УДК 517.518

Б.М. Ибрагимова[1]

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА МАРШО НА ЗНАКОЧУВСТВИТЕЛЬНЫЕ ВЕСА

При доказательстве классического неравенства Маршо для равномерных модулей непрерывности высших порядков используется редукция их определения для произвольного знака шага конечной разности к положительным значениям этого шага. В случае модулей непрерывности с весом такая редукция приводит к сужению определения модуля непрерывности. Поэтому для установления свойств модулей непрерывности с весом требуется другой подход рассуждений. В отличие от обычного веса знакочувствительный вес позволяет учесть не только абсолютную величину приращения функции, но и его знак. В работе для метрики со знакочувствительным весом получен аналог неравенства Маршо об оценке модуля непрерывности данного порядка через модуль непрерывности более высокого порядка.

Ключевые слова: модуль непрерывности, знакочувствительный вес, непрерывные функции, модуль гладкости, конечные разности, неравенство Маршо, классы функций, теоремы вложений.

1. Предварительные сведения

Знакочувствительным весом называется упорядоченная пара $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ непрерывных 2π-периодических неотрицательных функций $p_-(x)$ и $p_+(x)$. Пусть функция $f(x)$ также является непрерывной и 2π-периодической.

Следуя [1; 2], будем пользоваться следующего вида разложением функции по весу и кратким обозначением

$$(f,p)(x) = f^+(x)p_+(x) - f^-(x)p_-(x),$$

где, как обычно, срезки функции $f(x)$ определяются равенствами

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, f^-(x) = (-f(x))^+.$$

Величина

$$|f|_p = \sup_x |(f,p)(x)|$$

называется p-нормой функции $f(x)$ относительно веса $p(x)$.

Ибрагимова Белла Муслимовна (i.bella22@mail.ru), кафедра математики, Дагестанский государственный институт народного хозяйства, 367008, Российская Федерация, г. Махачкала, ул. Атаева, 5.

Для заданного натурального k модуль непрерывности k-го порядка функции f относительно веса p определяется при $\delta \geqslant 0$ равенством [3; 4]

$$\omega_k(f,p,\delta) = \sup_{x,|h|\leqslant\delta} \left| \left(\Delta_h^k f, p\right)(x) \right|;$$

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array} \right) f(x+ih)$$

означает конечную разность k-го порядка функции f в точке x с шагом h.

Легко увидеть, что при $p_{\pm}(x) \equiv 1$ величина $\omega_k(f,p,\delta)$ совпадает с обычным равномерным модулем непрерывности k-го порядка

$$\omega_k(f,\delta) = \sup_{x,|h|\leqslant\delta} \left| \Delta_h^k f(x) \right|.$$

При $k=1$ получим модуль непрерывности

$$\omega(f,\delta) = \omega_1(f,\delta).$$

Модулем непрерывности веса $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ назовем величину

$$\omega(p,\delta) = \max\{\omega(p_-,\delta), \omega(p_+,\delta)\} \ (\delta \geqslant 0).$$

2. Результаты работы

Следующее утверждение развивает вопросы, рассмотренные в [5–6], и обобщает неравенство Маршо ([7]) об оценке модуля непрерывности данного порядка через модуль непрерывности более высокого порядка на модули непрерывности относительно периодических знакочувствительных весов.

Теорема. *Пусть даны 2π-периодические непрерывные функция $f(x)$ и вес $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$. Тогда при каждом натуральном k и $0 \leqslant \delta \leqslant \frac{\pi}{k}$ имеет место неравенство*

$$\omega_k(f,p,\delta) \leqslant k^2\delta^k \times$$

$$\times \int_\delta^{\frac{\pi}{k}} \frac{1}{t^{k+1}} \left\{ \omega_{k+1}(-f,p,t) + \frac{k-1}{4}\omega_{k+1}(f,t)\omega(p,t) \right\} dt +$$

$$+\delta^k \left(\frac{4k}{\pi}\right)^k \left\{ \frac{|f|_p + |-f|_p}{2} + \|f\|_{C_{2\pi}}\, \omega(p,2\pi) \right\}.$$

Доказательство.

Пусть k — заданное натуральное число и пусть $0 < |h| \leqslant \delta$.

Воспользуемся следующим соотношением для конечных разностей (см., напр., [8, с. 105] или [9, с. 118]):

$$\Delta_{2h}^k f(x) - 2^k \Delta_h^k f(x) = \sum_{\nu=1}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ \nu \end{array} \right) \sum_{i=0}^{\nu-1} \Delta_h^{k+1} f(x+ih).$$

Отсюда находим

$$\Delta_h^k f(x) = -\frac{1}{2^k} \sum_{\nu=1}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ \nu \end{array} \right) \sum_{i=0}^{\nu-1} \Delta_h^{k+1} f(x+ih) +$$

$$+\frac{1}{2^k}\Delta_{2h}^k f(x),$$

а значит, для плюс- и минус-срезок конечных разностей получим неравенства

$$\left[\Delta_h^k f(x)\right]^{\pm} p_{\pm}(x) \leqslant \frac{1}{2^k}\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}\sum_{i=0}^{\nu-1}\left[-\Delta_h^{k+1} f(x+ih)\right]^{\pm} p_{\pm}(x)+$$
$$+\frac{1}{2^k}\left[\Delta_{2h}^k f(x)\right]^{\pm} p_{\pm}(x). \tag{1}$$

Используя неравенства

$$|p_{\pm}(x)-p_{\pm}(x+ih)| \leqslant i\omega(p,|h|) \qquad (i=1,2,\ldots,k-1),$$

из (1) получим

$$\left[\Delta_h^k f(x)\right]^{\pm} p_{\pm}(x) \leqslant \frac{1}{2^k}\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}\sum_{i=0}^{\nu-1}\left[-\Delta_h^{k+1} f(x+ih)\right]^{\pm} p_{\pm}(x+ih)+$$
$$+\frac{1}{2^k}\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}\sum_{i=0}^{\nu-1}\left[-\Delta_h^{k+1} f(x+ih)\right]^{\pm} i\omega(p,|h|)+$$
$$+\frac{1}{2^k}\left[\Delta_{2h}^k f(x)\right]^{\pm} p_{\pm}(x).$$

Сложив эти неравенства почленно (члены, содержащие плюс-срезки, с соответствующими членами, содержащими минус-срезки) и используя определение модулей непрерывности $(k+1)$-го порядка, получим

$$\left|\left(\Delta_h^k f,\, p\right)(x)\right| \leqslant \frac{1}{2^k}\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}\sum_{i=0}^{\nu-1}\omega_{k+1}(-f,p,|h|)+$$
$$+\frac{1}{2^k}\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}\sum_{i=0}^{\nu-1} i\omega_{k+1}(f,|h|)\omega(p,|h|)+$$
$$+\frac{1}{2^k}\left|\left(\Delta_{2h}^k f,\, p\right)(x)\right|.$$

В правой части этого неравенства учтем еще легко проверяемые равенства

$$\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}\nu = k2^{k-1}, \quad \sum_{\nu=2}^{k}\binom{k}{\nu}\nu(\nu-1) = k(k-1)2^{k-2}.$$

Тогда имеем неравенство

$$\left|\left(\Delta_h^k f,\, p\right)(x)\right| \leqslant \frac{k}{2}\omega_{k+1}(-f,\, p,\, |h|) + \frac{k(k-1)}{8}\omega_{k+1}(f,|h|)\omega(p,|h|)+$$
$$+\frac{1}{2^k}\left|\left(\Delta_{2h}^k f,\, p\right)(x)\right|. \tag{2}$$

Последовательно применив неравенство (2) к выражениям

$$\left(\Delta_{2h}^k f,\, p\right)(x),\ \left(\Delta_{2^2h}^k f,\, p\right)(x),\ldots,\left(\Delta_{2^{m-1}h}^k f,\, p\right)(x),$$

для любого натурального m получим

$$\left|\left(\Delta_h^k f,\, p\right)(x)\right| \leqslant \sum_{\nu=0}^{m-1}\left\{\frac{k}{2}\frac{1}{2^{\nu\, k}}\omega_{k+1}\left(-f,\, p,\, 2^{\nu}|h|\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{k(k-1)}{8}\frac{1}{2^{\nu\, k}}\omega_{k+1}(f,\, 2^{\nu}|h|)\omega(p,\, 2^{\nu}|h|)\right\}+$$

$$+\frac{1}{2^{mk}}\left|\left(\Delta^k_{2^m h}f,\, p\right)(x)\right| = S_1 + S_2. \tag{3}$$

При этом имеем

$$\left|\left(\Delta^k_{2^m h}f,\, p\right)(x)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{k}\left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array}\right)\Big\{\left[(-1)^{k-i}f(x+i2^m h)\right]^{+} p_{+}(x)+$$

$$+\left[(-1)^{k-i}f(x+i2^m h)\right]^{-} p_{-}(x)\Big\} \leqslant \sum_{i=0}^{k}\left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array}\right)\left|\left((-1)^{k-i}f,\, p\right)(x+i2^m h)\right| +$$

$$+\sum_{i=0}^{k}\left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array}\right)\Big\{\left[(-1)^{k-i}f(x+i2^m h)\right]^{+}\omega(p_{+}, 2\pi)+$$

$$+\left[(-1)^{k-i}f(x+i2^m h)\right]^{-}\omega(p_{-},\, 2\pi)\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{k}\left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array}\right)\left|(-1)^{k-i}f\right|_{p} + \sum_{i=0}^{k}\left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array}\right)\|f\|_{C_{2\pi}}\,\omega(p,\, 2\pi) =$$

$$= 2^{k-1}(|f|_p + |-f|_p) + 2^k\,\|f\|_{C_{2\pi}}\,\omega(p,\, 2\pi).$$

Значит, при любом натуральном m получим

$$\left|\left(\Delta^k_{2^m h}f,\, p\right)(x)\right| \leqslant 2^k M(f,\, p), \tag{4}$$

где $M(f,\, p) = \frac{1}{2}(|f|_p + |-f|_p) + \|f\|_{C_{2\pi}}\,\omega(p,\, 2\pi)$.

Пусть теперь натуральное m удовлетворяет условию

$$m \leqslant \log_2\frac{\pi}{k\delta} < m+1.$$

Тогда

$$\frac{\pi}{2k} < 2^m\delta \leqslant \frac{\pi}{k}. \tag{5}$$

Значит, из (4) и (5) получим

$$S_2 = \frac{1}{2^{mk}}\left|\left(\Delta^k_{2^m h}f,\, p\right)(x)\right| \leqslant \left(\frac{2k\delta}{\pi}\right)^k 2^k M(f,\, p) =$$

$$= \delta^k\left(\frac{4k}{\pi}\right)^k M(f,\, p). \tag{6}$$

С учетом условий (5) оценим сумму, составляющую первое слагаемое S_1 правой части неравенства (3). При этом учтем также, что

$$\omega_{k+1}(-f,\, p,\, t) + \frac{k-1}{4}\omega_{k+1}(f,\, t)\omega(p,\, t)$$

является неубывающей функцией относительно t.

Тогда

$$S_1 \leqslant \sum_{\nu=0}^{m-1}\Big\{\frac{k}{2}\frac{1}{2^{\nu\, k}}\omega_{k+1}(-f,\, p,\, 2^\nu\delta)+$$

$$+\frac{k(k-1)}{8}\frac{1}{2^{\nu\, k}}\omega_{k+1}(f,\, 2^\nu\delta)\omega(p, 2^\nu\delta)\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant k^2\delta^k\sum_{\nu=0}^{m-1}\int_{2^\nu\delta}^{2^{\nu+1}\delta}\frac{1}{t^{k+1}}\left\{\omega_{k+1}(-f,\, p,\, t) + \frac{k-1}{4}\omega_{k+1}(f,\, t)\omega(p,\, t)\right\}dt \leqslant$$

$$\leqslant k^2\delta^k \int_\delta^{\frac{\pi}{k}} \frac{1}{t^{k+1}} \left\{\omega_{k+1}(-f,\, p,\, t) + \frac{k-1}{4}\omega_{k+1}(f,\, t)\omega(p,\, t)\right\} dt.$$

Отсюда, из (3) и (6) при любом x и $|h| \leqslant \delta$ получим

$$\left|\left(\Delta_h^k f,\, p\right)(x)\right| \leqslant k^2\delta^k \int_\delta^{\frac{\pi}{k}} \frac{1}{t^{k+1}} \left\{\omega_{k+1}(-f,\, p,\, t) + \frac{k-1}{4}\omega_{k+1}(f,\, t)\omega(p,\, t)\right\} dt+$$

$$+\delta^k \left(\frac{4k}{\pi}\right)^k M(f,\, p),$$

где $M(f,\, p) = \frac{1}{2}(|f|_p + |-f|_p) + \|f\|_{C_{2\pi}}\, \omega(p,\, 2\pi)$.

Для завершения доказательства остается перейти к супремуму в левой части по x и $|h| \leqslant \delta$.

Замечание. Из доказанной теоремы как следствие при $k = 1$ вытекает более простая оценка для модуля непрерывности (первого порядка) через модуль гладкости:

$$\omega(f,\, p,\, \delta) \leqslant \delta \int_\delta^{\pi} \frac{\omega_2(-f,\, p,\, t)}{t^2} dt+$$

$$+\frac{4}{\pi}\delta \left\{\frac{|f|_p + |-f|_p}{2} + \|f\|_{C_{2\pi}}\, \omega(p,\, 2\pi)\right\}.$$

Литература

[1] Долженко Е.П., Севастьянов Е.А. Аппроксимации со знакочувствительным весом (теоремы существования и единственности) // Известия РАН. Сер.: Математика. 1998. Т. 62. № 6. С. 59—102.

[2] Долженко Е.П., Севастьянов Е.А. Аппроксимации со знакочувствительным весом (устойчивость, приложения к теории ужей и хаусдорфовым аппроксимациям) // Известия РАН. Сер.: Математика. 1999. Т. 63. № 3. С. 77—118.

[3] Рамазанов А.-Р.К. О прямых и обратных теоремах теории аппроксимации в метрике знакочувствительного веса // Analysis Mathematica. 1995. Т. 21. С. 191—212.

[4] Ибрагимова Б.М. Оценка полиномиальных приближений функций через модули гладкости относительно знакочувствительного веса // Математика. Экономика. Образование: тез. докл. XXII Междунар. конфер. Ростов н/Д.: Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, 2014. С. 78

[5] Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г., Ибрагимова Б.М. Сравнение модулей непрерывности и гладкости функций и оценки полиномиальных приближений // Вестник Дагестанского государственного университета. 2011. № 6. С. 87—93.

[6] Рамазанов А.-Р.К., Ибрагимова Б.М. Несимметричный интегральный модуль непрерывности и аналог первой теоремы Джексона // Вестник Дагестанского государственного университета. 2010. № 6. С. 51—54.

[7] Marchaud A. Sur les derives et sur les differences des fonctions de veriables reeless // J. Math. pures et appl. 1927. V. 6. P. 337—425.

[8] Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.

[9] Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1961. 624 с.

References

[1] Doljenko E.P., Sevastjyanov E.A. Approximations with signsensitive weight (theorems of existence and uniqueness). *Izvestiia RAN. Ser.: Matematika* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Series: "Mathematics"], 1998, Vol. 62, no. 6, p. 59—102 [in Russian].

[2] Doljenko E.P., Sevastjyanov E.A. Approximations with signsensitive weight (stability, annexes to the theory of ears and Hausdorf approximations) *Izvestiia RAN. Ser.: Matematika* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Series: "Mathematics"], 1999, Vol. 63, no. 3, pp. 77—118 [in Russian].

[3] Ramazanov A.-R. K. On direct and converse theorems of the theory of approximation in metrics of signsensitive weight. *Analysis Mathematica*, 1995, Vol. 21, pp. 191—212 [in Russian].

[4] Ibragimova B.M. Estimation of polynomial approximations of functions over modulus of smoothness concerning signsensitive weight. *Matematika. Ekonomika. Obrazovanie: tezisy dokladov XXII Mezhdunar. konfer.* [Mathematics, economics and education: abstracts of papers of the XXII International conference ”Mathematics. Economics. Education ”]. Rostov-on-Don, Izd-vo SKNTs VSh IuFU, 2014, p. 78 [in Russian].

[5] Ramazanov A.-R.K., Magomedova V.G., Ibragimova B.M. Comparison of the modulus of continuity of the first and second degree and estimates of polynomial approximations. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Dagestan State University], 2011, no. 6, pp. 87—93 [in Russian].

[6] Ramazanov A.-R.K., Ibragimova B.M. Nonsymmetrical integral modulus of continuity and analogue of the first theorem of Jackson. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Dagestan State University], 2010, no 6, pp. 51—54 [in Russian].

[7] Marchaud A. Sur les derives et sur les differences des fonctions de veriables reeless. *J. Math. pures et appl.*, 1927, Vol. 6, pp. 337—425 [in French].

[8] Dzyadyk V.K. Introduction in equalmesured approximation theory of functions by polynomial. M., Nauka, 1977, 512 p. [in Russian].

[9] Timan A.F. Approximation theory of functions of the real variable. M., Fizmatgiz, 1961, 624 p. [in Russian].

B.M. Ibragimova[2]

ONE GENERALIZATION OF MARCHAUD INEQUALITY ON SIGNSENSITIVE WEIGHTS

At the proof of a classical Marchaud inequality for equidistant moduli of continuity of the highest degree the reduction of their definition for arbitrary sign of a step of a finite difference to positive values of this step is used. In case of moduli of continuity with a weight such reduction reduces definitions of moduli of continuity to restriction. Consequently for determination of properties of moduli of continuity with a weight other approach of reasoning is required. Unlike usual weight signsensitive weight allows to consider not only an absolute value of an increment of function, but also a sign of this increment. In the work for metrics with signsensitive weight an analogue of Marchaud inequality on estimation of modulus of continuity of given degree over modulus of continuity of a higher degree is obtained.

Key words: modulus of continuity, signsensitive weight, continuous functions, modulus of smoothness, finite differences, Marchaud inequality, classes of functions, embedding theorems.

Статья поступила в редакцию 28/ V/2015.

The article received 28/ V/2015.

[2] *Ibragimova Bella Muslimovna* (i.bella22@mail.ru), Department of Mathematics, Dagestan State Institute of National Economy, 5, Ataeva Street, Makhachkala, 367008, Republic of Dagestan.