УДК 517.91

А.А. Коньков[1]

О ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[2]

В статье исследуются решения нелинейных параболических уравнений в полупространстве.

Известно, что в случае линейных уравнений для справедливости принципа максимума на решения необходимо накладывать дополнительные условия. Наиболее известные из них — это условия Тихонова и Тэклинда. Нами показано, что для широкого класса нелинейных уравнений в подобных ограничениях нет необходимости. При этом мы допускаем произвольный рост коэффициентов при младщих членах при стремлении пространственной переменной к бесконечности.

Приведен пример, демострирующий применение полученных результатов в случае нелинейности типа Эмдена-Фаулера.

Ключевые слова: параболические уравнения, принцип максимума, нелинейные дифференциальные операторы, условие Тихонова, условие Тэклинда.

1. Предварительные сведения

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} - u_t = f(x,t,u) \quad \text{в } \mathbb{R}^{n+1}_+, \tag{1.1}$$

где $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, $n \geqslant 1$, а $\|a_{ij}(x,t,s)\|$ — симметрическая матрица такая, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t,s)\xi_i\xi_j > 0$$

для всех $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in (0,\infty)$, $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Будем предполагать, что найдутся локально ограниченные измеримые функции $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\eta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ и $p : [0,\infty) \to [0,\infty)$ такие, что

$$\inf_K h > 0, \quad \inf_K \eta > 0$$

Коньков Андрей Александрович (`konkov@mech.math.msu.su`), кафедра дифференциальных уравнений, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1.

[2]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 11-01-12018-офи-м-2011. Статья подготовлена по докладу конференции "СамДиф-2015".

для любого компакта $K \subset (0, \infty)$ и при этом

$$f(x,t,s)\operatorname{sign} s \geqslant p(|x|)h(s)\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}(x,t,s)|$$

и

$$f(x,t,s)\operatorname{sign} s \geqslant p(|x|)\eta(s)\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t,s)x_i$$

для всех $(x,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ и $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Определение 1.1. Решением уравнения (1.1) называется функция u, непрерывная в $\mathbb{R}_+^{n+1}$, обладающая на этом множестве двумя непрерывными производными по переменным $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и одной — по t и удовлетворяющая (1.1) в классическом смысле [6].

Вопросы, рассмотренные в этой статье, исследовались рядом авторов [1–8]. Нашей целью является доказательство принципа максимума

$$\sup_{\mathbb{R}_+^{n+1}}|u| \leqslant \limsup_{(x,t)\to\partial\mathbb{R}_+^{n+1}}|u(x,t)| \tag{1.2}$$

для решений уравнения (1.1). Хорошо извсетно, что в случае линейных уравнений для справедливости (1.2) на рост решений необходимо накладывать дополнительные условия [7; 8]. Ниже будет показано, что для широкого класса нелинейных уравнений эти условия могут быть сняты.

Для любой функции $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ и вещественного числа $\sigma > 1$ обозначим

$$\psi_\sigma(r) = \inf_{(r/\sigma, \sigma r)\cap[0,\infty)}\psi.$$

2. Основные результаты

Теорема 2.1. Пусть

$$\int_1^\infty (h_\theta(s)s)^{-1/2}\,ds < \infty, \quad \int_1^\infty \frac{ds}{\eta_\theta(s)}\,ds < \infty \quad \text{и} \quad \int_1^\infty r p_\sigma(r)\,dr = \infty$$

для некоторых вещественных чисел $\theta > 1$ и $\sigma > 1$. Тогда для любого решения (1.1) справедлив принцип максимума (1.2).

Пример 2.1. Рассмотрим уравнение

$$\Delta u + b(x)Du - u_t = q(x)|u|^{\lambda-1}u \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{n+1}, \tag{2.1}$$

где $D = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \ldots, \partial_{x_n})$ — оператор градиента, а $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ — некоторые функции, удовлетворяющие условиям

$$|b(x)| \leqslant B|x|^k, \quad B = const > 0,$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и

$$q(x) \sim |x|^l \quad \text{при } x \to \infty,$$

т. е. существуют постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что

$$c_1|x|^l \leqslant q(x) \leqslant c_2|x|^l$$

для всех x из некоторой окрестности бесконечности.

Предположим сначала, что $k \leqslant -1$. Тогда, взяв $h(s) = \eta(s) = s^\lambda$ и

$$p(r) \sim r^l \quad \text{при } r \to \infty,$$

будем иметь согласно теореме 2.1, что при

$$\lambda > 1 \quad \text{и} \quad l \geqslant -2$$

для любого решения (2.1) справедлив принцип максимума (1.2).

Пусть теперь $k > -1$. В этом случае, взяв $h(s) = \eta(s) = s^\lambda$ и

$$p(r) \sim r^{l-k-1} \quad \text{при } r \to \infty,$$

получим из теоремы 2.1, что

$$\lambda > 1 \quad \text{и} \quad l \geqslant k-1$$

для любого решения (2.1) справедлив принцип максимума (1.2).

Литература

[1] Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // УМН. 1962. Т. 17. № 3. С. 3–146.

[2] Кондратьев В.А. Об асимптотическом поведении решений нелинейных параболических уравнений второго порядка // Тр. МИАН. 2008. Т. 260. С. 180–192.

[3] Кондратьев В.А., Ландис Е.М. Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // Итоги науки и техники. Сер.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1988. Т. 32. С. 99–215.

[4] Коньков А.А. О стабилизации решений нелинейного уравнения Фоккера — Планка // Труды семинара имени И.Г. Петровского. 2013. Вып. 29. С. 333–345.

[5] Kon'kov A.A. On the asymptotic behaviour of solutions of nonlinear parabolic equations // Proc. Royal Soc. Edinburgh. 2006. V. 136. P. 365–384.

[6] Ландис Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971.

[7] Täcklind S. Sur les classes quasianalytiques des solutions des équations aux dérivêes partielles du type parabolique. // Nova Acta Soc. Sci. Uppsal. 1936. V. 4. Ser. 10. № 3. P. 1–57.

[8] Tychonoff A. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur // Матем. сб. 1935. Т. 42. № 2. С. 199–216.

References

[1] Il'in A.M., Kalashnikov A.S., Oleinik O.A. Linear equations of the second order of parabolic type. *UMN* [Russian Mathematical Surveys], 1962, Vol. 17, no. 3, pp. 1–146 [in Russian].

[2] Kondratiev V.A. On asymptotic behavior of solutions of nonlinear second-order parabolic equations. *Tr. MIAN* [Proceedings of Steklov Mathematical Institute, RAS], 2008, Vol. 260, pp. 172–184 [in Russian].

[3] Kondratiev V.A., Landis E.M. Qualitative theory of second order linear partial differential equations. M., VINITI, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., 1988, Vol. 32, pp. 99–215 [in Russian].

[4] Kon'kov A.A. Stabilization of solutions of the nonlinear Fokker-Planck equation. *Trudy seminara imeni I.G. Petrovskogo* [Proceedings of the seminar named after I.G. Petrovsky], 2014, Vol. 197, no. 3, pp. 358–366 [in Russian].

[5] Kon'kov A.A. On the asymptotic behaviour of solutions of nonlinear parabolic equations *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 2006, Vol. 136, pp. 365–384 [in English].

[6] Landis E.M. Second-order equations of elliptic and parabolic type. M., Nauka, 1971 [in Russian].

[7] Täcklind S. Sur les classes quasianalytiques des solutions des équations aux dérivêes partielles du type parabolique. *Nova Acta Soc. Sci. Uppsal.*, 1936, Vol. 4, Ser. 10, no. 3, pp. 1–57 [in Russian].

[8] Tychonoff A. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur. *Matem. sb.* [Mathematical collected book], 1935, Vol. 42, no. 2, pp. 199–216 [in French].

A.A. Kon'kov[3]

ON THE MAXIMUM PRINCIPLE FOR A CLASS OF NONLINEAR PARABOLIC EQUATIONS[4]

In this paper, we consider solutions of nonlinear parabolic equations in the half-space.

It is well-known that, in the case of linear equations, one needs to impose additional conditions on solutions for the validity of the maximum principle. The most famous of them are the conditions of Tikhonov and Täcklind. We show that such restrictions are not needed for a wide class of nonlinear equations. In so doing, the coefficients of lower-order derivatives can grow arbitrarily as the spatial variables tend to infinity.

We give an example which demonstrates an application of the obtained results for nonlinearities of the Emden — Fowler type.

Key words: parabolic equations, maximum principle, nonlinear differential operators, Tikhonov's condition, Täcklind's condition.

Статья поступила в редакцию 28/ V/2015.

The article received 28/ V/2015.

[3] *Kon'kov Andrej Alexandrovich* (konkov@mech.math.msu.su), Department of Differential Equations, Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation.

[4] The work is carried out with the support of grant of the Russian Foundation for Basic Research 11-01-12018-ofi-m-2011.