УДК 517.95, 517.925.7

С.В. Пикулин [1]

О РЕШЕНИЯХ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ [2]

Для уравнения Колмогорова — Петровского — Пискунова — квазилинейного параболического уравнения второго порядка, возникающего в теории распространения пламени и при моделировании некоторых биологических процессов, представлена аналитическая конструкция автомодельных решений типа бегущей волны для случая, когда нелинейный член имеет вид произведения аргумента и линейной функции от некоторой положительной степени аргумента. Подход к построению решения базируется на исследовании особых точек аналитического продолжения решения в комплексную область и на применении теста Фукса — Ковалевской — Пенлеве. Полученное представление решения допускает эффективную численную реализацию.

Ключевые слова: уравнение Колмогорова — Петровского — Пискунова, уравнение типа Фуджиты, обобщенное уравнение Фишера, уравнение Абеля второго рода, промежуточный асимптотический режим, бегущие волны, аналитическое продолжение, подвижные и неподвижные особые точки, алгебраические точки ветвления, ряд Пюизе, явное решение, решение с "мертвой зоной", тест Пенлеве, метод Фукса — Ковалевской.

1. Введение

В математической теории горения [1], теории газового разряда [2], математической биологии [3; 4] и ряде других приложений возникает нелинейное уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(u), \qquad t \in (0,\infty), \quad x \in (-\infty,+\infty), \tag{1.1}$$

где $u = u(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, $F(v)$ — функция класса $C^1([0,1])$, $F'(0) > 0$, и выполняются условия

$$F(v) > 0 = F(0) = F(1), \qquad F'(0) > F'(v), \qquad \forall v \in (0,1).$$

Пикулин Сергей Владимирович (spikulin@gmail.com), сектор аналитико-численных методов, ВЦ РАН (ФИЦ ИУ РАН), 119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Вавилова, 40.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00923) и программы №3 фундаментальных исследований ОМН РАН. Статья подготовлена по докладу конференции "СамДиф-2015".

Величина $u(t,x)$ принимает значения в промежутке между двумя стационарными состояниями $\widetilde{u}_0(t,x) \equiv 0$ и $\widetilde{u}_1(t,x) \equiv 1$ и удовлетворяет начальному условию

$$u(0,x) =: u_0(x). \tag{1.2}$$

Особый интерес представляют решения типа бегущей волны

$$u = \widetilde{u}(t,x) =: \psi(x - \omega\, t), \tag{1.3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \widetilde{u}(t,x) = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} \widetilde{u}(t,x) = 0, \qquad \forall t \geqslant 0, \tag{1.4}$$

где $\omega = \mathrm{const}$ — скорость распространения волны. После подстановки (1.3) в уравнение (1.1) с учетом (1.4) получим следующую краевую задачу для автономного обыкновенного дифференциального уравнения относительно функции $\psi = \psi(\eta)$:

$$\frac{d^2\psi}{d\eta^2} + \omega\frac{d\psi}{d\eta} + F(\psi) = 0, \qquad \eta \in (-\infty, +\infty), \tag{1.5}$$

$$\lim_{\eta\to-\infty} \psi(\eta) = 1, \quad \lim_{\eta\to+\infty} \psi(\eta) = 0. \tag{1.6}$$

В работе [3] было показано, что решение задачи (1.5), (1.6) существует для всех значений скорости

$$\omega \geqslant \omega_0 := 2\sqrt{F'(0)}$$

и единственно с точностью до сдвигов $\eta \mapsto (\eta + \mathrm{const})$. Кроме того, решение исходной задачи Коши (1.1), (1.2) с начальной функцией $u_0(x)$ ступенчатого вида стремится при $t \to \infty$ к *промежуточному асимптотическому режиму* — решению типа бегущей волны минимальной скорости ω_0.

Примером уравнения вида (1.1) является обобщенное уравнение Фишера

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u\,(1 - u^\rho), \qquad \rho > 0. \tag{1.7}$$

При $\rho = 1$ это уравнение рассматривалось [4] в связи с исследованием модели распространения в популяции гена, дающего своему носителю эволюционные преимущества.

2. Конструкция бегущих волн

Рассмотрим задачу вида (1.5), (1.6), которая получается из уравнения (1.7) подстановкой (1.3), (1.4):

$$\frac{d^2\psi}{d\eta^2} + \omega\,\frac{d\psi}{d\eta} + \psi\,(1 - \psi^\rho) = 0, \quad \eta \in (-\infty, +\infty), \quad \rho > 0, \tag{2.1}$$

$$\lim_{\eta\to-\infty} \psi(\eta) = 1, \qquad \lim_{\eta\to+\infty} \psi(\eta) = 0. \tag{2.2}$$

Как обычно, через $\mathbb{Q}$ обозначим поле рациональных чисел. Символ $\mathbb{Q}\,(a,b,c)$ означает поле, порожденное над $\mathbb{Q}$ элементами a,b,c, то есть множество таких чисел, которые получаются из элементов множества $\mathbb{Q} \cup \{a,b,c\}$ с помощью конечного числа арифметических действий.

Теорема 1. *Пусть $\psi = \psi(\eta) \in C^2(\mathbb{R})$ — решение задачи (2.1), (2.2). Тогда 1) $\forall n \in \mathbb{N}, \psi \in (0,1)$ справедлива следующая формула:*

$$\eta(\psi) = \frac{1}{2}\ln\frac{(1-\psi^{\rho/n})^\alpha}{\psi^\beta} + H_n\left(1 - \psi^{\rho/n}\right), \tag{2.3}$$

$$\alpha := \frac{\omega + \sqrt{\omega^2 + 4\,\rho}}{\rho}, \qquad \beta := \omega + \sqrt{\omega^2 - 4},$$

где функция $H_n(\zeta)$ является аналитической в точках $\zeta \in [0,1)$ и представляется сходящимся в окрестности $\zeta = 0$ рядом Тейлора

$$H_n(\zeta) =: \sum_{k=0}^{\infty} h_k^{(n)} \zeta^k, \quad \forall h_0^{(n)} \in \mathbb{R}, \quad h_k^{(n)} \in \mathbb{Q}\left(\omega, \rho, \sqrt{\omega^2 + 4\,\rho}\right), \quad k \geqslant 1.$$

Каждая особая точка $\zeta \neq 1$ аналитического продолжения функции $H_n(\zeta)$ в $\mathbb{C}$ является точкой ветвления порядка 1.
2) Если для некоторого натурального $m \geqslant 2$ выполняется равенство

$$\omega = \omega_m := \frac{\rho + 2\,m}{\sqrt{m\,(\rho + m)}}, \tag{2.4}$$

то функция $H_1(\zeta)$ при $\zeta = 1$ имеет ветвление порядка $(m-1)$ и разлагается в сходящийся ряд Пюизе по целым неотрицательным степеням $(\zeta - 1)^{1/m}$, а функция $H_m(\zeta)$ в указанной точке голоморфна.

Доказательство теоремы 1 основано на свед́ении уравнения (1.5) к вспомогательному уравнению первого порядка — уравнению Абеля второго рода [5], и на исследовании характера его особых точек [6; 7]. Применение метода Фукса — Ковалевской показывает, что вспомогательное уравнение Абеля частично проходит тест Пенлеве [8], если ω принимает одно из значений (2.4).

Напомним, что свойство Пенлеве дифференциального уравнения заключается в том, что его общее решение не имеет в комплексной области подвижных критических особых точек [7]. Наличие этого свойства часто означает, что решение уравнения может быть найдено в явном виде. Как было установлено в работе [9], уравнение (2.1) при $\rho = 1$ (уравнение Фишера) обладает свойством Пенлеве для единственного значения скорости $\omega = 5/\sqrt{6} \approx 2.041$, при этом решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi(\eta) &= \left(1 + e^{\eta/\sqrt{6}}\right)^{-2}, \\ \eta &= \sqrt{6}\,\ln \frac{1 - \sqrt{\psi}}{\sqrt{\psi}}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Применим теорему 1 к случаю $\rho = 1$, $\omega = 5/\sqrt{6}$. Из (2.4) при $m = 2$ найдем

$$\omega_2 = 5/\sqrt{6} = \omega.$$

По формуле (2.3) при $n = 1$ имеем

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{(1-\psi)^{2\sqrt{6}}}{\psi^{\sqrt{6}}} + H_1(1-\psi) \equiv \sqrt{6}\,\ln \frac{1-\sqrt{\psi}}{\sqrt{\psi}} + \sqrt{6}\,\ln(1+\sqrt{\psi}) + H_1(1-\psi).$$

Вычитая полученное равенство из (2.5) и перенося $H_1(\zeta)$ в левую часть, находим $H_1(\zeta) = -\sqrt{6}\,\ln(1 + \sqrt{1-\zeta})$. В соответствии с теоремой 1 функция $H_1(\zeta)$ имеет при $\zeta = 1$ ветвление порядка $(m-1) = 1$. Далее подставим в (2.3) $n = 2$:

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{(1-\sqrt{\psi})^{2\sqrt{6}}}{\psi^{\sqrt{6}}} + H_2(1-\sqrt{\psi}) \equiv \sqrt{6}\,\ln \frac{1-\sqrt{\psi}}{\sqrt{\psi}} + H_2(1-\sqrt{\psi}). \tag{2.6}$$

Вычитая (2.5) из (2.6), получаем $H_2(\zeta) \equiv 0$ — голоморфная в точке $\zeta = 1$ функция (точнее, $H_2(\zeta) \equiv \mathrm{const}$, так как $H_n(\zeta)$ определено с точностью до аддитивной постоянной).

Таким образом, теорема 1 включает известное явное решение (2.5) в семейство решений типа бегущей волны, параметризованное значениями (2.4) скорости

$$\omega = \omega_m \to \omega_0 \text{ при } m \to \infty$$

(рис. 1, *а*), при которых обратная к решению функция имеет аналитическое представление (2.3) на всем промежутке $\psi \in [0,1]$, включая концы (рис. 1, *б, в*).

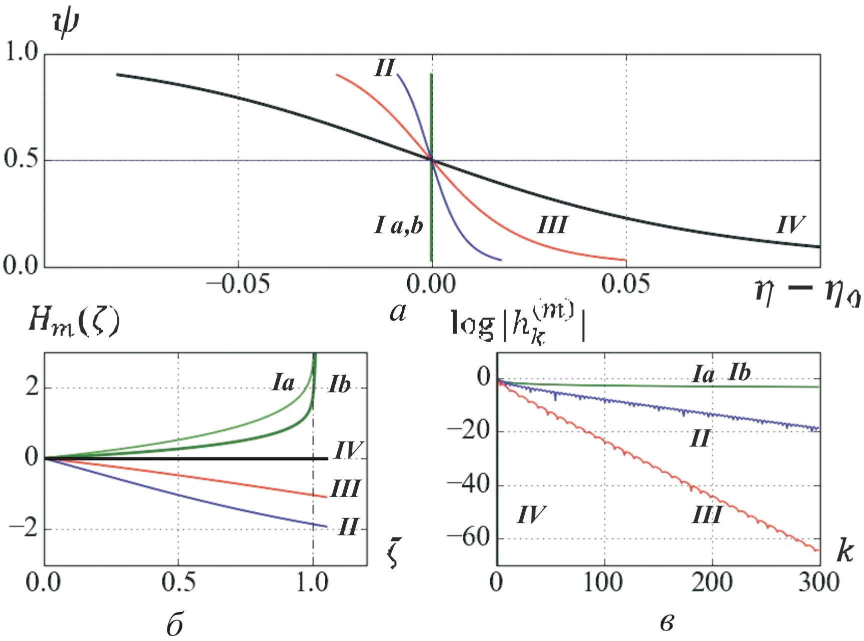

Рис. 1. Представление (2.3) решений уравнения Фишера ($\rho = 1$) в следующих случаях: Ia, Ib: $n = 1, 2$, $\omega = \omega_0$; II—IV: $n = m = 7, 4, 2$, $\omega = \omega_m$; *а* — отличие от "медленной" волны ($\omega = \omega_0$); *б* — графики $H_m(\zeta)$; *в* — поведение коэффициентов $h_k^{(m)}$

3. О некоторых явных решениях

Тождество $H_2(\zeta) \equiv \text{const}$, установленное в предыдущем параграфе для $\rho = 1$, $m = 2$, справедливо для всех значений $\rho > 0$. Из (2.3) получается известная [10] явная формула решения при $\omega = \omega_2 = (\rho + 4)/\sqrt{2\rho + 4}$, $\forall \rho > 0$:

$$\psi = \psi^+(\eta) := \left[1 + \exp\left(\frac{\eta\,\rho}{\sqrt{2\rho + 4}}\right)\right]^{-2/\rho}, \quad \rho > 0.$$

Явный вид решения при $\omega = \omega_2$ можно адаптировать к случаю $\rho \in (-2, 0)$ путем выбора подходящей аналитической ветви логарифма в (2.3). Рассмотрим задачу

$$\frac{d^2\psi}{d\eta^2} + \frac{\rho + 4}{\sqrt{2\rho + 4}}\,\frac{d\psi}{d\eta} + F_\rho(\psi) = 0, \quad \eta \in (-\infty, +\infty), \quad \rho \in (-2, 0), \tag{3.1}$$

$$\lim_{\eta \to -\infty} \psi(\eta) = 0, \qquad \lim_{\eta \to +\infty} \psi(\eta) = 1, \tag{3.2}$$

где $F_\rho(v) := v\,(1 - v^\rho)$ при $v > 0$, $F_\rho(0) := 0$.

Устойчивое и неустойчивое стационарные решения $\widetilde{u}_1 \equiv 1$ и $\widetilde{u}_0 \equiv 0$ для уравнения (3.1) меняются ролями по сравнению с (2.1), что находит отражение в постановке краевых условий (3.2), отличных от (2.2).

Теорема 2. *Кусочно-аналитическая функция*

$$\psi^-(\eta) := \begin{cases} \left[1 - \exp\left(\eta\,\rho/\sqrt{2\,\rho+4}\,\right)\right]^{-2/\rho}, & \eta > 0, \\ 0, & \eta \leqslant 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

является решением задачи (3.1), (3.2).

Для задачи (3.1), (3.2) не выполняются условия теоремы Колмогорова — Петровского — Пискунова, поскольку $(F_\rho)'(0) = +\infty$ при $\rho \in [-1, 0)$, и функция $F_\rho(v)$ разрывна при $\rho \in (-2, -1]$. Характерной чертой решений таких уравнений является, как следует из [10], наличие открытого множества, на котором решение обращается в тождественный нуль (рис. 2) так называемой "мертвой зоны" решения. Отметим, что при $\rho \in (-2, -1]$ функция $\psi^-(\eta)$ принадлежит классу $C^1(\mathbb{R})$, но не $C^2(\mathbb{R})$.

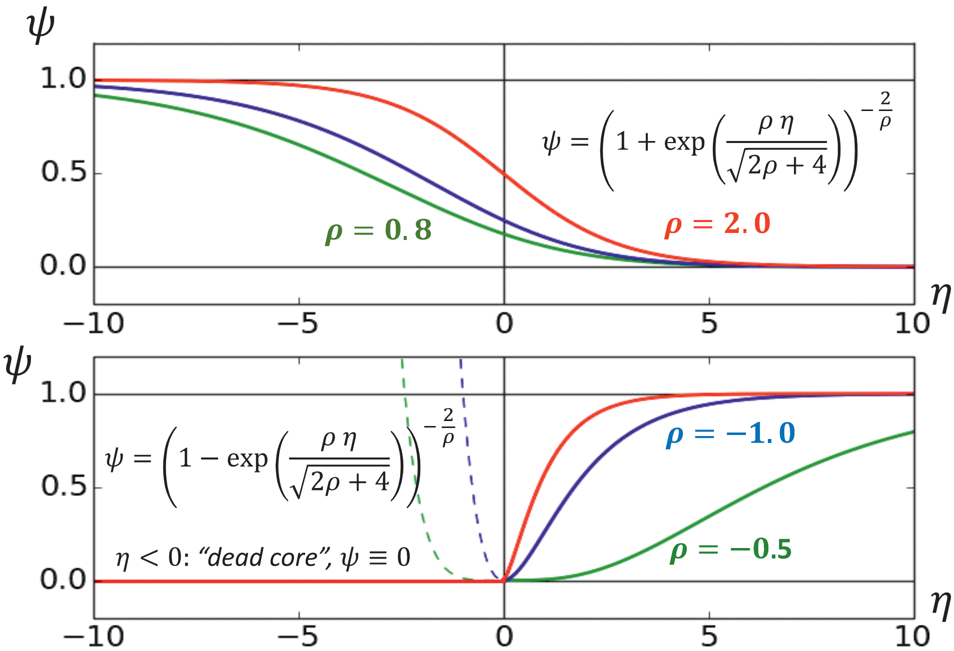

Рис. 2. Профили бегущих волн для специального случая $\omega = \omega_2$ (п. 3). Сверху: $\rho = 0.8$; 1; 2. Снизу: $\rho = -4/3$; $\rho = -1$; $\rho = -0.5$. Пунктиром проведены графики аналитического продолжения $\psi^-|_{\eta>0}$ для $\rho = -1; -0.5$

Литература

[1] Математическая теория горения и взрыва / Я.Б. Зельдович [и др.]. М.: Наука, 1980. 478 с.

[2] Лазерная искра в режиме "медленного горения" / Ф.В. Бункин [и др.] // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 9. № 11. С. 609–612.

[3] Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов И.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Секция А. 1937. Т. 1. № 6. С. 1–25.

[4] Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes // Ann. Eug. 1937. № 7. P. 355–369.

[5] Камке. Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.

[6] Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М: Едиториал УРСС, 2004. 552 с.

[7] Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Гостехтеориздат, 1950. 436 с.

[8] Гориэли А. Интегрируемость и сингулярность. М.; Ижевск: R&C D., 2006. 315 с.

[9] Ablowitz M., Zeppetella A. Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed // Bulletin of Mathematical Biology. 1979. V 41. № 6. P. 835–840.

[10] Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М.: Наука, 1987. 352 с.

References

[1] Zeldovich Ya.B., Barenblatt G.I., Librovich V.B., Makhviladze G.M. Mathematical theory of combustion and explosions. M., Nauka, 1980, 478 p. [in Russian].

[2] Bunkin F.V., Konov V.I., Prokhorov A.M., Fedorov V.B. Laser Spark in the "Slow Combustion" regime. *Pis'ma v ZhETF* [JETP Letters], 1969, Vol. 9, No. 11, pp. 609–612 [in Russian].

[3] Kolmogorov A.N., Petrovskii I.G., Piscounov I.S. Study of diffusion equation coupled to the increase of the amount of substance and its application to one biological problem. *Biulleten' MGU. Sektsiia A* [Bulletin of Moscow State University. Section A], 1937, Vol. 1, no. 6, pp. 1–25 [in Russian].

[4] Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes. *Ann. Eug.*, 1937, no. 7, pp. 355–369 [in English].

[5] Kamke E. Reference book on ordinary differential equations. M., Nauka, 1976, 576 p. [in Russian].

[6] Nemytskii V.V., Stepanov V.V. Qualitative theory of differential equations. M., Editorial URSS, 2004, 552 p. [in Russian].

[7] Golubev V.V. Lectures on analytical theory of differential equations. M., Gostekhizdat, 1950, 436 p. [in Russian].

[8] Goriely A. Integrability and singularity. M.; Izhevsk, R&C D., 2006, 315 p. [in Russian].

[9] Ablowitz M., Zeppetella A. Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1979, Vol. 41, no. 6, pp. 835–840 [in English].

[10] Danilov V.G., Maslov V.P., Volosov K.A. Mathematical modelling of heat and mass transfer processes. M., Nauka, 1987, 352 p. [in Russian]

S. V. Pikulin [3]

ON SOLUTIONS OF TRAVELING WAVE TYPE FOR A NONLINEAR PARABOLIC EQUATION[4]

We consider the Kolmogorov — Petrovsky — Piskunov equation which is a quasilinear parabolic equation of second order appearing in the flame propagation theory and in modeling of certain biological processes. An analytical construction of self-similar solutions of traveling wave kind is presented for the special case when the nonlinear term of the equation is the product of the argument and a linear function of a positive power of the argument. The approach to the construction of solutions is based on the study of singular points of analytic continuation of the solution to the complex domain and on applying the Fuchs — Kovalevskaya — Painlevé test. The resulting representation of the solution allows an efficient numerical implementation.

Key words: Kolmogorov — Petrovsky — Piskunov equation, equation of Fujita type, generalized Fisher equation, Abel equation of the second kind, intermediate asymptotic regime, traveling waves, analytic continuation, movable and fixed singular points, algebraic branch points, Puiseux series, explicit solution, dead core solution, Painlevé test, Fuchs — Kowalewski method.

Статья поступила в редакцию 12/*VIII*/2015.

The article received 12/*VIII*/2015.

---

[3] *Pikulin Sergey Vladimirovich* (spikulin@gmail.com), sector of Analytical and Numerical Methods, Dorodnicyn Computing Centre of RAS, 40, Vavilov Street, Moscow, 119333, Russian Federation.

[4] The work is carried out with financial support from the Russian Foundation for Basic Research (project 13-01-00923) and programme № 3 of fundamental research of Branch of Mathematics of the Russian Academy of the Russian Academy of Sciences.