маккея веса 4

Для этих уровней удается описать пространства любого четного веса.

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теорем 4 и 5.

Теорема 6. *Любая модулярная форма $f(z) \in M_{2l}(\Gamma_0(N),\ \chi^l)$ является однородным многочленом от $f_1(z), ..., f_s(z)$ степени l; если $f(z)$ — параболическая форма, то она делится на мультипликативное эта-произведение веса 2 $g(z)$. Значения $N,\ \chi,\ f_1(z), ..., f_s(z),\ g(z)$ приведены в табл. 5.*

Таблица 5

N	χ	$f_1(z), ..., f_s(z)$	$g(z)$
9	1	$1^6 \cdot 3^{-2};\ 3^{-2} \cdot 9^6;\ 1^{-3} \cdot 3^{10} \cdot 9^{-3}$	$1^6 \cdot 3^6$
8	$\left(\frac{2}{d}\right)$	$1^{-2} \cdot 2^3 \cdot 4 \cdot 8^2;\ 1^2 \cdot 2 \cdot 4^3 \cdot 8^{-2};\ 2^{16} \cdot 4^{-8};\ 2^{-8} \cdot 4^{16}$	$2^4 \cdot 4^4$
6	1	$1^{-2} \cdot 2^4 \cdot 3^{-2} \cdot 6^4;\ 1^4 \cdot 2^{-2} \cdot 3^4 \cdot 6^{-2};\ 1^{-6} \cdot 2^{12} \cdot 3^2 \cdot 6^{-4}$	$1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 6^2$
5	$\left(\frac{5}{d}\right)$	$1^5 \cdot 5^{-1};\ 1^{-1} \cdot 5^5$	$1^4 \cdot 5^4$

При весе, меньшем 6, параболических форм нет.

5. Уровни 2, 3, 4

Теорема 7.

1) Любой элемент $f(z)$ из пространства $M_{4l}(\Gamma_0(2))$ является однородным многочленом от функций $\eta^{-8}(z)\eta^{16}(2z)$ и $\eta^{16}(z)\eta^{-8}(2z)$. Если $f(z)$ — параболическая форма, то $f(z)$ делится на $\eta^8(z)\eta^8(2z)$.

2) Любой элемент $f(z)$ из пространства $M_{3l}\left(\Gamma_0(3),\ \left(\frac{-3}{d}\right)^l\right)$ является однородным многочленом от функций $\eta^{-3}(z)\eta^9(3z)$ и $\eta^9(z)\eta^{-3}(3z)$. Если $f(z)$ — параболическая форма, то $f(z)$ делится на $\eta^6(z)\eta^6(3z)$.

3) Любой элемент $f(z)$ из пространства $M_l\left(\Gamma_0(4),\ \left(\frac{-1}{d}\right)^l\right)$ является однородным многочленом от функций $\eta^{-4}(z)\eta^{10}(2z)\eta^{-4}(4z)$; $\eta^{-4}(2z)\eta^8(4z)$. Если $f(z)$ — параболическая форма, то $f(z)$ делится на $\eta^4(z)\eta^2(2z)\eta^4(4z)$ и ее вес больше 4; если $f(z)$ — параболическая форма веса, большего 5, то она также делится на $\eta^{12}(2z)$.

Доказательство.

Первые два случая разбираются легко. Разберем подробно третью часть теоремы.

Обозначим функции:
$f_1(z) = \eta^{-4}(z)\eta^{10}(2z)\eta^{-4}(4z);$
$f_2(z) = \eta^{-4}(2z)\eta^{8}(4z);$
$g_1(z) = \eta^{4}(z)\eta^{2}(2z)\eta^{4}(4z);$
$g_2(z) = \eta^{12}(2z);$
$\chi(d) = \left(\frac{-1}{d}\right).$

Пространство $M_1(\Gamma_0(4), \chi)$ одномерно и порождается функцией $f_1(z)$. Пространство $M_2(\Gamma_0(4))$ порождено $f_1(z)$ и $f_2(z)$. Составим табл. 6 поведения в параболических вершинах.

Таблица 6

s	$f_1(z)$	$f_2(z)$
∞	0	1
0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Если $ord_\infty(f) \geqslant 1$, то $f(z)$ делится на $f_2(z)$. В противном случае существует такое число c, что $f(z) - cf_1(z)$ делится на $f_2(z)$. Так как в каждой параболической вершине $g_1(z)$ и $g_2(z)$ имеют порядок 1, то параболические формы на них делятся. При весе, меньшем 5, параболических форм нет. Заметим, что $g_2(z) = f_1(z)g_1(z)$, причем все три функции имеют мультипликативные коэффициенты. В заключение заметим, что здесь используются очень важные для теории чисел функции

$f_1(z) = \Theta^2(z)$, где

$$\Theta(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} q^{n^2}, \ \ q = e^{2\pi i z}, \qquad \Theta^2(z) = 1 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d|n}\left(\frac{-1}{n}\right)\right)q^n,$$

$$g_2^2(z) = \Delta(2z) = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^{2n},$$

где $\tau(n)$ — функция Рамануджана.

Литература

[1] Коблиц Н. Введение в эллиптические кривые и модулярные формы. М.: Мир, 1988. 320 с.

[2] Кнэпп Э. Эллиптические кривые. М.: Факториал Пресс, 2004. 488 с.

[3] Gordon B., Sinor D. Multiplicative properties of η-products // L.N.M. 1987. V. 1395. P. 173–200.

[4] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. A.M.S. Providence, 2004. 216 p.

[5] Dummit D., Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of η-functions // Contemp. Math. 1985. V 45. P. 89–98.

[6] Voskresenskaya G.V. One special class of modular forms and group representations // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux. 1999. V. 11. P. 247–262.

[7] Cohen H., Oesterle J. Dimensions des espaces de formes modulaires // LNM. 1976. V. 627. P. 69–78.

[8] Воскресенская Г.В. О пространствах модулярных форм четного веса // Вестник Самарского государственного университета, 2014. Т. 121. № 10. С. 38–47.

[9] Biagioli A.J.F. The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta-function // Acta Arithm. 1990. V. LIV. № 4. P. 273–300.

[10] Martin Y. On Hecke operators and products of the Dedekind η-function // C.R. Acad. Paris. 1996. V. 322. P. 307–312.

References

[1] Koblitz N.Introduction in elliptic curves and modular forms. M., Mir, 1988, 320 p. [in Russian].

[2] Knapp A. Elliptic curves. M., Faktorial Press, 2004, 488 p. [in Russian].

[3] Gordon B., Sinor D. Multiplicative properties of η-products. *L.N.M.*, 1987, Vol. 1395, pp. 173–200 [in English].

[4] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. A.M.S., Providence, 2004, 216 p. [in English].

[5] Dummit D., Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of η-functions. *Contemp.Math*, 1985, Vol. 45, pp. 89–98 [in English].

[6] Voskresenskaya G.V. One special class of modular forms and group representations. *Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux*, 1999, Vol. 11, pp. 247–262 [in English].

[7] Cohen H., Oesterle J. Dimensions des espaces de formes modulaires. *LNM*, 1976, Vol. 627, pp. 69–78 [in French].

[8] Voskresenskaya G.V. On spaces of modular forms of even weight. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Estestvennonauchnaya [Vestnik of Samara State University. Natural Sciences Series]*, 2014, no. 10(121), pp. 38–47 [in Russian].

[9] Biagioli A.J.F. The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta-function. *Acta Arithm*, 1990, Vol. LIV, no. 4, pp. 273–300 [in English].

[10] Martin Y. On Hecke operators and products of the Dedekind η-function. *C.R.Acad.Paris*, 1996, Vol. 322, pp. 307–312 [in English].

G.V. Voskresenskaya[3]

ON REPRESENTATION OF MODULAR FORMS AS HOMOGENEOUS POLYNOMIALS

In the article we study the spaces of modular forms such that each element of them is a homogeneous polynomial of modular forms of low weights of the same level. It is a classical fact that it is true for the level 1. N. Koblitz point out that it is true for cusp forms of level 4. In this article we show that the analogous situation takes place for the levels corresponding to the eta-products with multiplicative coefficients. In all cases under consideration the base functions are eta-products. In each case the base functions are written explicitly. Dimensions of spaces are calculated by the Cohen — Oesterle formula, the orders in cusps are calculated by the Biagioli formula.

Key words: modular forms, cusp forms, Dedekind eta-function, cusps, Eisenstein series, divisor of function, structure theorems, Cohen — Oesterle formula.

Статья поступила в редакцию 29/ V/2015.

The article received 29/ V/2015.

[3] *Voskresenskaya Galina Valentinovna* (galvosk@mail.ru), Department of Algebra and Geometry, Samara State University, 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.