

УДК 130.145

*Е.К. Башкиров, А.С. Соловьева, М.С. Мастюгин*<sup>1</sup>**ДИНАМИКА ДВУХУРОВНЕВЫХ АТОМОВ,  
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ТЕПЛОВЫМ ПОЛЕМ,  
ДЛЯ ПЕРЕПУТАННЫХ НАЧАЛЬНЫХ АТОМНЫХ  
СОСТОЯНИЙ**<sup>2</sup>

В статье исследована динамика перепутывания системы двух идентичных двухуровневых атомов, взаимодействующих с модой теплового электромагнитного поля в идеальном резонаторе. При этом в качестве начальных состояний атомов выбраны перепутанные состояния белловского типа. Используя полный набор собственных функций гамильтониана модели, мы нашли точное решение для матрицы плотности рассматриваемой системы. На ее основе получена редуцированная матрица плотности и вычислен параметр Переса — Хородецких. Численное моделирование параметра перепутывания для различных параметров модели показало возможность сохранения высокой степени перепутывания кубитов даже при высоких интенсивностях теплового поля. При этом имеется возможность управления и контроля за степенью перепутывания.

**Ключевые слова:** двухуровневые атомы, тепловое поле, диполь-дипольное взаимодействие, идеальный резонатор, однофотонные переходы, атомная когерентность, перепутывание, атомная матрица плотности.

**Введение**

Возможность перепутывания квантовых состояний представляет собой одну из наиболее ярких черт квантовой механики. Перепутанные состояния играют ключевую роль в физике квантовых вычислений [1]. В контексте квантовой электродинамики резонаторов были предложены многочисленные схемы генерация перепутывания состояний двух кубитов за счет взаимодействия с общим полем резонатора [2; 3]. Тепловые поля обычно рассматриваются в качестве состояний, которые содержат минимум информации. Взаимодействие квантовых систем с такими полями обычно приводит к декогеренции. Однако Ким и соавторы [4] недавно показали, что такие некоррелированные поля могут приводить к перепутыва-

<sup>1</sup>© Башкиров Е.К., Соловьева А.С., Мастюгин М.С., 2015

*Башкиров Евгений Константинович* (bash@samsu.ru), *Соловьева Анастасия Сергеевна* (solovievaas@mail.ru), *Мастюгин Михаил Сергеевич* (mastyugin.mikhail@mail.ru), кафедра общей и теоретической физики, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

<sup>2</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (государственное задание № 1394).

нию состояний атомов в резонаторе. Они исследовали динамику двух идентичных двухуровневых атомов, резонансно взаимодействующих с модой теплового поля в идеальном резонаторе, и показали возможность генерации атомных перепутанных состояний как для чистых, так и для смешанных состояний атомов. При этом было показано, что степень перепутывания атомов существенно зависит от их начального состояния. В работах [5–8] было выявлено, что тепловое поле может также индуцировать высокую степень перепутывания как для случая неидентичных атомов, так и для многофотонных переходов в атомах. Агуиар с соавторами [9] обобщили результаты работы [4], приняв во внимание прямое диполь-дипольное взаимодействие атомов. При этом было показано, что дипольное взаимодействие между атомами может привести к существенному возрастанию максимальной степени атомного перепутывания. Недавно в ряде работ [10–12] было показано, что степень атомного перепутывания двухкубитных систем, индуцированного тепловым полем, может существенно возрасти за счет наличия начальной атомной когерентности. При этом авторы уделили основное внимание исследованию перепутывания кубитов для начальных непереputанных атомных состояний. Представляет интерес рассмотреть динамику атомного перепутывания, возникающего за счет взаимодействия с тепловым шумом, в случае перепутанных начальных состояний атомов и с учетом их прямого диполь-дипольного взаимодействия. Для исследования атомного перепутывания в указанной модели мы найдем точную динамику, используя подход, отличный от развитого в работах [9; 10] и базирующийся на применении полного набора "одетых состояний" исходного гамильтониана.

## 1. Модель и решение уравнения эволюции

Рассмотрим два идентичных двухуровневых атома, резонансно взаимодействующих с модой квантового теплового поля в резонаторе без потерь. Будем считать, что атомы находятся на расстоянии меньшем, чем длина волны излучения на рабочем переходе. В этом случае при описании динамики системы мы должны учесть прямое диполь-дипольное взаимодействие атомов. Гамильтониан такой модели в представлении взаимодействия может быть записан как

$$H = \hbar g \sum_{i=1}^2 (\sigma_i^+ a + a^+ \sigma_i^-) + \hbar J (\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_1^- \sigma_2^+), \quad (1)$$

где  $\sigma_i^+ = |+\rangle_{ii}\langle -|$ ,  $\sigma_i^- = |-\rangle_{ii}\langle +|$  – операторы переходов для возбужденного  $|+\rangle_i$  и основного  $|-\rangle_i$  состояний  $i$ -го двухуровневого атома ( $i=1,2$ ),  $a^+$  и  $a$  – операторы рождения и уничтожения фотонов электромагнитного поля,  $g$  – параметр взаимодействия двухуровневых атомов и электромагнитного поля и  $J$  – константа дипольного взаимодействия двухуровневых атомов.

Будем полагать, что в начальный момент времени атомы находятся в чистом состоянии, а поле – в одномодовом тепловом состоянии. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением атом-атомных перепутанных состояний. Для описания динамики перепутывания атомов необходимо вычислить редуцированную атомную матрицу плотности  $\rho_{atom}(t)$ . А. Перес и Хороденские доказали [13; 14], что необходимым и достаточным условием непереputанности состояний двух кубитов является то, что некая дополнительная матрица  $\rho_{atom}^{T_1}$ , полученная путем частичной перестановки индексов (транспонирование по переменным одного кубита) матрицы плотности  $\rho_{atom}(t)$ , имеет только неотрицательные собственные

значения. Тогда для определения степени атом-атомного перепутывания можно воспользоваться параметром Переса – Хорощецких, который определим как

$$\varepsilon = -2 \sum_i \mu_i^-, \quad (2)$$

где  $\mu_i^-$  – отрицательные собственные значения транспонированной по переменным одного кубита атомной матрицы плотности  $\rho_{atom}^{T_1}$ . Отсутствие у частично транспонированной по переменным одного кубита атомной матрицы плотности (2) отрицательных собственных значений означает, как уже было сказано выше, что атомы в любой момент времени остаются неперепутанными, в этом случае полагают  $\varepsilon = 0$ . Если параметр перепутывания  $\varepsilon > 0$ , то атомы находятся в перепутанном состоянии. Максимальная степень перепутывания атомов соответствует значению параметра перепутывания  $\varepsilon = 1$ .

Рассмотрим теперь динамику параметра перепутывания (2) для различных чистых перепутанных состояний атомной подсистемы белловского типа

$$|\Psi(0)\rangle_A = \cos \Theta |+, -\rangle + e^{i\varphi} \sin \Theta |-, +\rangle, \quad (3)$$

или

$$|\Psi(0)\rangle_A = \cos \Theta |+, +\rangle + e^{i\varphi} \sin \Theta |-, -\rangle, \quad (4)$$

где  $\cos \Theta$  и  $\sin \Theta$  – амплитуды и  $\varphi$  – относительная фаза состояний, входящих в правые части формул (3) и (4), а также одномодового теплового состояния резонаторного поля, описываемого матрицей плотности

$$\rho_F(0) = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|. \quad (5)$$

Здесь  $|n\rangle$  – одномодовое фоковское состояние поля и вероятности  $p_n$  задаются для теплового поля формулой  $p_n = \bar{n}^n / (\bar{n}^n + 1)^{n+1}$ , где  $\bar{n}$  – среднее число фотонов в моде. Для этой цели предварительно найдем решение временного уравнения Шредингера для модели с гамильтонианом (1) в случае чистого фоковского состояния поля и различных начальных чистых состояний кубитов. Для начальной волновой функции полной системы  $|\Psi(0)\rangle$  указанное решение можно представить в виде

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\Psi(0)\rangle = \sum_i C_i(0) e^{-iE_i t/\hbar} |\Phi_i\rangle, \quad (6)$$

где  $|\Psi(0)\rangle = \sum_i C_i(0) |\Phi_i\rangle$  и  $|\Phi_i\rangle$  и  $E_i$  – собственные функции и собственные значения гамильтониана (1) соответственно.

В двухатомном базисе  $|-, -, n+2\rangle, |+, -, n+1\rangle, |-, +, n+1\rangle, |+, +, n\rangle$  собственные функции (так называемые "одетые состояния") гамильтониана (1) есть

$$|\Psi_{in}\rangle = \xi_{in} (X_{i1n} |-, -, n+2\rangle + X_{i2n} |+, -, n+1\rangle + X_{i3n} |-, +, n+1\rangle + X_{i4n} |+, +, n\rangle) \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (7)$$

где

$$\xi_{in} = 1 / \sqrt{|X_{i1n}|^2 + |X_{i2n}|^2 + |X_{i3n}|^2 + |X_{i4n}|^2}$$

– константы нормировки для собственных функций и

$$\begin{aligned} X_{11n} &= 0, & X_{12n} &= -1, & X_{13} &= 1, & X_{14} &= 0, \\ X_{21n} &= -\frac{\sqrt{1+n}}{\sqrt{2+n}}, & X_{22n} &= 0, & X_{23n} &= 0, & X_{24n} &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{31n} &= \frac{2+n}{\sqrt{1+n}\sqrt{2+n}}, & X_{32n} &= \frac{\alpha+\Omega_n}{4\sqrt{1+n}}, \\
X_{33n} &= \frac{1}{2} \frac{(1+n)(\alpha+\Omega_n) + (\alpha+\Omega_n)(2+n+\alpha(\alpha+\Omega_n)/2)}{\sqrt{1+n}(6+4n+\alpha^2+\alpha\Omega_n)}, & X_{34} &= 1, \\
X_{41n} &= \frac{2+n}{\sqrt{1+n}\sqrt{2+n}}, & X_{42n} = X_{43n} &= \frac{\alpha(15+10n+\alpha^2) - \Omega_n(3+2n+\alpha^2)}{2\sqrt{1+n}(6+4n+\alpha^2-\alpha\Omega_n)}, \\
& & X_{44} &= 1,
\end{aligned}$$

где  $\Omega_n = \sqrt{24+16n+\alpha^2}$ .

Соответствующие собственные значения имеют вид

$$E_{1n} = 0, \quad E_{2n} = \alpha, \quad E_{3n} = -(1/2)(\alpha + \Omega_n), \quad E_{4n} = -(1/2)(\alpha - \Omega_n),$$

где  $\alpha = J/g$ .

В двухатомном базисе  $|-, -, 1\rangle, |+, -, 0\rangle, |-, +, 0\rangle$  собственные функции и собственные значения гамильтониана (1) можно представить в виде

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+, -, 0\rangle - |-, +, 0\rangle], \quad E_1/\hbar = -\alpha; \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
|\Psi_2\rangle &= \frac{4}{8+(\omega+\alpha)^2} \left[ -\frac{1}{2}(\omega+\alpha)|-, -, 1\rangle + |+, -, 0\rangle + |-, +, 0\rangle \right], & E_2/\hbar &= -\frac{1}{2}(\omega-\alpha); \\
|\Psi_2\rangle &= \frac{4}{8+(\omega-\alpha)^2} \left[ -\frac{1}{2}(\omega-\alpha)|-, -, 1\rangle + |+, -, 0\rangle + |-, +, 0\rangle \right], & E_3/\hbar &= \frac{1}{2}(\omega+\alpha);
\end{aligned}$$

где  $\omega = \sqrt{8+\alpha^2}$ .

Наконец, гамильтониан (1) имеет еще одну собственную функцию вида

$$|\Psi_0\rangle = |-, -, 0\rangle, \quad (9)$$

соответствующую энергии  $E_0 = 0$ .

Прежде чем искать временную матрицу плотности для атомов, приготовленных в перепутанных состояниях, а поля – в тепловом состоянии, исследуем динамику системы, приготовленной в одном из базисных состояний

$$|-, -, n+2\rangle, |+, -, n+1\rangle, |-, +, n+1\rangle, |+, +, n\rangle.$$

Предположим, что рассматриваемая система в начальный момент времени находится в чистом состоянии  $|+, -, n+1\rangle$ . В этом случае с использованием соотношений (6)-(9) временную волновую функцию можно записать в виде

$$|\Psi(t)\rangle = Z_{12,n}|-, -, n+2\rangle + Z_{22,n}|+, -, n+1\rangle + Z_{32,n}|-, +, n+1\rangle + Z_{42,n}|+, +, n\rangle, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}
Z_{12,n} &= e^{-iE_{1n}t/\hbar} \xi_{1n} Y_{21n} X_{11n} + e^{-iE_{2n}t/\hbar} \xi_{2n} Y_{22n} X_{21n} + \\
&+ e^{-iE_{3n}t/\hbar} \xi_{3n} Y_{23n} X_{31n} + e^{-iE_{4n}t/\hbar} \xi_{4n} Y_{24n} X_{41n}, \\
Z_{22,n} &= e^{-iE_{1n}t/\hbar} \xi_{1n} Y_{21n} X_{12n} + e^{-iE_{2n}t/\hbar} \xi_{2n} Y_{22n} X_{22n} + \\
&+ e^{-iE_{3n}t/\hbar} \xi_{3n} Y_{23n} X_{32n} + e^{-iE_{4n}t/\hbar} \xi_{4n} Y_{24n} X_{42n}, \\
Z_{32,n} &= e^{-iE_{1n}t/\hbar} \xi_{1n} Y_{21n} X_{13n} + e^{-iE_{2n}t/\hbar} \xi_{2n} Y_{22n} X_{23n} + \\
&+ e^{-iE_{3n}t/\hbar} \xi_{3n} Y_{23n} X_{33n} + e^{-iE_{4n}t/\hbar} \xi_{4n} Y_{24n} X_{43n},
\end{aligned}$$

$$Z_{42,n} = e^{-iE_{1n}t/\hbar} \xi_{1n} Y_{21n} X_{14n} + e^{-iE_{2n}t/\hbar} \xi_{2n} Y_{22n} X_{24n} + \\ + e^{-iE_{3n}t/\hbar} \xi_{3n} Y_{23n} X_{34n} + e^{-iE_{4n}t/\hbar} \xi_{4n} Y_{24n} X_{44n}$$

и  $Y_{ijn} = \xi_{jn} X_{jin}^*$ .

Если же начальное состояние полной системы выбрать в виде  $|+, -, 0\rangle$ , то временная функция примет вид

$$|\Psi(t)\rangle = Z_{12}|-, -, 1\rangle + Z_{22}|+, -, 0\rangle + Z_{32}|-, +, 0\rangle, \quad (11)$$

где

$$Z_{12} = -(2/\omega) e^{-i\alpha t/2} \sin(\omega t/2), \\ Z_{22} = (1/2) \left\{ e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t/2} [\cos(\omega t/2) - (i\alpha/\omega) \sin(\omega t/2)] \right\}, \\ Z_{32} = (1/2) \left\{ -e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t/2} [\cos(\omega t/2) - (i\alpha/\omega) \sin(\omega t/2)] \right\}.$$

Если мы выберем в начальный момент времени волновую функцию в виде  $|-, +, n+1\rangle$ , то ее временная эволюция будет описываться вектором состояния

$$|\Psi(t)\rangle = Z_{13,n}|-, -, n+2\rangle + Z_{23,n}|+, -, n+1\rangle + Z_{33,n}|-, +, n+1\rangle + Z_{43,n}|+, +, n\rangle. \quad (12)$$

Выражения для величин  $Z_{i3,n}$  можно получить из формул для  $Z_{i2,n}$ , если в (10) заменить величины  $Y_{2in}$  на  $Y_{3in}$ , где  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Для начального состояния  $|-, +, 0\rangle$  временная функция имеет вид

$$|\Psi(t)\rangle = Z_{13}|-, -, 1\rangle + Z_{23}|+, -, 0\rangle + Z_{33}|-, +, 0\rangle,$$

где  $Z_{13} = Z_{12}$ ,  $Z_{23} = Z_{32}$ ,  $Z_{33} = Z_{22}$ .

Для начального состояния  $|+, +, n\rangle$  временная волновая функция есть

$$|\Psi(t)\rangle = Z_{11,n}|-, -, n+2\rangle + Z_{21,n}|+, -, n+1\rangle + Z_{31,n}|-, +, n+1\rangle + Z_{41,n}|+, +, n\rangle. \quad (13)$$

Выражения для величин  $Z_{i1,n}$  можно получить из формул для  $Z_{i2,n}$ , если в (10) заменить величины  $Y_{2in}$  на  $Y_{1in}$ , где  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Для начального состояния  $|-, -, n+2\rangle$  в последующие моменты времени волновая функция может быть представлена как

$$|\Psi(t)\rangle = Z_{14,n}|-, -, n+2\rangle + Z_{24,n}|+, -, n+1\rangle + Z_{34,n}|-, +, n+1\rangle + Z_{44,n}|+, +, n\rangle. \quad (14)$$

Выражения для величин  $Z_{i4,n}$  можно получить из формул для  $Z_{i2,n}$ , если в (10) заменить величины  $Y_{2in}$  на  $Y_{4in}$ , где  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Для начального состояния  $|-, -, 1\rangle$  временная функция имеет вид

$$|\Psi(t)\rangle = Z_{14}|-, -, 1\rangle + Z_{24}|+, -, 0\rangle + Z_{34}|-, +, 0\rangle, \quad (15)$$

где

$$Z_{14} = (1/\omega) e^{-i\alpha t/2} [\omega \cos(\omega t/2) + i\alpha \sin(\omega t/2)], \quad Z_{24} = Z_{34} = -(2i/\omega) e^{-i\alpha t/2} \sin(\omega t/2).$$

Наконец, начальное состояние  $|-, -, 0\rangle$  не эволюционирует с течением времени.

Теперь вернемся к решению поставленной задачи. Пусть атомы приготовлены в одном из перепутанных состояний вида (3) или (4), а поле – в одномодовом состоянии (5). Тогда используя соотношения (6)–(15), мы можем найти явный вид решения квантового уравнения Лиувилля для временной матрицы плотности полной системы, включающей в себя два атома и моду поля. Проводя ее усреднение по переменным поля, мы можем получить редуцированную атомную матрицу плотности. В двухатомном базисе  $|+, +\rangle$ ,  $|+, -\rangle$ ,  $|-, +\rangle$ ,  $|-, -\rangle$  она имеет вид

$$\rho_A(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{12}^* & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{13}^* & \rho_{23}^* & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{14}^* & \rho_{24}^* & \rho_{34}^* & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Элементы матрицы (16) получены нами в явном виде, однако не приведены в работе ввиду чрезмерно громоздкого вида. Соответствующая (16) частично транспонированная по переменным одного кубита атомная матрица плотности  $\rho_A^{T_1}$  есть

$$\rho_A^{T_1}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13}^* & \rho_{23}^* \\ \rho_{12}^* & \rho_{22} & \rho_{14}^* & \rho_{24}^* \\ \rho_{13} & \rho_{14} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{23} & \rho_{24} & \rho_{34}^* & \rho_{44} \end{pmatrix}.$$

Вычислив ее собственные значения, мы можем определить параметр Переса — Хородещих (2), позволяющий оценить степень перепутывания состояний атомов.

## 2. Основные результаты

Результаты численного моделирования параметра атом-атомного перепутывания (2) для различных значений параметров модели и начальных атомных состояний вида (3) и (4) приведены на рис. 1–3.

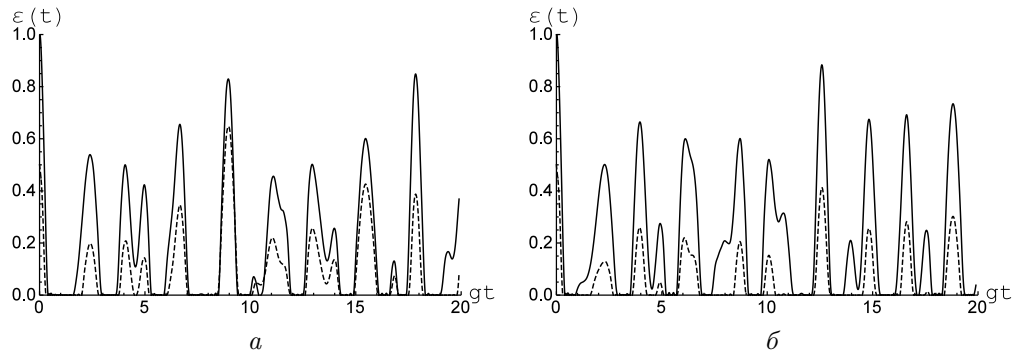


Рис. 1. Зависимость параметра перепутывания (2) от приведенного времени  $gt$  для начального атомного состояния вида (3). Среднее число фотонов в моде  $\bar{n} = 1$ . Относительная фаза  $\varphi = 0$ . Параметр диполь-дипольного взаимодействия  $\alpha = 0, 1$  (а) и  $\alpha = 1$  (б). Параметр  $\theta$  равен:  $5/12\pi$  (штриховая линия) и  $\pi/4$  (сплошная линия)

Из рисунков хорошо видно, что при определенном выборе параметров начального атомного перепутанного состояния вида (3) или (4) возможно сохранение высокой степени перепутывания атомов в процессе их дальнейшей эволюции даже в случае высоких интенсивностей теплового поля в резонаторе. При этом зависимость степени перепутывания от интенсивности диполь-дипольного взаимодействия является весьма слабой, что представляет существенным преимуществом рассматриваемой схемы по сравнению со схемой, использующей неперепутанные начальные состояния атомов [11]. Это связано с тем, что для того чтобы достичь

заметных интенсивностей диполь-дипольного взаимодействия, необходимо локализовать атомы на расстояниях, сравнимых с длиной волны их излучения, что представляет собой непростую задачу. В результате для рассмотренной двухкубитной схемы появляются широкие возможности управления и контроля за степенью перепутывания за счет изменения интенсивности диполь-дипольного взаимодействия кубитов (расстояния между ними), температуры резонатора (среднего числа фотонов в резонаторе), а также выбора параметров начального перепутанного состояния кубитов.

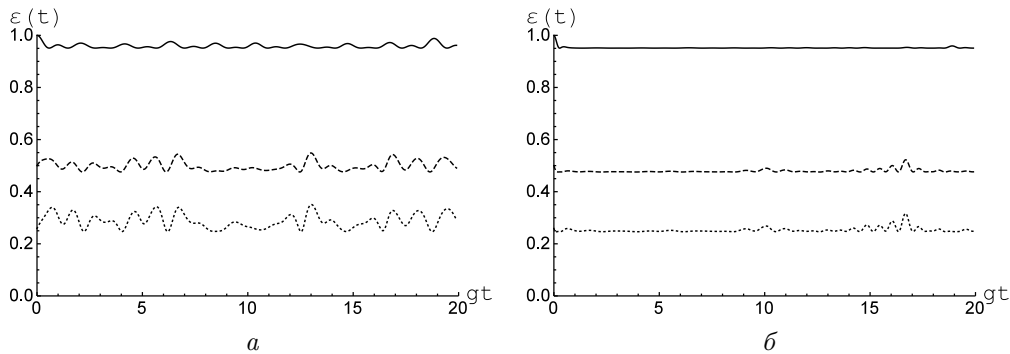


Рис. 2. Зависимость параметра перепутывания (2) от приведенного времени  $gt$  для начального атомного состояния вида (3). Относительная фаза  $\varphi = 9/10\pi$ . Параметр диполь-дипольного взаимодействия  $\alpha = 1$ . Среднее число фотонов в моде  $\bar{n} = 1$  (а) и  $\bar{n} = 10$  (б). Параметр  $\theta$  равен:  $11/24\pi$  (точечная линия),  $5/12\pi$  (штриховая линия) и  $\pi/4$  (сплошная линия)

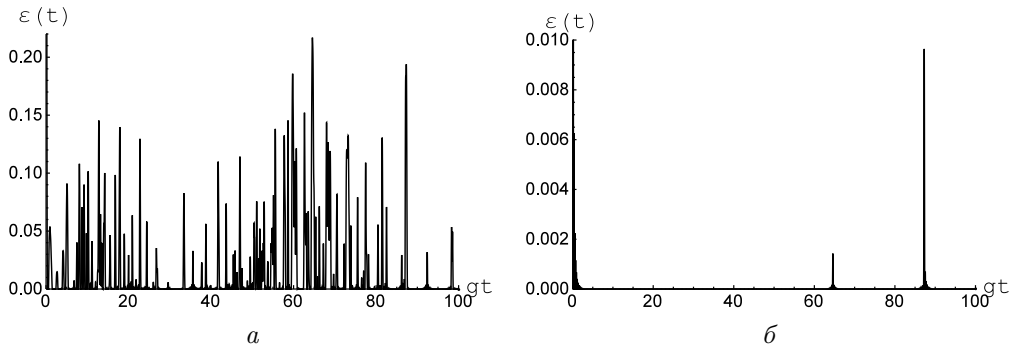


Рис. 3. Зависимость параметра перепутывания (2) от приведенного времени  $gt$  для начального атомного состояния вида (4). Среднее число фотонов в моде  $\bar{n} = 10$ , параметр диполь-дипольного взаимодействия  $\alpha = 0, 1$ , относительная фаза  $\varphi = 0$ . Параметр  $\theta$  равен:  $\pi/4\pi$  (а) и  $\pi/12$  (б)

## Выводы

Таким образом, в настоящей статье нами показана возможность сохранения высокой степени перепутывания кубитов для модели двух атомов, взаимодействующих с тепловым шумом, даже при высоких интенсивностях теплового поля. При этом имеется возможность управления и контроля за степенью перепутывания

за счет изменения параметров модели. При описании динамики перепутывания кубитов важен также учет диссипативных процессов, возникающих за счет взаимодействия кубитов с окружением. Такие взаимодействия приводят к исчезновению квантовой перепутанности кубитов. Учет влияния окружения на динамику перепутывания кубитов, оценка времени декогеренции и рассмотрение других механизмов контроля перепутывания в рамках рассмотренной в настоящей статье модели на основе управляющих уравнений, выведенных ранее в работах [15–19], будет предметом нашего следующего исследования.

## Литература

- [1] Schumacker D., Westmoreland M.D. *Quantum Processes, Systems and Information*. New York: Cambridge University Press, 2010. 469 p.
- [2] Buluta I., Ashhab F., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation // *Reports on Progress in Physics*. 2011. V. 74. P. 104401.
- [3] Gühne O., Tóth G. Entanglement detection // *Physics Reports*. 2014. V. 474. P. 1–75.
- [4] Kim M.S., Lee J., Ahn D., Knight P.L. Entanglement induced by a single-mode heat environment // *Physical Review*. 2002. V. A65. P. 040101.
- [5] Башкиров Е.К. Перепутанные состояния в системе двух неидентичных атомов, взаимодействующих с тепловым полем // *Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия*. 2006. № 3. С. 21–29.
- [6] Zhou L., Song H.S. Entanglement induced by a single-mode thermal field and criteria for entanglement // *Journal of Optics*. 2002. V. B4. P. 425–429.
- [7] Башкиров Е.К., Ступацкая М.П. Перепутывание двух атомов, взаимодействующих с тепловым электромагнитным полем // *Компьютерная оптика*. 2011. Т. 35. № 2. P. 243–249.
- [8] Башкиров Е.К., Мастюгин М.С. Перепутывание двух сверхпроводящих кубитов, взаимодействующих с двухмодовым тепловым полем // *Компьютерная оптика*. 2013. Т. 37. № 3. С. 278–285.
- [9] Bashkirov E.K., Mastuyugin M.S. The dynamics of entanglement in two-atom Tavis-Cummings model with non-degenerate two-photon transitions for four-qubits initial atom-field entangled states // *Optics Communications*. 2014. V. 313. P. 170–174.
- [10] The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms in a cavity interacting with a thermal field / L.S. Aguiar [et al.] // *Journal of Optics*. 2005. V. B7. P. S769–S771.
- [11] Hu Y.H., Fang M.F. Coherence-Enhanced Entanglement Induced by a Two-Mode Thermal Field // *Communications in Theoretical Physics*. 2010. V. 54. P. 421–426.
- [12] Башкиров Е.К., Мастюгин М.С. Влияние диполь-дипольного взаимодействия и атомной когерентности на перепутывание двух атомов с вырожденными двухфотонными переходами // *Оптика и спектроскопия*. 2014. Т. 114. № 4. С. 678–683.
- [13] Bashkirov E.K., Mastuyugin M.S. The influence of atomic coherence and dipole-dipole interaction on entanglement of two qubits with nondegenerate two-photon transitions // *Pramana*. 2015. V. 84. P. 127–135.
- [14] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices // *Physical Review Letters*. 1996. V. 77. P. 1413–1415.
- [15] Horodecki M., Horodecki P., Horodecki R. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Conditions // *Physical Letters*. 1996. V. A223. P. 1–8.
- [16] Bashkirov E.K., Le Kien F., Shumovsky A.S. Collective spontaneous radiation of two atoms in the finite-Q cavity // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 1990. V. 167. № 3. P. 935–944.



- [17] Башкиров Е.К., Мангулова Е.Г. Динамика двух двухуровневых атомов в неидеальном резонаторе // Известия Российской академии наук. Сер.: Физическая. 2000. Т. 64. № 10. С. 2075–2079.
- [18] Башкиров Е.К. Спонтанное излучение двух трехуровневых атомов в неидеальном резонаторе // Известия Российской академии наук. Сер.: Физическая. 2004. Т. 68. № 9. С. 1292–1295.
- [19] Bashkirov E.K. Dynamics of phonon mode in superradiance regime of laser cooling of crystals // Physics Letters A. 2005. V. 341. № 1–4. P. 345–351.

## References

- [1] Schumacker D., Westmoreland M.D. Quantum Processes, Systems, and Information. New York, Cambridge University Press, 2010, 469 p. [in English].
- [2] Buluta I., Ashhab F., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation. *Reports on Progress in Physics*, 2011, Vol. 74, p. 104401 [in English].
- [3] Gühne O., Tóth G. Entanglement detection. *Physics Reports*, 2014, Vol. 474, pp. 1–75 [in English].
- [4] Kim M.S., Lee J., Ahn D., Knight P.L. Entanglement induced by a single-mode heat environment. *Physical Review*, 2002, Vol. A65, p. 040101 [in English].
- [5] Bashkirov E.K. Entangled states in the system of two nonidentical atoms interacting with thermal field. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2006, no. 3, pp. 21–29 [in Russian].
- [6] Zhou L., Song H.S. Entanglement induced by a single-mode thermal field and criteria for entanglement. *Journal of Optics*, 2002, Vol. B4, pp. 425–429 [in English].
- [7] Bashkirov E.K., Stupatskaya M.P. Entanglement of two atoms interacting with thermal field. *Komp'yuternaya optika* [Computer Optics], 2011, Vol. 35, no. 2, pp. 243–249 [in Russian].
- [8] Bashkirov E.K., Mastuyugin M.S. Entanglement of two superconducting qubits interacting with two-mode thermal field. *Komp'yuternaya optika* [Computer Optics], 2013, Vol. 37, no. 3, pp. 278–285 [in Russian].
- [9] Bashkirov E.K., Mastuyugin M.S. The dynamics of entanglement in two-atom Tavis-Cummings model with non-degenerate two-photon transitions for four-qubits initial atom-field entangled states. *Optics Communications*, 2014, Vol. 313, pp. 170–174 [in English].
- [10] Aguiar L.S., Munhoa P.P., Vidiella-Barranco A., Roversi J.A. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms in a cavity interacting with a thermal field. *Journal of Optics*, 2005, Vol. B7, pp. S769–S771 [in English].
- [11] Hu Y.H., Fang M.F. Coherence-Enhanced Entanglement Induced by a Two-Mode Thermal Field. *Communications in Theoretical Physics*, 2010, Vol. 54, pp. 421–426 [in English].
- [12] Bashkirov E.K., Mastuyugin M.S. Influence of dipole-dipole interaction and atomic coherence on entanglement of two atoms with degenerate two-photon transitions. *Optika i spektroskopiya* [Optics and Spectroscopy], 2014, Vol. 114, no. 4, pp. 678–683 [in Russian].
- [13] Bashkirov E.K., Mastuyugin M.S. The influence of atomic coherence and dipole-dipole interaction on entanglement of two qubits with nondegenerate two-photon transitions. *Pramana*, 2015, Vol. 84, pp. 127–135 [in English].

- [14] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices. *Physical Review Letters*, 1996, Vol. 77, pp. 1413–1415.
- [15] Horodecki M., Horodecki P., Horodecki R. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Conditions. *Physical Letters*, 1996, Vol. A223, pp. 1–8 [in English].
- [16] Bashkirov E.K., Le Kien F., Shumovsky A.S. Collective spontaneous radiation of two atoms in the finite-Q cavity. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 1990, Vol. 167, no 3, pp. 935–944 [in English].
- [17] Bashkirov E.K., Mangulova E.G. Dynamics of two two-level atoms in finite-Q cavity. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Seriya fizicheskaya* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics], 2000, Vol. 64, no. 10, pp. 2075–2079 [in Russian].
- [18] Bashkirov E.K. Spontaneous radiation of two three-level atoms in lossless cavity. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Seriya fizicheskaya* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics], 2004, Vol. 68, no. 9, pp. 1292–1295 [in Russian].
- [19] Bashkirov E.K. Dynamics of phonon mode in superradiance regime of laser cooling of crystals. *Physics Letters A.*, 2005, Vol. 341, no. 1-4, pp. 345–351 [in English].

*E.K. Bashkirov, A.S. Solovieva, M.S. Mastyugin*<sup>3</sup>

## DYNAMICS OF TWO-LEVEL ATOMS INTERACTING WITH THERMAL FIELD FOR ENTANGLED INITIAL ATOMIC STATES<sup>4</sup>

In this paper the entanglement dynamics for system of two two-level atoms interacting with a mode of thermal electromagnetic field in lossless cavity has been investigated. Initial atomic states are the entangled Bell type states. Using the full set of eigenvectors of the Hamiltonian of the considered model we have derived the exact solution for the density matrix for the whole system. On its basis the reduced atomic density matrix and Peres — Horodecki parameter have been calculated. Calculating of entanglement parameter shows the possibility of high degree of entanglement even for large intensity of thermal field. Thus there is a possibility of maintenance and control over the degree of entanglement.

**Key words:** two-level atoms, thermal field, dipole-dipole interaction, lossless cavity, one-photon transitions, atomic coherence, entanglement, atomic density matrix.

Статья поступила в редакцию 9/IV/2015.

The article received 9/IV/2015.

---

<sup>3</sup>*Bashkirov Eugene Konstantinovich* (bash@samsu.ru), *Solovieva Anastasya Sergeevna* (anssolovieva@mail.ru), *Mastyugin Mikhail Sergeevich* (mastyugin.mikhail@mail.ru), Department of General and Theoretical Physics, Samara State University, 1, Academician Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.

<sup>4</sup>The work is carried out with the financial support from the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (state assignment № 1394).