УДК 517.977.5

М.Ю. Тельнова[1]

ОБ ОЦЕНКАХ СВЕРХУ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ С ВЕСОВЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ[2]

В статье рассматривается задача, основополагающей для которой является задача Лагранжа или задача о наиболее прочной колонне заданного объема, послужившая источником для различных постановок экстремальных задач на собственные значения, в том числе для уравнений второго порядка с интегральным условием на потенциал. В работе рассматривается задача такого типа при условии, что интегральное условие содержит весовую функцию. Предложен метод получения точных оценок сверху первого собственного значения задачи Штурма — Лиувилля с условиями Дирихле при определенных значениях параметров интегрального условия и доказательства их достижимости.

Ключевые слова: задача Штурма — Лиувилля, оценки первого собственного значения, условия Дирихле, весовое интегральное условие, вариационный принцип, спектральная задача, краевая задача, экстремальные значения функционала.

1. Предварительные сведения

Рассматривается задача

$$y'' - Q(x)y + \lambda y = 0, \;\; x \in (0,1)\,, \tag{1.1}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{1.2}$$

где Q принадлежит множеству $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ действительных неотрицательных локально интегрируемых на интервале $(0,1)$ функций, для которых

$$\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}Q^{\gamma}(x)dx = 1, \;\; \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}, \;\; \gamma \neq 0. \tag{1.3}$$

Под *решением* задачи (1.1), (1.2) понимается функция y, абсолютно непрерывная на $[0,1]$, удовлетворяющая условиям (1.2), имеющая абсолютно непрерывную производную на любом отрезке, содержащемся в интервале $(0,1)$, и удовлетворяющая уравнению (1.1) почти всюду на $(0,1)$.

[1]© Тельнова М.Ю., 2015

Тельнова Мария Юрьевна (mytelnova@yandex.ru), кафедра высшей математики, Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 119501, Российская Федерация, г. Москва, ул. Нежинская, 7.

[2]Статья подготовлена по докладу конференции "СамДиф-2015".

При $\gamma > 1$ получим точные оценки для $M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup\limits_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q)$.

Оценки первого собственного значения $\lambda_1(Q)$ были получены и для других задач [2; 6]. Для произвольной функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ обозначим через H_Q замыкание множества $C_0^\infty(0,1)$ по норме

$$\|y\|_{H_Q} = \left(\int_0^1 y'^2 dx + \int_0^1 Q(x) y^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из вариационного принципа следует (см., например, [2; 5; 6]), что

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in H_Q \setminus \{0\}} R[Q,y], \quad \text{где } R[Q,y] = \frac{\int_0^1 y'^2 dx + \int_0^1 Q(x) y^2 dx}{\int_0^1 y^2 dx}.$$

Пусть $B_{\alpha,\beta,\gamma}$ – пространство функций из $H_0^1(0,1)$ с конечной нормой

$$\|y\|_{B_{\alpha,\beta,\gamma}} = \left(\int_0^1 y'^2 dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} |y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для любых функций $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и $y \in B_{\alpha,\beta,\gamma}$ в силу неравенства Гёльдера

$$\int_0^1 Q(x) y^2 dx \leqslant \left(\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta Q^\gamma(x)\, dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} |y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Следовательно, $B_{\alpha,\beta,\gamma} \subset H_Q \subset H_0^1(0,1)$. Пусть

$$G[y] = \frac{\int_0^1 y'^2 dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} |y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\int_0^1 y^2\, dx}$$

и

$$m = \inf_{y \in B_{\alpha,\beta,\gamma} \setminus \{0\}} G[y].$$

Тогда

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q) = \sup_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \inf_{y \in H_Q \setminus \{0\}} R[Q,y] \leqslant \inf_{y \in B_{\alpha,\beta,\gamma} \setminus \{0\}} G[y] = m.$$

Докажем, что $M_{\alpha,\beta,\gamma} = m$.

2. Основные результаты

Теорема 2.1. Пусть $\gamma > 1$; тогда для любых α, β существуют такая функция $Q_* \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и такая положительная на $(0,1)$ функция $u \in H_{Q_*}$, что $R[Q_*, u] = G[u] = m$, и $M_{\alpha,\beta,\gamma} = m$, причем u удовлетворяет уравнению

$$u'' + mu = x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tag{2.1}$$

и условиям

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{2.2}$$

$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\, dx = 1. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть $\Gamma_* = \{y \in B_{\alpha,\beta,\gamma} \mid \int_0^1 y^2dx = 1\}$ и

$$I[y] = \int_0^1 {y'}^2dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Пусть $\{t_k\}$ – минимизирующая последовательность функционала $G[y]$ в $B_{\alpha,\beta,\gamma}$. Так как $G[t_k] = G[|t_k|]$, то можно считать, что последовательность $\{t_k\}$ неотрицательна. Последовательность $y_k = \frac{t_k}{C_k^{\frac{1}{2}}}$, где $C_k = \int_0^1 t_k^2dx$, – минимизирующая последовательность функционала $I[y]$ в Γ_*, и $I[y_k] = G[y_k] = G[t_k]$. Тогда

$$m = \inf_{y\in B_{\alpha,\beta,\gamma}\setminus\{0\}} G[y] = \inf_{y\in\Gamma_*} I[y]. \tag{2.4}$$

Лемма 1. Существует такая функция $u_* \in \Gamma_*$, что $I[u_*] = m$.

Доказательство. Поскольку $\{y_k\}$ – минимизирующая последовательность функционала $I[y]$ в Γ_* и $m = \inf\limits_{y\in\Gamma_*} I[y]$, то для всех достаточно больших значений k имеем $I[y_k] \leqslant m+1$. Так как $\|y_k\|^2_{B_{\alpha,\beta,\gamma}} = I[y_k]$, последовательность $\{y_k\}$ ограничена в $B_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Рассмотрим эту последовательность в $H_0^1(0,1)$. Поскольку она ограничена в $H_0^1(0,1)$, то она содержит подпоследовательность $\{z_k\}$, слабо сходящуюся в $H_0^1(0,1)$ к некоторой функции u_*, причем $\|u_*\|^2_{H_0^1(0,1)} \leqslant m+1$.

Пространство $H_0^1(0,1)$ компактно вкладывается в пространство $C[0,1]$, следовательно, существует подпоследовательность $\{s_k\}$ последовательности $\{z_k\}$, сильно сходящаяся в $C[0,1]$. Тогда $\{s_k\}$ сильно сходится в $L_2(0,1)$ к u_* и

$$\int_0^1 s_k^2dx \to \int_0^1 u_*^2dx \quad \text{при } k\to\infty \quad \text{и} \quad \int_0^1 u_*^2dx = 1. \tag{2.5}$$

Для произвольного $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ рассмотрим функционал

$$I_\varepsilon[y] = \int_0^1 {y'}^2dx + \left(\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

На $[\varepsilon, 1-\varepsilon]\times[0,+\infty)$ рассмотрим выпуклую по переменной y функцию

$$F(x,y) = x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}.$$

Тогда для любого $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ и для любых двух значений $y, \overline{y}$ из $[0,+\infty)$

$$F(x,\overline{y}) - F(x,y) - F_y(x,y)(\overline{y}-y) \geqslant 0.$$

При $\overline{y} = s_k$ и $y = u_*$ имеем

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} (F(x,s_k) - F(x,u_*))\,dx \geqslant \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} F_{u_*}(x,u_*)(s_k-u_*)\,dx.$$

В силу равномерной сходимости на $[\varepsilon,1-\varepsilon]$ последовательности $\{s_k\}$ к функции u_* интеграл в правой части неравенства стремится к нулю при $k\to\infty$. Поскольку $\{s_k\}$ слабо сходится в $L_p(0,1)$, где $p = \frac{2\gamma}{\gamma-1}$, к функции u_*, имеем [3, с. 398]

$$\varliminf_{k\to\infty} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} F(x,s_k)dx \geqslant \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} F(x,u_*)dx$$

или

$$\varliminf_{k\to\infty} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|s_k|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx \geqslant \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u_*|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx. \tag{2.6}$$

Поскольку $\{s_k\}$ ограничена в $H_0^1(0,1)$, в силу определения нормы $\|s_k\|_{H_0^1(0,1)}$ последовательность $\{s_k'\}$ ограничена в $L_2(0,1)$. Тогда существует такая подпоследовательность $\{w_k\}$ последовательности $\{s_k\}$, что последовательность $\{w_k'\}$ слабо сходится к u_*' в $L_2(0,1)$.

Числовая последовательность $\{\int_0^1 {w_k'}^2 dx\}$ имеет конечный нижний предел. Тогда существует такая подпоследовательность $\{v_k\}$ последовательности $\{w_k\}$, что

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 {v_k'}^2 dx = \varliminf_{k\to\infty}\int_0^1 {w_k'}^2 dx.$$

Так как $\{v_k'\}$ слабо сходится к u_*' в $L_2(0,1)$, то [4, с. 217]

$$\|u_*'\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant \varliminf_{k\to\infty}\|v_k'\|^2_{L_2(0,1)} = \lim_{k\to\infty}\|v_k'\|^2_{L_2(0,1)} \quad . \tag{2.7}$$

В силу неравенств (2.6) и (2.7) для произвольного $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ имеем

$$I_\varepsilon[u_*] \leqslant \varliminf_{k\to\infty} I_\varepsilon[v_k] \leqslant \varliminf_{k\to\infty} I[v_k] = m.$$

Так как ε произвольно,

$$I[u_*] \leqslant \varliminf_{k\to\infty} I[v_k] = m. \tag{2.8}$$

Поскольку $m=\inf\limits_{y\in\Gamma} I[y]$, то $I[u_*]=m$. Из условий (2.5) и (2.8) следует принадлежность функции u_* множеству Γ_*. Лемма 1 доказана.

Пусть $\Gamma=\{y\in B_{\alpha,\beta,\gamma} \mid \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx=1\}$ и $u=Cu_*$, где константа C выбирается так, чтобы u принадлежала Γ и была неотрицательной на $[0,1]$, то есть $C=\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u_*|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}$. Тогда $G[u]=G[u_*]=I[u_*]=m$.

Лемма 2. Пусть $u\in\Gamma$ и $G[u]=m$; тогда u положительна на $(0,1)$ и удовлетворяет уравнению (2.1) и условиям (2.2).

Доказательство. Так как $G[y]$ достигает экстремума при $y=u$, его вариация обращается в нуль при $y=u$. Поскольку $u\in\Gamma$ и $G[u]=m$, получаем

$$\int_0^1 u'z'dx + \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\operatorname{sgn} u\, z dx = m\int_0^1 uzdx. \tag{2.9}$$

Равенство (2.9) выполняется для любой функции $z\in B_{\alpha,\beta,\gamma}$. Полагая, что $z\in$ $\in C_0^\infty(0,1)$, получаем, что u' имеет обобщенную производную

$$u''=x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\operatorname{sgn} u - mu = x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{2}{\gamma-1}}u - mu.$$

Поскольку $u\in AC[0,1]$, функция $x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\operatorname{sgn} u$ непрерывна на $[\rho,1-\rho]$, где $0<\rho<\frac{1}{2}$, и тогда $u''\in L_p(\rho,1-\rho)$. В силу следствия 2.6.1 теоремы 2.6.1 (см. [5, с. 41]), поскольку $u,v\in L_p(\rho,1-\rho), p\geqslant 1$, где v – обобщенная производная второго порядка от u, u непрерывно дифференцируема на $[\rho,1-\rho]$ и почти всюду на нем имеет классическую производную второго порядка $u''=v$. При этом u' абсолютно непрерывна на $[\rho,1-\rho]$. Таким образом,

$$u''-x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{2}{\gamma-1}}u+mu=0, \quad \text{где } x\in[\rho,1-\rho].$$

Поскольку ρ может быть произвольно малым числом, имеем

$$u''-x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{2}{\gamma-1}}u+mu=0, \quad \text{где } x\in(0,1). \tag{2.10}$$

Так как u непрерывна на $(0,1)$, u'' также непрерывна на $(0,1)$ и равенство (2.10) имеет место всюду на $(0,1)$. Поскольку $u \in \Gamma$, доказано существование неотрицательной функции $u \in B_{\alpha,\beta,\gamma}$, удовлетворяющей уравнению (2.1) и условиям (2.2), (2.3).

Поскольку u неотрицательна на $(0,1)$, график функции не может пересечь ось Ox. Касание оси Ox также невозможно в силу теоремы существования и единственности задачи Коши, так как $\gamma > 1$ и $\frac{\gamma+1}{\gamma-1} > 1$. Следовательно, u на $(0,1)$ положительна. Лемма 2 доказана.

Рассмотрим функцию $Q_*(x) = x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u^{\frac{2}{\gamma-1}}$, удовлетворяющую условию (1.3). Тогда $u \in H_{Q_*}$ и в силу леммы 2 удовлетворяет уравнению (2.1) и условиям (2.2). Таким образом, u удовлетворяет при $Q = Q_*$ и $\lambda = m$ уравнению (1.1) и условиям (1.2). Поскольку u непрерывна на $[0,1]$, u' непрерывна на $(0,1)$, u является первой собственной функцией задачи (1.1) – (1.3) для $Q = Q_*$ с первым собственным значением $\lambda_1(Q_*) = m$.

Тогда

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q) \geqslant \lambda_1(Q_*) = \inf_{y \in H_{Q_*} \setminus \{0\}} R[Q_*, y] = R[Q_*, u] = G[u] = m.$$

Поскольку также $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant m$, получаем $M_{\alpha,\beta,\gamma} = m$. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Отметим, что $M_{\alpha,\beta,\gamma} > \pi^2$, поскольку $u \in H_0^1(0,1)$ и

$$R[Q_*, u] = \frac{\int_0^1 u'^2 dx + 1}{\int_0^1 u^2 dx} > \frac{\int_0^1 u'^2 dx}{\int_0^1 u^2 dx} \geqslant \inf_{y \in H_0^1(0,1) \setminus \{0\}} \frac{\int_0^1 y'^2 dx}{\int_0^1 y^2\, dx} = \pi^2.$$

Литература

[1] Осмоловский В.Г. Нелинейная задача Штурма — Лиувилля: учеб. пособие. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского государственного университета, 2003. 260 с.

[2] Egorov Yu.V., Kondratiev V.A. On Spectral theory of elliptic operators // Operator theory: Advances and Applications, 1996. V. 89. P. 1–325.

[3] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 736 с.

[4] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.

[5] Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных: учеб. пособие для вузов. М.: Высш. школа, 1977. 431 с.

[6] Ежак С.С., Карулина Е.С., Тельнова М.Ю. Оценки минимального собственного значения некоторых задач Штурма — Лиувилля с интегральным условием // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / под ред. И.В. Асташовой. М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012. С. 506–647.

References

[1] Osmolovsky V.G. Nonlinear Sturm-Liouville problem: Textbook. St.Petersburg, Izdatel'stvo Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo universiteta, 2003, 260 p. [in Russian].

[2] Egorov Yu.V., Kondratiev V.A. On Spectral theory of elliptic operators. *Operator theory: Advances and Applications*, Birkhauser, Basel, 1996, Vol. 89, pp. 1–325 [in English].

[3] Ladyzhenskaya O.A., Uraltseva N.N. Linear and quasilinear elliptic equations. M., Nauka, 1973, 736 p. [in Russian].

[4] Lyusternik L.A., Sobolev V.I. Elements of functional analysis. M., Nauka, 1965, 520 p. [in Russian]; English transl. Frederick Ungar Publishing Co, New York, 1961 [in English].

[5] Mikhlin S.G. Linear partial differential equations. Manual for college-graduates. M., Vysshaya shkola, 1977, 431 p. [in Russian].

[6] Ezhak S.S., Karulina E.S., Telnova M.Yu. Estimates for the minimal eigenvalue of some Sturm-Liouville problems with an integral condition, pp. 506–647 in *Kachestvennye svoistva reshenii differentsial'nykh uravnenii i smezhnye voprosy spektral'nogo analiza: nauchnoe izdanie pod red. I. V. Astashovoi* [Qualitative properties of solutions to the differential equations and related topics of spectral analysis: scientific edition]. Astashova I.V. (Ed.). M., UNITY–DANA, 2012, pp. 506–647 [in Russian].

M.Yu. Telnova[3]

ON THE UPPER ESTIMATES FOR THE FIRST EIGENVALUE OF A STURM — LIOUVILLE PROBLEM WITH A WEIGHTED INTEGRAL CONDITION

In this paper a problem for which the origin problem was a problem known as the Lagrange problem or the problem on finding the form of the firmest column of the given volume is viewed. The Lagrange problem was the source for different extremal eigenvalue problems, among them for eigenvalue problems for the second-order differential equations, with an integral condition on the potential. In this paper the problem of that kind is considered under the condition that the integral condition contains a weight function. The method of finding the sharp upper estimates for the first eigenvalue of a Sturm — Liouville problem with Dirichlet conditions for some values of parameters in the integral condition was found and attainability of those estimates was proved.

Key words: Sturm — Liouville problem, estimates for the first eigenvalue, Dirichlet conditions, weighted integral condition, variational principle, eigenvalue problem, boundary value problem, extremal values of the functional.

Статья поступила в редакцию 4/*VI*/2015.

The article received 4/*VI*/2015.

[3] *Telnova Maria Yurjevna* (mytelnova@yandex.ru), Department of Higher Mathematics, Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics, 7, Nezhinskaya Street, Moscow, 119501, Russian Federation.