УДК 517.95

А.А. Мингазов[1]

КОМПЛЕКС ГЕРСТЕНА ДЛЯ ПУЧКОВ С ТРАНСФЕРАМИ ДЛЯ НЕТЕРОВЫХ СХЕМ[2]

В. Воеводский в одной из первых статей, касающихся построения категории мотивов, ввел комплекс Герстена для пучков с трансферами. Кроме того, он доказал гипотезу Герстена, которая утверждает, что комплекс Герстена локального кольца точки гладкого многообразия над полем k является резольвентой значения пучка на этом кольце. Этот фундаментальный факт позволяет использовать комплекс Герстена для вычисления когомологий пучков с трансферами на гладких многообразиях. В данной статье мы строим комплекс Герстена для непрерывных пучков с трансферами, определенных на категории нетеровых k-схем, где k имеет нулевую характеристику. После этого мы доказываем гипотезу Герстена для пучков с трансферами в случае локального нетерового кольца над полем k, что является обобщением результата Воеводского.

Ключевые слова: пучок с трансферами, гипотеза Герстена, равнохарактеристическое кольцо, мотивы Воеводского, гомоморфизм Гизина, трансфер, нетерова схема, раздутие.

В статье [1] введен аналог комплекса Герстена для гомотопически инвариантных пучков с трансферами для неприводимого многообразия X

$$g(X,\mathcal{F}) = \left(0 \to \mathcal{F}(\eta) \to \bigoplus_{x\in X^{(1)}} \mathcal{F}_{-1}(k(x)) \to \bigoplus_{x\in X^{(2)}} \mathcal{F}_{-2}(k(y)) \to \dots \right).$$

Кроме того, там же доказано, что комплекс Герстена для пучка с трансферами $\mathcal{F}$ на спектре локального кольца $\mathcal{O}$ является точным во всех членах, кроме нулевого, и $H^0(g(Spec\ \mathcal{O}_{X,x})) = \mathcal{F}(\mathcal{O}_{X,x})$.

Пусть k — поле характеристики нуль. Мы определим канонический дифференциал Герстена для специфических пучков с трансферами для локального кольца регулярной нетеровой k-схемы.

Определение 1. Определим категорию соответствий $CorSch_k$ нетеровых k-схем. Ее объекты — это нетеровы k-схемы. Морфизмы $CorSch_k(X,Y)$ — это свободная абелева группа, порожденная неприводимыми подсхемами $Z \subset X \times Y$, конечными и сюръективными над X. Предпучком с трансферами на категории нетеровых схем мы будем называть функтор $\mathcal{F}\colon CorSch_k^{op} \to Ab$.

Мингазов Альберт Айдарович (mingazov88@gmail.com), лаборатория алгебры и теории чисел, Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова, 191023, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27.

[2]Работа поддержана грантом Российского научного фонда №14-11-00456.

Определение 2. Предпучок $\mathcal{F}$, определенный на категории нетеровых k-схем, будем называть непрерывным, если выполнены два условия:

1) для $S = \lim\limits_{\to} S^{\alpha}$ выполнено $\mathcal{F}(Spec\ S) = \lim\limits_{\to} \mathcal{F}(Spec\ S^{\alpha})$,

2) если $Z \in CorSch_k(X, Y)$ представимо в виде предела $\lim\limits_{\leftarrow} Z_{\alpha}$ для $Z_{\alpha} \in Cor_k(X_{\alpha}, Y_{\alpha})$, где $X = \lim\limits_{\leftarrow} X_{\alpha}$, $Y = \lim\limits_{\leftarrow} Y_{\alpha}$, то отображение $Z^*\colon \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$ является пределом отображений $Z^*_{\alpha}\colon \mathcal{F}(Y_{\alpha}) \to \mathcal{F}(X_{\alpha})$.

Мы будем рассматривать только непрерывные гомотопически инвариантные пучки Зарисского, определенные на категории нетеровых k-схем. Основным результатом является следующая

Теорема 1. Пусть R — регулярная локальная нетерова k-алгебра, $\mathcal{F}$ — непрерывный гомотопически инвариантный пучок с трансферами, определенный на категории нетеровых k-схем. Тогда существуют канонические дифференциалы в комплексе Герстена такие, что точна последовательность

$$0 \to \mathcal{F}(R) \to \mathcal{F}(K) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathcal{F}_{-1}(k(x)) \to \bigoplus_{y \in X^{(2)}} \mathcal{F}_{-2}(k(y)) \to \ldots$$

Доказательство следует схеме из статьи [2]. Оно использует следующую теорему (доказана в [5]).

Теорема Попеску. Пусть R — регулярная локальная нетерова k-алгебра. Тогда R представима в виде индуктивного предела $R = \lim\limits_{\to} R^{\alpha}$, где R^{α} — локальные кольца точек гладких k-многообразий.

Конструкция дифференциала. Этап I. Для схемы $X = Spec\ R$ и локального параметра $f \in R$ существует канонический дифференциал $\partial\colon \mathcal{F}(X_f) \to \mathcal{F}_{-1}(Z)$, где $Z = Spec\ R/fR$. Он строится как композиция деформации к нормальному расслоению и изоморфизма $H^1_Z(Z \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F}) \to \mathcal{F}_{-1}(Z)$. Сделать это позволяют две леммы.

Лемма 1. Деформация к нормальному расслоению (конструкция в [3]) дает изоморфизмы когомологий Зарисского

$$H^1_Z(X, \mathcal{F}) \xleftarrow{i_1^*} H^1_{Z \times \mathbb{A}^1}(X_t, \mathcal{F}) \xrightarrow{i_0^*} H^1_Z(N_{X/Z}, \mathcal{F}).$$

Лемма 2. Отображение $H^1_Z(Z \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F}) \xrightarrow{a^*} H^1_Z(Z \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F})$, индуцированное умножением $a\colon \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ на элемент $a \in \mathcal{O}^*(Z)$, тождественно.

Если R одномерно, то $R_f = K$ — поле частных. Обозначим k поле вычетов. В результате получаем дифференциал Герстена $\partial\colon \mathcal{F}(K) \to \mathcal{F}(k)$.

Этап II. Пусть R — произвольное локальное кольца регулярной нетеровой k-схемы, $X = Spec\ R$, и пусть $Z \subset Y \subset X$ — неприводимые подсхемы, $codim_X Y = i$, $codim_X Z = i + 1$. Определим дифференциал $\partial\colon \mathcal{F}_{-i}(k(Y)) \to \mathcal{F}_{-i-1}(k(Z))$ следующим образом. Локализуем X и Y в Z и разрешим особенности кривой Y_Z внутри X_Z с помощью раздутий в точке, обозначим его $\widetilde{Y_Z} \subset \widetilde{X_Z}$ и проекцию $p\colon \widetilde{X_Z} \to X_Z$. Обозначим $z_1, \ldots, z_n$ — собственные прообразы $z \in X_Z$, $Tr_j\colon \mathcal{F}_{-i-1}(z_j) \to \mathcal{F}_{-i-1}(z)$ — трансферы для конечного отображения $p|_{z_i}$. Локализуя $\widetilde{Y_Z}$ в каждом z_j и пользуясь этапом I, получим дифференциал $\partial_j\colon \mathcal{F}_{-i}(k(Y)) \to \mathcal{F}_{-i-1}(k(z_j))$. Дифференциал $\partial\colon \mathcal{F}_{-i}(k(Y)) \to \mathcal{F}_{-i-1}(k(Z))$ — это сумма композиций $Tr_1 \circ \partial_1 + \ldots + Tr_n \circ \partial_n$.

При таком определении непонятны независимость дифференциала от разрешения особенностей и выполнение свойства $\partial \circ \partial = 0$. Оба вопроса становятся тривиальными после доказательства совпадения дифференциала, определенного выше с некоторым предельным.

Для неприводимой замкнутой подсхемы $W = Spec\ R/\mathfrak{p}$ в $X = Spec\ R$ выберем систему образующих $\mathfrak{p} = (f_1, \ldots, f_n)$. Пусть α_0 такое, что $f_1, \ldots, f_n$ имеют прообразы $f_1^{\alpha_0}, \ldots, f_n^{\alpha_0}$ в R_{α_0}, обозначим $f_i^\alpha = \varphi_{\alpha_0\alpha}(f_i^{\alpha_0})$, $\mathfrak{p}_\alpha = (f_1^\alpha, \ldots, f_n^\alpha)$, $W_\alpha = Spec\ R^\alpha/\mathfrak{p}_\alpha$. Тогда $W = \lim\limits_{\leftarrow} W_\alpha$. Проделаем такую операцию для замкнутой точки $z \in X$ и кривой $Y \subset X$. Замкнутые подсхемы $Z^\alpha \subset X^\alpha$ неособы для $\alpha > \alpha_0$.

Теорема 2. В описанных условиях диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(k(Y)) \arrow[r, "\partial_{Y,z}"] & \mathcal{F}_{-1}(z) \\
\lim\limits_{\rightarrow} \mathcal{F}(Y^\alpha - Z^\alpha) \arrow[u] \arrow[r, "\lim\limits_{\rightarrow} \partial_{Y^\alpha, Z^\alpha}"] & \lim\limits_{\rightarrow} \mathcal{F}_{-1}(Z^\alpha), \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

где $\partial_{Y,z}$ —дифференциал Герстена на X, а $\partial_{Y^\alpha,Z^\alpha}$ — дифференциал Герстена на X^α, коммутативна.

Доказательство использует следующую лемму.

Лемма 3. Обозначим $\widetilde{X}$ — вложенное разрешение особенностей кривой Y, $\widetilde{Y}$ — собственный прообраз Y, $z_1, \ldots, z_n$ — собственные прообразы z, $\widetilde{X^\alpha}$ — композиция раздутий в соответствующих замкнутых подсхемах, $\widetilde{Y^\alpha}$ — собственный прообраз Y^α, $Z_1^\alpha, \ldots, Z_n^\alpha$ — собственные прообразы Z^α. Тогда $\widetilde{X} = \lim\limits_{\leftarrow} \widetilde{X^\alpha}$, $\widetilde{Y} = \lim\limits_{\leftarrow} \widetilde{Y^\alpha}$, $z_i = \lim\limits_{\leftarrow} Z_i^\alpha$.

Утверждение теоремы следует из леммы, теоремы Гротендика о предельном переходе для когомологий Зарисского (сформулирована в [2]) и свойствах гомоморфизма Гизина в мотивах Воеводского алгебраических многообразий. Требуемые свойства гомоморфизма Гизина аналогичны доказанным в [6]. Кроме того, требуется свойство согласованности гомоморфизма Гизина и трансфера, которое доказано в [4].

Литература

[1] Voevodsky V., Suslin A., Friedlander E. Cohomological Theory of Presheves with Transfers // Cycles, Transfers and Motivic Homology Theories, Annals of Math. Studies, 1999.

[2] Panin I.A. The Equicharacteristic Case of the Gersten Conjecture // Теория чисел, алгебра и алгебраическая геометрия: сборник статей. Тр. МИАН, 2003. Вып. 241. С. 169–178.

[3] Panin I. Oriented Cohomology Theories of Algebraic Varieties // Special issue in honor of H. Bass on his seventieth birthday. Part III, K-Theory 30, 2003. № 3. P. 265–314.

[4] Мингазов А.А. Согласованность гомоморфизма Гизина и трансфера // Алгебра и анализ. 2015. № 27:4. С. 59–73.

[5] Popesku D. General Néron Desingularization // Nagoya Math. J., 1985. Vol. 100. P. 97–126.

[6] Levine M. Oriented cohomology, Borel-Moore homology and algebraic cobordism // Michigan Math. J., 2008. V. 57. P. 523–572.

References

[1] Voevodsky V. Cohomological Theory of Presheves with Transfers. *Cycles, Transfers and Motivic Homology Theories (V. Voevodsky, A. Suslin and E. Friedlander, eds.), Annals of Math. Studies*, 1999 [in English].

[2] Panin I.A. The Equicharacteristic Case of the Gersten Conjecture. *Teoriia chisel, algebra i algebraicheskaia geometriia, Sbornik statei. Tr. MIAN* [Theory of numbers, algebra and algebraic geometry, Collection of articles. Proceedings of Steklov Mathematical Institute, RAS], 241, Nauka, M., 2003, pp. 169–178 [in English].

[3] Panin I. Oriented Cohomology Theories of Algebraic Varieties. *Special issue in honor of H. Bass on his seventieth birthday. Part III, K-Theory*, 30 (2003), no. 3, pp. 265–314 [in English].

[4] Mingazov A.A. Coherence of Gysin homomorphism and transfer. *Algebra i Analiz* [Algebra and Analysis], 27:4 (2015), pp. 59–73 [in Russian].

[5] Popesku D. General Néron Desingularization. *Nagoya Math. J.*, 1985, Vol. 100, pp. 97–126 [in English].

[6] Levine M. Oriented cohomology, Borel-Moore homology and algebraic cobordism. *Michigan Math. J.*, Volume 57(2008), pp. 523–572 [in English].

A.A. Mingazov[3]

GERSTEN COMPLEX FOR SHEAVES WITH TRANSFERS FOR NOETHERIAN SCHEMES

V. Voevodsky introduced Gersten complex for sheaves with transfers in one of the first papers where the category of motives was constructed. Becides he proved Gersten conjecture which states that the Gersten complex for the local ring of point of smooth variety over field k is resolution of the group of global sections over this ring. Because of this fundamental fact Gersten complex can be used for calculations of cohomologies of sheaves with transfers over smooth k-varieties. In this paper we construct Gersten complex for sheaves with transfers, which defined on the category of noetherian k-schemes, where $char\ k = 0$. After this we proof the Gersten conjecture in case of local noetherian ring over field k. This generalises Voevodsky's result.

Key words: sheaf with transfer, Gersten conjecture, equicharacteristic ring, Voevodsky motives, Gysin homomorphism, transfer, noetherian scheme, blow up.

Статья поступила в редакцию 18/ VI/2015.

The article received 18/ VI/2015.

[3] *Mingazov Albert Aidarovich* (mingazov88@gmail.com), Laboratory of Algebra and Theory of Numbers, St. Petersburg Department of V.A. Steklov Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences, 27, Fontanka, St. Petersburg, 191023, Russian Federation.